Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

С. В. Хизгияев

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть I

Учебное пособие для вузов

Вологда
2024

УДК 330.43
ББК 65я73
Х43

Рецензент
Кораблева Л. А., старший преподаватель кафедры общей экономической теории Московской школы экономики МГУ им. М. В. Ломоносова

Хизгияев, С. В.
Х43 Лекции по математическому анализу (Часть I): учебное пособие для вузов / С. В. Хизгияев; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, кафедра эконометрики и математических методов экономики. — Вологда : ВолНЦ РАН, 2024. — 159 с.: ил., табл.
ISBN 978-5-93299-606-5

Учебное пособие представляет собой лекции, читаемые в течение последних шести лет на факультете Московской школы экономики МГУ им. М. В. Ломоносова. Содержание книги охватывает теорию множеств, введение в комплексный анализ и дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Автор стремился облегчить процесс усвоения знаний за счет полного изложения и упрощения доказательств, дополняя определения и утверждения поясняющими примерами. Для более строгого изложения используется символика кванторов.

© Хизгияев С. В., 2024
© Оформление: ФГБУН ВолНЦ РАН, 2024

Оглавление

Предисловие 6

1. Элементы теории множеств 7

1. Математический анализ. Кванторы 7
2. Операции со множествами 12
3. Отображение. Типы отображений 18
4. Эквивалентные множества 22
5. Задачи для закрепления материала 25

2. Комплексные числа 27

1. Алгебраическая форма комплексного числа 27
2. Полярные координаты 32
3. Модуль и аргумент комплексного числа . . . 35
4. Тригонометрическая форма. Формула Муавра 37
5. Корень n-ой степени 41
6. Задачи для закрепления материала 44

3. Аксиоматика действительных чисел 46

1. Аксиомы действительных чисел 46
2. Точная верхняя и нижняя грани 49
3. Модуль. Целая часть 51
4. Метод математической индукции 53

5. Бином Ньютона 58
6. Задачи для закрепления материала 62

4. Последовательности 64
1. Числовые последовательности 64
2. Ограниченность 65
3. Монотонность 67
4. Бесконечно малые и бесконечно большие . . . 68
5. Предел последовательности 74
6. Свойства пределов последовательностей 76
7. Задачи для закрепления материала 80

5. Предел функции 83
1. Предел функции по Коши и по Гейне 83
2. Свойства предела функции 88
3. Непрерывность функции в точке 90
4. Свойства непрерывных функций 92
5. Монотонность функции. Точки разрыва 96
6. Предел сложной функции 98
7. Методы вычисления пределов 100
8. Замечательные пределы 103
9. Эквивалентные переходы 109
10. Задачи для закрепления материала 111

6. Дифференциальное исчисление 115
1. Приращение. Дифференциал 115
2. Производная 117
3. Производные элементарных функций 120
4. Правила дифференцирования 121

5. Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ 124
6. Ряды Тейлора и Маклорена 127
7. Исследование функций 136
8. Исследование и построение графика 141
9. Задачи для закрепления материала 147

7. Дополнительно **149**
1. Список теоретических вопросов к экзамену 149
2. Варианты коллоквиумов и экзамена 151

8. Список литературы **155**

Предисловие

Пособие охватывает теорию множеств, комплексные числа, теорию пределов последовательностей и функций, а также дифференциальное исчисление функций одной переменной. В основу данного пособия положены лекции, читаемые автором последние шесть лет на факультете Московской школы экономики МГУ им. М. В. Ломоносова. Предназначено для студентов социально-экономических специальностей.

Автор стремился облегчить процесс усвоения знаний за счет доступного изложения и упрощения доказательств, дополняя определения и утверждения поясняющими примерами. Для краткости изложения рассуждений и утверждений, а также в образовательных целях, используется символика кванторов.

Автор выражает признательность и благодарность рецензентам и студентам за их помощь, за вклад в улучшение материала, а также близким и родным, оказавшим помощь и поддержку автору в процессе написания книги. Автор также выражает благодарность факультету Московской школе экономики МГУ имени М.В. Ломоносова, профинансировавшему издание этой книги. Особенную признательность и благодарность автор выражает Евгению Александровичу Ивину за его наставничество и значительный вклад в разработку методологической базы данного курса.

Глава 1.

Элементы теории множеств

1. Математический анализ. Кванторы

Определим, что входит в учебную дисциплину "математический анализ". Введем часто используемые математические значки, называемые кванторами, введем значки, используемые для различных математических операций и обозначений, а также приведем примеры их использования.

Под термином "математический анализ" прежде всего понимают дифференциальное и интегральное исчисление, заложенное Исааком Ньютоном (1642 — 1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646 — 1716) в XVII веке. Однако основы анализа сформировались намного раньше. Многие математические дисциплины, такие как ТФКП (теория функций комплексного переменного), дифференциальные уравнения, теория вероятности, математическая статистика, уравнения в частных про-

изводных, уравнения математической физики, вычислительная математика и многие другие имели начало в математическом анализе. По мере расширения математических методов они из составных частей математического анализа превратились в самостоятельные дисциплины.

В узком же смысле, как учебная дисциплина, математический анализ представляет собой составную и, пожалуй, большую долю той части математического знания, которая сейчас является общей для всех современных математических дисциплин. Фактически он является фундаментом математических знаний.

Датой рождения математического анализа условно принимается май 1684 года, когда Готфрид Лейбниц (1646 — 1716) опубликовал свою работу "Новый метод максимумов и минимумов" ("Nova Methodus pro Maximis et Minimis"). В этой работе Лейбниц вводил понятие дифференциала и осуществлял его применение для нахождения экстремумов функций. Это был один из первых шагов к развитию дифференциального исчисления. Однако приоритет Лейбница, а не Исаака Ньютона (1642 — 1727) относительно открытия и развития математического анализа, а также точная дата рождения, до сих пор является предметом дискуссий среди историков математики [30].

Существенный вклад в развитие этой науки также внесли Якоб (1655 — 1705) и Иоганн (1667 — 1748) Бернулли, Гийом Франсуа Лопиталь (1661 — 1704), Леонард Эйлер (1707 — 1783), Огюстен Луи Коши (1789 — 1857), Брук Тейлор (1685 — 1731), Бернард Больцано (1781 — 1848), Жозеф Луи Лагранж (1736 — 1813), Карл Вейерштрасс (1815 — 1897), Колин Маклорен (1698 — 1746), Бернхард Риман (1826 — 1866) и многие другие выдающиеся математики. Фамилии этих ученых еще встретятся на страницах этой книги в названиях теорем, определений и

математических методов, а также в исторических справках.

Вместо часто употребляемых выражений введем общепринятые математические значки, называемые *кванторами*, а также значки, которые используются для различных операций со множествами и для сокращения записи:

$\in$ — "принадлежность" элемента некоторому множеству ($a \in A$);

$\notin$ — "непринадлежность" элемента некоторому множеству ($a \notin A$);

$\subset$ — "входит" одно множество в другое ($A \subset B$);

$\exists$ — "существует", и его называют *квантором существования*;

$\nexists$ — "не существует";

$\exists!$ — "существует строго один" или "существует единственный элемент", и его называют *квантором единственности*;

$\forall$ — "для всякого", "для любого", "для всех", и его называют *квантором всеобщности*;

$\Rightarrow$ — "справедливо", "следует", "имеет место", "верно";

$\Leftrightarrow$ — "равносильно", "эквивалентно", "тогда и только тогда";

: — "такой, что";

$\varnothing$ — "пустое множество";

$\cup$ — "объединение множеств";

$\cap$ — "пересечение множеств";

$\setminus$ — "разность множеств";

$\triangle$ — "симметрическая разность множеств";

$A = \{x : \text{"..."}\ \}$ — "множество А состоит из элементов x, для которых выполняется условие "...".

Приписывание квантора к формуле называется *связыванием*.

Также для сокращения записи начало доказательства будем обозначать словом *"Доказательство"*.

Пример. В качестве иллюстрации использования кванторов запишем несколько утверждений. Утверждение первое:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},\ \mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

Это утверждение можно записать на языке кванторов другим образом:

$$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{Z},\ \ a \in \mathbb{Q},\ \ a \in \mathbb{R};$$

$$\forall a \in \mathbb{Z}\ \ \Rightarrow a \in \mathbb{Q},\ \ a \in \mathbb{R};$$

$$\forall a \in \mathbb{Q}\ \ \Rightarrow a \in \mathbb{R};$$

$$\forall a \in \mathbb{I}\ \ \Rightarrow a \in \mathbb{R}.$$

Утверждение о существовании обратного элемента можно записать следующим образом:

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \exists!\ b \in \mathbb{Z}:\ \ b = -a.$$

Замечание. В литературе вместо $a \in A$ можно встретить $A \ni a$. В случае непринадлежности также можно встретить $A \not\ni a$.

Историческая справка. Кванторы позволяют математикам общаться на "языке математики", который точно и однозначно передает смысл утверждений и методов решения задач.

Русское "квантор" происходит от лат. "quantum", означающего "сколько". Формализация кванторно-логических конструкций произошла в 1879 году в книге немецкого математика Готлоба Фреге (1848 — 1925) "Запись в понятиях" ("Begriffsschrift und andere Aufsätze"). Обозначения Фреге имели вид громоздких графических конструкций и не были приняты.

Термин "квантор" ввел американский математик Чарльз Сандерс Пирс (1839 — 1914) в 1885 году. Впоследствии было

предложено множество более удачных символов, но общепринятыми стали обозначения "$\exists$" для квантора существования (перевернутая первая буква англ. "Exists" — "существует"), который итальянский математик Джузеппе Пеано (1858 — 1932) использовал в томе II, номер 1, его "Formulaire de mathematicus", который был опубликован в 1897 году, и "$\forall$" для квантора общности (нем. "Alle" — "все", "всякий"), образованный немецким математиком Герхардом Генценом (1909 — 1945) и использованное в работе "Untersuchungen ueber das logische Schliessen" в 1935 году. Символы $\cup$ и $\cap$ были использованы Джузеппе Пеано (1858 — 1932) для пересечения и объединения в 1888 году в "Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann." Американский математик Пол Ричард Халмош (1916 — 2006) ввел символ, который иногда выглядит как $\square$ и используется для обозначения конца доказательства. Чаще всего его называют "надгробным камнем". О введении многих других обозначений в математике можно узнать в [26].

Первоначально, например, в "Началах" древнегреческого математика Евклида (323 — 265 г. до н.э.) математические утверждения формулировались словесно. Такая запись была громоздкой, часто неоднозначной, а алгебраические преобразования требовали незаурядной квалификации. Большой вклад в развитие обозначений внес Франсуа Виет (1540 — 1603), в частности, он начал использовать буквенные обозначения вместо конкретных чисел. Постепенно практически все слова в математических формулах (обозначения операций, отношений сравнения и т. д.) были заменены специальными символами. Математика обрела собственный язык, не требующий перевода, язык с четко определенным смыслом "слов" и строгой грамматикой, позволяющий выводить из данных истинных утверждений другие истинные.

Хорошо продуманные обозначения, отражающие свойства изучаемых объектов, помогают избежать ошибок или неправильной трактовки, облегчая правильную интерпретацию математических доказательств и теорий. Также продуманные обозначения переносят часть исследования на технический уровень, нередко "подсказывают" правильный путь к решению задачи. Удачное обозначение освобождает голову от ненужной работы, тем самым позволяя сосредоточиться на более важных задачах.

2. Операции со множествами

Введем понятие множества, понятие числовых множеств и операции со множествами, а также запишем свойства этих операций.

Перейдем к основам теории множеств — разделу математики, посвященному общим свойствам множеств. Несмотря на парадоксы, связанные с основами теории, она остается ключевым разделом математики.

Определение 2.1. *Множество* — это совокупность элементов, объединенных общим свойством.

Примерами множеств являются числовые множества (натуральные числа, целые числа, рациональные числа и действительные числа), множества объектов живой или неживой природы, например множество студентов, множество парт, стульев и т.д.

Существует ряд понятий в математике, которые нельзя строго определить, например точка, прямая, плоскость, пространство. К таким понятиям относится и понятие множества. На первый взгляд, данное выше определение множества никуда не

годится, потому что оно введено через несколько понятий, которые никак до этого не были определены. Однако это совсем не так. Дело в том, что назначение определений — это вовсе не наведение логической строгости как таковой. Устанавливать логическую строгость требуется только там, где нестрогое введение понятия приводит к недоразумениям.

А как понять, что приведет к недоразумениям, а что нет? У современной математики есть только три средства: логический анализ, практика и интуиция.

Существуют два типа определений: 1) логически строгое сведение определяемого объекта к уже введенным понятиям; 2) описательное определение с помощью слов разговорного языка.

Определение множества есть определение второго типа. В математике предпочтительнее определения первого типа, но начальные понятия, к которым относится понятие множества, приходится вводить описательно. Это приводит к противоречиям с точки зрения логики, к так называемым парадоксам теории множеств. Однако иного подхода не найдено.

Определение 2.2. Объекты, образующие в своей совокупности данное множество, называются *элементами* или *точками.*

Замечание. Элементы множества перечисляются в фигурных скобках, например, $A = \{a, b, c, d, e\}$ или $B = \{1, 4, -3, 2\}$. Обычно множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а элементы множества обозначают строчными буквами.

Определение 2.3. *Числовым множеством* называется множество, содержащее только числа.

Будем рассматривать только числовые множества. Перечислим известные числовые множества:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ — множество *натуральных чисел*, состоящее из чисел, используемых при естественной нумерации;

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$ — множество *целых чисел*, состоящее из нуля, натуральных чисел и натуральных чисел, взятых со знаком минус;

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N} \right\}$ — множество *рациональных чисел*, состоящее из чисел, представимых в виде обыкновенной дроби;

$\mathbb{I} = \left\{ \text{не } \dfrac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N} \right\}$ — множество *иррациональных чисел*, состоящее из чисел, не представимых в виде обыкновенной дроби;

$\mathbb{R}$ — множество *действительных* или *вещественных чисел*, состоящее из множества рациональных и иррациональных чисел.

Каждому действительному числу соответствует точка на действительной прямой, которая также обозначается буквой $\mathbb{R}$, и наоборот, каждой точке действительной прямой соответствует действительное число.

Определение 2.4. Два множества A и B называются *равными* (обозначается как $A = B$ или $B = A$), если они состоят из одних и тех же элементов. На языке кванторов это записывается в следующем виде:

$$A = B \Leftrightarrow \forall\, a \in A \Rightarrow a \in B \ \ и \ \ \forall\, b \in B \Rightarrow b \in A.$$

Определение 2.5. Множество B называют *подмножеством* A (обозначается как $B \subset A$), если каждый элемент B принадлежит множеству A. На языке кванторов это определение выглядит так:

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Утверждение 2.1. *Если $A \subset B$ и $B \subset A \Rightarrow$ множества равны, то есть $A = B$.*

Доказательство. От противного. Допустим, что $A \subset B$ и $B \subset A$, но $A \neq B$, и придем к противоречию, которое будет означать, верность $A = B$. Если $A \neq B$, то либо существует элемент $a \in A$, не принадлежащий B, либо существует элемент $b \in B$, не принадлежащий A. Однако из $A \subset B$ и $B \subset A$ следует, что либо $a \in B$, либо $b \in A$, что приводит к противоречию с предположением $A \neq B$. Следовательно, $A = B$. $\square$

Определение 2.6. *Пустым множеством* называется множество, которое не содержит ни одного элемента.

Введем операции над множествами.

Определение 2.7. (*Объединение множеств*). Множество C называется *объединением* двух множеств A и B (обозначается как $C = A \cup B$), если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. На языке кванторов определение примет вид:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Определение 2.8. (*Пересечение множеств*). Множество C называется *пересечением* двух множеств A и B (обозначается $C = A \cap B$), если оно состоит из тех и только тех элементов, которые одновременно принадлежат и A, и B. На языке кванторов определение примет вид:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Свойства объединения:
1. $B \cup A = A \cup B$ *(коммутативность)*;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(ассоциативность)*.

Свойства пересечения:

1. $B \cap A = A \cap B$ *(коммутативность)*;
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(ассоциативность)*.

Определение 2.9. (*Разность множеств*). Множество C называется *разностью* двух множеств A и B (обозначается как $C = A \setminus B$), если оно состоит из тех элементов, которые есть в A, но нет в B, то есть из множества A нужно убрать все элементы, принадлежащие множеству B. На языке кванторов определение примет вид:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Определение 2.10. (*Симметрическая разность множеств*). Множество C называется *симметрической разностью* двух множеств A и B (обозначается как $C = A \triangle B$), если $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. На языке кванторов определение примет вид:

$$A \triangle B = \{x : x \in (A \cup B) \text{ и } x \notin (A \cap B)\}.$$

Определение 2.11. Множество E называется *универсальным множеством*, если любое другое множество является его подмножеством, то есть $\forall A \Rightarrow A \subset E$.

Определение 2.12. (*Дополнение*). Множество A' называется *дополнением* A или *дополнением до* E *множества* A, если $A' = E \setminus A$.

Введем обозначение объединения и пересечения бесконечного или конечного (в случае, когда все множества, начиная с A_{k+1}, являются пустыми) наборов множеств:

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup ...;$$

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap ...$$

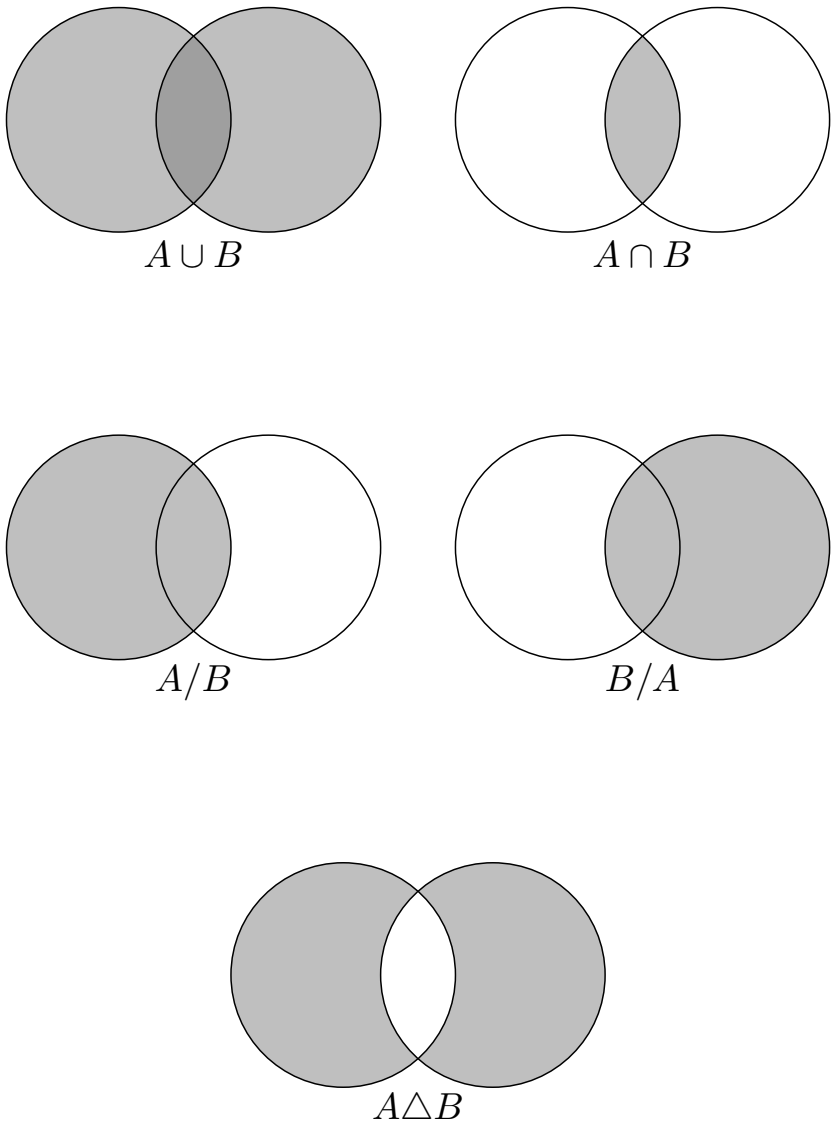

Рис. 1.1. Операции над множествами

Свойства операций над множествами

1. $A \subset A$;
2. $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;
3. $A \subset B, B \subset C \ \Rightarrow A \subset C$;
4. $\varnothing \ \subset A, \forall A \subset E$;

5. $(\bigcup\limits_n A_n) \cap B = \bigcup\limits_n (A_n \cap B)$;
6. $(\bigcap\limits_n A_n) \cup B = \bigcap\limits_n (A_n \cup B)$;
7. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$;
8. $A \cup A' = E, \;\; A \cap A' = \varnothing$;
9. $\varnothing' = E, \;\; E' = \varnothing$;
10. $(\bigcup\limits_n A_n)' = \bigcap\limits_n A'_n$;
11. $(\bigcap\limits_n A_n)' = \bigcup\limits_n A'_n$;
12. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Историческая справка. Множества, в том числе и бесконечные, в том или ином виде уже встречались в Древней Греции, например в виде включенности числовых множеств: натуральных, целых, рациональных, четных, нечетных, простых чисел. Теория множеств, возникшая во второй половине XIX века благодаря работам немецких математиков Георга Кантора (1845 — 1918) и Рихарда Дедекинда (1831 — 1916), посвящена изучению общих свойств множеств. Она получила такое название из-за того, что в конце XIX века — начале XX века теория столкнулась со значительными сложностями в виде возникающих парадоксов. Несмотря на возникающие парадоксы, связанные с ее основами, она остается ключевым разделом математики [31, 32].

3. Отображение. Типы отображений

Определим следующие понятия: декартовое произведение, отображение и функция. Затем определим типы отображений и введем обратное отображение.

Определение 3.1. *Декартово* или *прямое произведение* множеств A и B (обозначается как $A \times B$) определяется как мно-

жество всех возможных пар (x, y), где x принадлежит A, а y принадлежит B.

На языке кванторов определение записывается следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$, а $B = \{3, 4, 5\}$. Тогда $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$.

Пример. Координатная плоскость, также называемая *декартовой плоскостью*, является декартовым произведением двух множеств действительных чисел, обозначаемым как $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Историческая справка. Предполагается, что впервые понятие "декартовое произведение" ввел немецкий математик Георг Кантор (1845 — 1918) и назвал в честь французского математика Рене Декарта (1596 — 1650). В своей работе "Геометрия" [16], изданной в 1637 году, Рене Декарт ввел понятие координат на плоскости — упорядоченных пар чисел (x, y), задающих положение точки. Эта идея и послужила прообразом общего понятия декартового произведения.

Определение 3.2. *Отображением* множества A в множество B называется подмножество F декартового произведения $A \times B$, для которого верно условие: $\forall x \in A \ \exists!$ пара $(x, y) \in F$, то есть для любого элемента x из A существует единственная пара (x, y) из F. Обозначает как $F : A \longrightarrow B$.

Определение означает, что если у нас есть отображение одного множества в другое, то в первом множестве нет элементов, для которых не существовало бы пары $(x, y) \in F$, причем для каждого x не может быть двух пар.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Тогда подмножество $F = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3)\}$ множества $A \times B$ является отоб-

ражением, а подмножество $K = \{(1,3),(2,5),(3,3),(3,4)\}$ не является отображением, так как для элемента 3 из A есть две пары.

Определение 3.3. *Функцией* F называют правило, закон или соответствие, по которому каждому элементу $x \in A$ ставится в соответствие ровно один элемент $y \in B$. Записывает как $y = F(x)$.

Пример. Если $y = x^2$, то каждому x ставится в соответствие x^2.

Историческая справка. Термин "функция" в некотором более узком смысле был впервые использован в 1692 году Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646 — 1716). А Иоганн Бернулли (1667 — 1748) в письме к Лейбницу придал этому термину смысл более близкий к современному [17].

Рассмотрим типы отображений.

Определение 3.4. Отображение $F : A \longrightarrow B$ называется *сюръективным или сюръекцией*, если $\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A$, что $(x,y) \in F$, то есть у каждого элемента $y \in B$ существует $x \in A$, так что они образуют пару (x,y) из F.

Сюръективное отображение означает, что для всех элементов второго множества $y \in B$ есть пара $(x,y) \in F$.

Пример. Пусть $A = \{1,2,3\}$, а $B = \{3,4\}$. Тогда отображение $F = \{(1,3),(2,3),(3,4)\}$ является сюръективным, а $K = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$ не является сюръекцией.

Определение 3.5. Отображение $F : A \longrightarrow B$ называется *инъективным или инъекцией*, если $\forall x_1$ и $x_2 \in A$, таких, что если $x_1 \neq x_2$, то $y_1 \neq y_2$, при условии что (x_1,y_1) и $(x_2,y_2) \in F$.

Инъективное отображение означает, что несколько элементов множества A не могут быть отображены в один и тот же элемент множества B.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Отображение $F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ является инъективным, а отображение $K = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ — не инъективным.

Определение 3.6. Отображение $F : A \longrightarrow B$ называется *биективным, биекцией или взаимно-однозначным соответствием*, если оно сюръективное и инъективное одновременно.

Биекция означает, что для любого элемента первого множества существует единственный элемент из второго, с которым он образует пару, и для любого элемента второго множества существует единственный элемент из первого, с которым он в паре.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{3, 4, 5\}$. То отображение $F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ является биективным, а отображение $K = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ не является биекцией.

Определение 3.7. Пусть отображение $F : A \longrightarrow B$ является биективным. Назовем *обратным отображением* к F отображение F^{-1} (записывается как $F^{-1} : B \longrightarrow A$), заданное по правилу: вместо пар (x, y) в декартовом произведении $A \times B$ надо рассмотреть соответствующие пары (y, x) из $B \times A$, поменяв x и y местами.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{3, 4, 5\}$. Зададим биективное отображение следующим образом: $F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$. Тогда $F^{-1} = \{(3, 1),\ (4, 2), (5, 3)\}$.

4. Эквивалентные множества

Определим понятие эквивалентности множеств, запишем их свойства, определим счетные и несчетные множества, и приведем примеры счетных и несчетных множеств.

Определение 4.1. Множества A и B называются *эквивалентными* или *равномощными* (обозначается как $A \sim B$), если между ними можно установить биективное отображение. Это означает, что каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, и наоборот.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ и $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Зададим биективное отображение $F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$. Значит, A и B равномощны ($A \sim B$). В то же время множества A и C не равномощны, так как не существует биективного отображения между A и C из-за различного количества элементов.

Утверждение 4.1. *Два конечных множества (множества с конечным количеством элементов) равномощны, если и только если количество элементов в обоих множествах одинаково.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного: если количество элементов в двух множествах не совпадает, значит, при построении отображения либо два элемента первого множества будут соответствовать одному элементу из второго, либо будет существовать элемент из второго множества, которому не будет соответствовать ни один элемент из первого множества. □

Свойства эквивалентных множеств

1. $\forall A \Rightarrow A \sim A$ *(рефлексивность)*;
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ *(коммутативность)*;
3. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ *(ассоциативность)*.

Определение 4.2. Множество A называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел ($A \sim \mathbb{N}$).

Пример. Множество натуральных чисел является счетным ($\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$) по первому свойству эквивалентных множеств.

Утверждение 4.2. *Множество целых чисел счетно ($\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$).*

Доказательство. Построим биективное отображение между множествами натуральных и целых чисел следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \dots \end{array}$$

Отображение построено по правилу: 1 соответствует 0, четные натуральные соответствуют целым положительным, а нечетные, кроме 1, соответствуют целым отрицательным. Это отображение сюръективно и инъективно, следовательно, биективно. □

Утверждение 4.3. *Множество рациональных чисел счетно ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$).*

Определение 4.3. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчётным.*

Утверждение 4.4. *(Теорема Кантора). Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчётно.*

Последние два утверждения приведены без доказательства.

Историческая справка. Зачатки идеи о равномощности множеств встречаются у итальянского математика Галилео Галилея (1564 — 1642). Первое представление об эквивалентности

бесконечных множеств относится к работам немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777 — 1855) начала 1800-х годов, опубликованных в его "Арифметических исследованиях". Более отчетливое представление о бесконечных множествах проявилось в работах немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805 — 1859) в курсе лекций 1856—1857 годов, построенных на основе гауссовых "Арифметических исследований". В работах французского математика Эвариста Галуа (1811 — 1832), немецкого математика Бернхарда Римана (1826 — 1866) и французского математика Жозефа Альфреда Серре (1819 — 1885) также намечаются элементы теоретико-множественного подхода, которые обобщил немецкий математик Рихард Дедекинд (1831 — 1916) в 1857 году. Отдельные понятия теории множеств можно встретить в трудах по проективной геометрии швейцарского математика Якоба Штейнера (1796 — 1863) и немецкого математика Карла Георга Христиана фон Штаудта (1798 — 1867). Наиболее близкие представления к наивной теории Кантора содержатся в трудах чешского математика Бернард Больцано (1781 — 1848) в работе "Парадоксы бесконечности", опубликованной в 1851 году после смерти автора. В этой работе явно определено понятие взаимно-однозначного соответствия. Теории вещественного числа немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815 — 1897) и французского математика Шарля Мерэ (1835 — 1911), созданная в конце 1850-х и опубликованная в начале 1860-х, во многом перекликаются с идеями наивной теории множеств. Более подробно история теории множеств изложена в [10-14].

5. Задачи для закрепления материала

1. Прочитайте следующие утверждения, используя язык кванторов:

а) $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0$;

б) $\forall\, a \in \mathbb{N}\ \exists\, b \in \mathbb{N} : a < b$;

в) $\forall\, a \in \mathbb{N}\ \exists!\, b \in \mathbb{R} : b = a/2$;

г) $\forall\, a > 0, a \in \mathbb{R}\ \exists\, b \in \mathbb{R} : a \cdot b < 0$.

2. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$ для множеств: $A = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n$ - четное, $0 \leq n \leq 10\}$ и $B = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n$ делится на 3, $1 \leq n \leq 11\}$.

3. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$ для подмножеств координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

а) $A = \{(x, y) \ : \ x \leq y\}$ и $B = \{(x, y) \ : \ x \geq y - 2\}$;

б) $A = \{(x, y) \ : \ x^2 \leq y\}$ и $B = \{(x, y) \ : \ y \leq 4\}$.

4. Исследовать на верность равенства и привести контрпример, если равенство неверно.

а) $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

б) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

5. Верно ли утверждение, что $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \triangle B = B \setminus A$? Если не верно, привести контрпример.

6. Доказать равенство мощностей множеств:

а) $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

б) $(1, 2)$ и $(-\infty, +\infty)$;

в) $[2, 3)$ и $(-\infty, 0]$.

7. Изобразить на координатной плоскости декартовое произведение:

а) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

б) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

в) $\{1, 2, 3\} \times \mathbb{R}$.

8. Построить примеры отображения для двух множеств, каждое из которых содержит четыре элемента:

а) сюръективное, но не инъективное;

б) инъективное, но не сюръективное;

в) инъективное, но не биективное.

Глава 2.

Комплексные числа

1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1.1. *Мнимой единицей*, обозначаемой как i, назовем число, для которого выполнено $i^2 = -1$. Это определение вводит понятие числа, равного $\sqrt{-1}$.

Взаимодействие числа i с действительными числами состоит в том, что можно умножать i на любые действительные числа, то есть появляются числа вида iy, где $y \in \mathbb{R}$, а также складывать такие числа с действительными, что приводит к появлению чисел вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Определение 1.2. Числа вида $z = x + iy$ называются *комплексными числами*, где x называется *действительной частью*, y — *мнимой частью* комплексного числа, а i — мнимая единица.

Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$. Действительную и мнимую часть комплексного числа обозначают: $x = Re(z)$, $y = Im(z)$ от латинского *realis* — вещественный и *imaginarius* — мнимый. Запись комплексного числа в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой.* Есть еще две формы записи комплексного числа: тригонометрическая и показательная. Позже познакомимся только с тригонометрической формой.

Пример. $z = 3 + 5i, z = -4i, z = 8.$

Заметим, что действительные числа являются подмножеством комплексных чисел ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), так как их можно представить в виде $x = x + i \cdot 0$, то есть действительные числа — это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Записывать мнимую часть можно перед мнимой единицей или после: $3 + i \cdot 4 = 3 + 4i$.

Замечание. Степени числа i.

$$i^1 = i, \;\; i^2 = -1, \;\; i^3 = -i, \;\; i^4 = 1.$$

Далее значения повторяются по следующей формуле:

$$i^{4n+1} = i, \;\; i^{4n+2} = -1, \;\; i^{4n+3} = -i, \;\; i^{4n+4} = 1, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Определим операции сложения, вычитания, умножения, комплексного сопряжения и деления для множества комплексных чисел.

Определение 1.3. *Суммой* и *разностью* двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ назовем следующие числа:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \;\; w = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Пример.

$$z_1 = 3 + 4i, z_2 = 5 - 6i \Rightarrow z_1 + z_2 = (3 + 5) + i(4 - 6) = 8 - 2i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 5) + i(4 + 6) = -2 + 10i.$$

Определение 1.4. *Произведением* двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ назовем число:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 =$$

и, применяя свойство $i^2 = -1$, получим

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Пример. $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 5 - 6i,$

$$z_1 \cdot z_2 = (15 + 24) + i(-18 + 20) = 39 + 2i.$$

Определение 1.5. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ назовем равными в том и только в том случае, когда у них одновременно равны действительные и мнимые части, то есть $x_1 = x_2, \ \ y_1 = y_2$.

Определение 1.6. *Сопряженным числом* к числу $z = x + iy$ назовем число $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Утверждение 1.1. *Произведение комплексного числа и его сопряженного есть действительное число, равного сумме квадратов действительной и мнимой части этих чисел, то есть, если $z = x + iy$, то*

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2.$$

Доказательство.

$$z = x + iy, \overline{z} = x - iy \Rightarrow z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) =$$

$$= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

$\square$

Перейдем к делению комплексных чисел. Используем утверждение, доказанное выше. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Домножим числитель и знаменатель на число, комплексно-сопряженное к знаменателю, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Первая дробь является действительной частью комплексного числа, полученного в результате деления, а вторая дробь — мнимой частью.

Пример.

$$\frac{3 + 4i}{2 + 3i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} = \frac{6 - 9i + 8i - 12i^2}{2^2 + 3^2} =$$

$$= \frac{18 - i}{13} = \frac{18}{13} - i\frac{1}{13}$$

Определены операции сложения, вычитания, умножения, сопряжения и деления для множества комплексных чисел.

История открытия комплексных чисел достаточно интересна, поэтому остановимся на ней поподробнее.

Историческая справка. История комплексных чисел начинается с итальянского математика Сципиона дель Ферро (1465 — 1526), который нашел способ решения кубических уравнений вида $x^3 + ax = b$ при $a, b > 0$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Этот метод он не опубликовал, но сообщил своему зятю и преемнику по кафедре в Болонском университете Аннибалу делла Наве и ученику Антонио Марио Фиоре. После смерти учителя последний решил

воспользоваться доверенной ему тайной, чтобы стать непобедимым в поединках по решению математических задач, которые были тогда распространены. 12 февраля 1535 года его жертвой едва не стал Никколо Тарталья (1499 — 1557). Тартилья обнаружил, что все 30 задач поединка Фиоре содержат уравнения $x^3 + ax = b, a, b > 0$ при разных a и b. Перспектива угощать парадным обедом друзей Фиоре в количестве, равном числу задач, решенных победителем (таковы были правила), не привлекала Тарталью. За восемь дней до назначенного срока он находит желанный способ. За два часа Тарталья решил все задачи. Его противник не решил ни одной.

Позже Тарталья отвергает несколько просьб раскрыть его способ решения кубических уравнений. В 1539 году миланский математик Джероламо Кардано (1501 — 1576) обращается к Тарталье с просьбой раскрыть ему свой метод, и после некоторого сопротивления Тарталья соглашается, но просит Кардано ни с кем не делиться этой информацией, пока он сам ее не опубликует. В течение следующих нескольких лет Кардано работал над тем, как распространить формулу Тартальи на другие типы кубических уравнений. Поскольку Тарталья не предпринял никаких усилий по публикации своего метода и, кроме того, обнаружился приоритет дель Ферро, Кардано счел себя свободным от обязательств и опубликовал собственный труд в 1545 году под названием "Ars Magna" [18], указав при этом на авторство Тартальи и дель Ферро. Тем не менее исторически за этим алгоритмом закрепилось название "формулы Кардано" [19].

Кубическое уравнение имеет три корня, из которых все могут быть действительными или только один. В последнем случае решение допускает два комплексных корня. В "Ars Magna" содержится первое появление в математике комплексных чисел, которым Кардано дал название — "vere sophistica", что пример-

но означает "заумные".

Первые формальные правила арифметики комплексных чисел были изложены в "Алгебра" Рафаэля Бомбелли (1526 — 1572), изданной в 1572 году, и в трактате 1629 года Альбера Жирара (1595 — 1632) "Новое открытие в алгебре" [20].

Термин "мнимые числа" ввел в 1637 году Рене Декарт (1596 — 1650), а в 1777 году Леонард Эйлер (1707 — 1783) предложил использовать первую букву латинского слова *imaginarius* для обозначения $\sqrt{-1}$. Термин "комплексные числа" был введен в 1831 году Карлом Фридрихом Гауссом (1777 — 1855) [33].

2. Полярные координаты

Перед тем как перейти к тригонометрической форме и геометрической интерпретации комплексного числа, познакомимся с полярной системой координат и докажем эквивалентность множества комплексных чисел и точек декартовой плоскости.

Вспомним, как вводится декартова система координат. На плоскости возьмем точку O за начало координат и проведем две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy через эту точку. Определим единицу масштаба. В этой системе координат любая точка M на этой плоскости может быть задана двумя числами: координатами x_0 и y_0, которые записываются как $M(x_0, y_0)$ (рис. 2.1).

Теперь введем полярную систему координат. Возьмем произвольную точку O как полюс полярной системы координат, а луч Ox как полярную ось. Определим единицу масштаба и зададим положение любой точки M на этой плоскости, не совпадающее с полюсом, через радиус-вектор $\overline{OM}$. За $r = |\overline{OM}|$ обозначают расстояние от полюса O до точки M, а φ — угол между осью Ox и вектором $\overline{OM}$. Расстояние r называют *полярным радиу-*

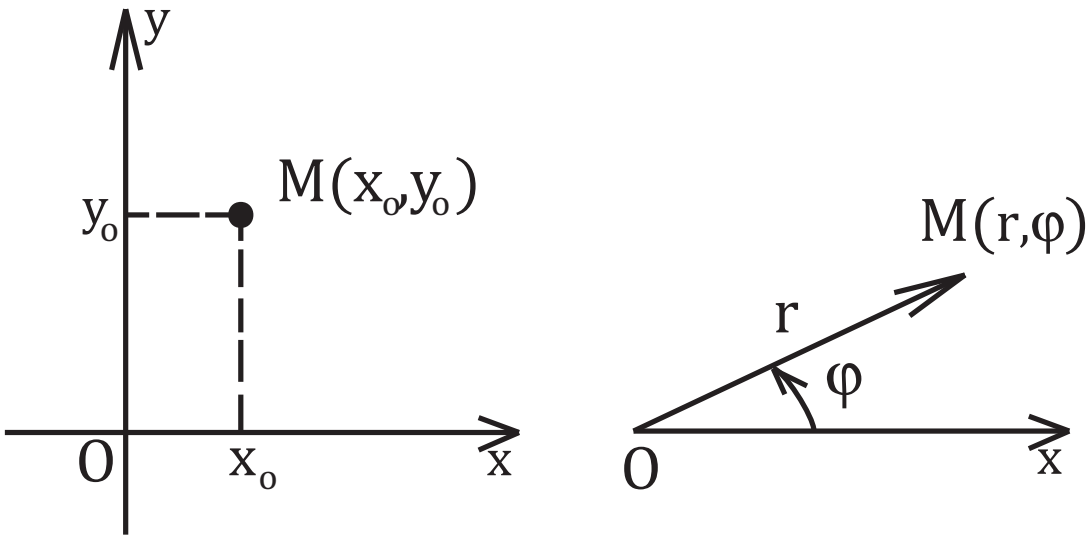

Рис. 2.1. Декартовая и полярная системы координат

сом точки M, а угол φ — *полярным углом*. Полярный радиус и полярный угол точки M называются ее *полярными координатами* и записываются $M(r, \varphi)$ (рис. 2.1).

Полярные координаты ограничены следующими условиями:

$$r \geq 0, \;\; 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Каждой точке плоскости соответствует уникальная пара (r, φ), кроме полюса, где $r = 0$, а угол φ не определен. И наоборот, числа r и φ задают положение единственной точки на плоскости.

Если совместить начало декартовой системы координат O и полюс O, а ось Ox с полярной осью Ox (рис. 2.1), то между полярными координатами и декартовыми координатами каждой точки M устанавливается прямая и обратная связь:

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi,$$

и

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \;\; \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

с учетом четверти, в которой находится точка. Также полярный угол можно определить из соотношений:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \;\; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Пример. Рассмотрим точку с координатами $(1, \sqrt{3})$. Вычислим ее полярные координаты.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \;\; \varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Угол также можно определить из соотношений:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}, \;\; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Пример. Найдем декартовы координаты (x, y) точки, имеющей в полярной системе координаты $(r, \varphi) = (2, \frac{2\pi}{3})$.

$$x = r\cdot\cos\varphi = 2\cdot\cos(\frac{2\pi}{3}) = 2\cdot(-\frac{1}{2}) = -1,$$

$$y = r\cdot\sin\varphi = 2\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}) = 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}.$$

Теорема 2.1. *Множество комплексных чисел и множество точек декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ эквивалентны (равномощны).*

Доказательство. Перед тем как приступить к доказательству теоремы, введем понятие комплексной плоскости.

Определение 2.1. Рассмотрим комплексное число $z = a+ib$. В декартовой системе координат значение действительной части комплексного числа a отложим на оси Ox, а значение мнимой части b — на оси Oy. Так устроенная декартова плоскость $\mathbb{R}^2$ получила название *комплексной плоскости* и обозначается тем же символом $\mathbb{C}$, что и множество комплексных чисел.

Перейдем к доказательству теоремы. Построим взаимнооднозначное соответствие. Любому комплексному числу $z = a + ib$ соответствует точка на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b), и наоборот, каждой точке декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ соответствует комплексное число $z = a + ib$. Таким образом, установлено биективное отображение между множеством комплексных чисел и плоскостью $\mathbb{R}^2$, что и доказывает их эквивалентность. $\square$

Историческая справка. Первое четкое понимание взаимнооднозначного соответствия между комплексными числами и точками декартовой плоскости принадлежит Карлу Фридриху Гауссу (1777 — 1855). Однако идея подобного соответствия впервые возникла у Джона Валлиса (1616 — 1703), который изложил ее в 1685 году в своем труде "Трактат по алгебре". Но его идеи остались неясными и не оказали влияния на его современников [28].

3. Модуль и аргумент комплексного числа

Определим понятие модуля и аргумента комплексного числа и приведем пример их вычисления.

Из теоремы предыдущего параграфа следует, что для любого комплексного числа $z = x+iy$ существует точка на комплексной плоскости с координатами (x, y). Введем полярные координаты (r, φ) на этой плоскости.

Определение 3.1. *Модулем комплексного числа* $z = x+iy$ называется величина $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, равная длине радиус-вектора r, соединяющего начало координат с точкой на комплексной плоскости с координатами (x, y).

Из определения модуля следует, что $|z| \geq 0$, $|z| \in \mathbb{R}$, то есть модуль комплексного числа не может быть отрицательным и $|z| = |\overline{z}|$ и $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Если же $z = 0$, то $|z| = 0$ и наоборот.

Определение 3.2. *Аргументом комплексного числа* $z = x + iy \neq 0$ (x и y одновременно не равны 0) называют любой угол, отсчитываемый от положительного направлениия оси Ox до радиус-вектора r, идущего к точке z. Этот угол считается положительным, если отсчет производится против часовой стрелки, и отрицательным – по часовой стрелке. Для числа $z = 0$ аргумент не определен.

В отличие от модуля аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Найти модуль и аргумент комплексного числа $1 + i$.

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Этот угол можно взять аргументом комплексного числа. Но и угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, и любой из $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, могут быть взяты за аргумент комплексного числа.

Пример. Найти алгебраическую форму комплексного числа, если его модуль равен $|z| = 3$, а аргумент $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

$$x = |z| \cdot \cos\varphi = 3 \cdot \cos(\frac{3\pi}{2}) = 3 \cdot 0 = 0,$$

$$y = |z| \cdot \sin\varphi = 3 \cdot \sin(\frac{3\pi}{2}) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Соответственно, алгебраическая форма комплексного числа $0 - 3 \cdot i$.

4. Тригонометрическая форма. Формула Муавра

Определим тригонометрическую форму комплексного числа, докажем утверждение об умножении и делении комплексных чисел в тригонометрической форме, а затем докажем формулу Муавра возведения в степень комплексного числа.

Рассмотрим комплексное число $z = x + iy$. Для выражения этого числа через его модуль и аргумент умножим и разделим его на $\sqrt{x^2 + y^2}$, получим:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Заметим, что $\sqrt{x^2 + y^2}$ — это модуль комплексного числа, обозначаемый как $|z|$, а выражение в скобках соответстует косинусу и синусу аргумента комплексного числа, то есть $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Таким образом, комплексное число можно записать как:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такой вид называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Сопряженное число к z в тригонометрической форме выражается как:

$$\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Тригонометрическая форма удобна для выполнений операций умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел.

Утверждение 4.1. *(Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме). Пусть* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *и* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)$. *Тогда*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_2 + \varphi_2)\big),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big),$$

то есть при перемножении комлексных чисел в тригонометрической форме модули умножаются, а аргументы складываются, а при делении – модули делятся, а агрументы вычитаются.

Доказательство. Раскроем скобки в произведении $z_1 \cdot z_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 +$$

$$+ i\cos\varphi_2\sin\varphi_1 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 +$$

$$+ i \cdot (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big).$$

Применив формулы синуса и косинуса суммы углов

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_2\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\sin\varphi_2,$$

получим:

$$z_1z_2=|z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Доказали первую часть утверждения. Докажем формулу отношения комплексных чисел. Домножим числитель и знаменатель на сопряженное число к знаменателю.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}+$$

$$+\frac{i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}.$$

После применения формулы синуса и косинуса разности, а также основного тригонометрического тождества

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\cos\varphi_2\sin\varphi_1,$$

$$\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2=1$$

получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

$\square$

Сформулируем важное утверждение о геометрической интерпретации произведения и отношения двух комплексных чисел на комплексной плоскости.

Утверждение 4.2. *Даны* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \ +i\sin\varphi_1)$ *и* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Эти два числа представляют собой два радиус-вектора, проведенных из начала координат в соответствующие точки комплексной плоскости. Тогда произведению этих комплексных чисел соответствует радиус-вектору, длина которого равна произведению модулей* $|z_1|\cdot|z_2|$, *повернутого к положительному направлению оси* Ox *под углом* $\varphi_1 + \varphi_2$; *а отношение этих комплексных чисел соответствует радиус-вектору, длина которого равна отношению модулей* $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *повернутого к положительному направлению оси* Ox *под углом* $\varphi_1 - \varphi_2$.

Доказательство. Следует из утверждения, доказанного выше. □

Теорема 4.1. *(Формула Муавра возведения в степень). Пусть дано комплексное число* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Тогда*

$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)\big), n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Возвести комплексное число z в n-ую степень означает умножить это число n раз само на себя, а это значит, что по выше доказанному утверждению нужно n раз умножить модуль этого числа на самого себя, а аргумент этого числа сложить с самим собой n раз. В итоге получим:

$$z^n = \underbrace{|z|\cdot\ldots\cdot|z|}_{n}\big(\cos(\underbrace{\varphi+\ldots+\varphi}_{n}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\ldots+\varphi}_{n})\big) =$$

$$= |z|^n\big(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)\big).$$

$\square$

Историческая справка. Формула возведения в степень была открыта Абрахамом де Муавром (1667 — 1754), английским математиком французского происхождения, учеником и помощником Исаака Ньютона (1642 — 1727) [34].

5. Корень n-ой степени

Определим понятие корня n-ой степени из комплексного числа и докажем формулу Муавра извлечения корня n-ой степени.

Определение 5.1. Комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$ называется *корнем n-ой степени* из комплексного числа z, если оно является решением уравнения $z = w^n$.

Утверждение 5.1. *Для любого натурального $n > 1$ и любого комплексного числа $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, кроме $z = 0$, существует ровно n различных чисел w_k, таких что $w_k^n = z$ и*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,\, 1,\, 2, \dots, n-1$.

Замечание. На самом деле, первое значение k может быть взято произвольно, а после него берутся n идущих подряд целых чисел, например, $k = 1,\, 2, \dots, n$ или $k = -1,\, 0,\, 1, \dots, n-2$. Но общепринято брать $k = 0,\, 1,\, 2, \dots, n-1$.

Доказательство. Проверим, что w_k является решением уравнения $w_k^n = z$ для любого $k = 0,\, 1,\, 2, \dots, n-1$. Возведем w_k в n-ую степень с помощью формулы Муавра.

$$w_k^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(\sqrt[n]{|z|}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \cdot n\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \cdot n\right)\right) =$$

$$= |z|\big(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k)\big) = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

$\square$

Пример. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$.

Сначала найдем тригонометрическую форму комплексного числа $z = -1 + 0 \cdot i$.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \;\; \cos\varphi = -1, \;\; \sin\varphi = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \varphi = \pi.$$

Таким образом, $-1 = \cos\pi + i \sin\pi$. Исходя из утверждения, найдем:

$$w_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), \;\; k = 0,\, 1,\, 2,\, 3.$$

Получим все четыре корня четвертой степени из числа -1:

$$w_0 = \cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} =$$

$$= \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} =$$

$$= \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_3 = \cos\frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} =$$

$$= \cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Замечание. Комплексное число $\sqrt[4]{-1} \neq \sqrt[2]{i}$, так как с одной стороны, это четыре комплексных числа, а с другой стороны, всего лишь два.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}i}$.

Вычислим модуль и аргумент комплексного числа.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\cos\varphi = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \ \ \sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Получим $-2+2\sqrt{3}i = 4\big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\big)$. По вышедоказанному утверждению

$$w_k = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right), \ \ k = 0,\ 1,\ 2.$$

После подстановки вместо k чисел $0, 1, 2$, получим:

$$w_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right);$$

$$w_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 2}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Утверждение 5.2. *Корни n-ой степени из ненулевого комплексного числа являются вершинами правильного n-угольника.*

Доказательство. Из формулы n-ой степени из ненулевого комплексного числа видно, что аргумент корней отличается на одну и ту же величину, равную $\dfrac{2\pi}{n}$, а модули всех корней одинаковы и равны $\sqrt[n]{|z|}$. Значит, на комплексной плоскости все корни n-ой степени лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ на одинаковом расстоянии от соседних точек. А это означает, что корни n-ой степени из ненулевого комплексного числа являются вершинами правильного n-угольника. $\square$

6. Задачи для закрепления материала

1. Вычислить:
а) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;
б) $(2+i)^3+(2-i)^3$;
в) $(1+2i)^4+(1-2i)^4$.

2. Найти тригонометрическую форму комплексного числа:
а) $1+i$;
б) $1-i$;
в) $1-i\sqrt{3}$;
г) $-\sqrt{3}+i$.

3. Вычислить:
а)$(1+i\sqrt{3})^{150}$;
б)$(\sqrt{3}+i)^{30}$;

в) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

4. Найти произведение корней n-ой степени из -2:
а) $n=2$;
б) $n=3$;
в) $n=4$;
г) $n=6$.

5. Найти произведение корней 6-й степени из
а)2;
б)-3;
в)$8i$;
г)$-27i$.

6. Найти произведение корней 3-й степени из
а)-3;
б)$8i$;
в)$-27i$.

Глава 3.

Аксиоматика действительных чисел

1. Аксиомы действительных чисел

Рассмотрим числовые функции, значения которых располагаются на действительной оси, включая отрезки, интервалы, промежутки и другие подмножества. Это требует глубокого понимания вещественных чисел, выходящее за рамки школьной математики.

Напомним, что

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \ \ \mathbb{I} \subset \mathbb{R},$$

причем рациональные числа представляют собой обыкновенные дроби, тогда как числа, не являющиеся рациональными, классифицируются как иррациональные числа.

Вещественные числа являются абстрактными конструкциями, разработанными для практических нужд, таких как изме-

рение веса, площади, объема и длин и т. д.

Введем определения следующих множеств: отрезка, интервала, полуинтервала, открытого и замкнутого лучей.

Определение 1.1. (*Типы промежутков*).

1) *Интервалом* $M = (a, b)$ называется множество точек x, для которых $a < x < b$. На языке кванторов определение примет вид:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

2) *Полуинтервалом* $M = (a, b]$ или $M = [a, b)$ называется множество точек x, для которых $a < x \leq b$ или $a \leq x < b$;

3) *Отрезком* $M = [a, b]$ называется множество точек x, для которых $a \leq x \leq b$;

4) *Открытым лучом* $M = (-\infty, a)$ или $M = (a, +\infty)$ называется множество точек x, для которых $x < a$ или $x > a$;

5) *Замкнутым лучом* $M = (-\infty, a]$ или $M = [a, +\infty)$ называется множество точек x, для которых $x \leq a$ или $x \geq a$.

Измерение длины отрезка (относительно заранее заданного "эталонного" единичного отрезка) осуществляется с использованием бесконечных десятичных дробей.

Определение 1.2. (*Определение вещественного числа*). *Вещественное число* — это бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком "плюс" или "минус".

Замечание. Будем отождествлять вещественные числа и точки действительной прямой (оси). Множества вещественных чисел и множество точек действительной прямой обозначаются одной и той же буквой $\mathbb{R}$.

Свойства или аксиомы вещественных чисел

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем: если $a = b$, то $b = a$, или, если $a > b$, то $b < a$, или, если $a < b$, то $b > a$.

2) Если $a > b, b > c$, то $a > c$. Если $a = b, b = c$, то $a = c$.

3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ число $c \in \mathbb{R}$, такое, что $a + b = c$.

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ имеем $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем $a + b = b + a$.

6) $\exists!$ число $0 \in \mathbb{R}$ такое, что $a + 0 = 0 + a = a$.

7) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists!(-a) \in \mathbb{R}$ такое, что $a + (-a) = 0$.

8) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ число $c \in \mathbb{R}$, такое, что $ab = c$.

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ имеем $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

10) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем $a \cdot b = b \cdot a$.

11) $\exists!$ число 1 такое, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

12) $\forall a \neq 0$ $\exists!$ a^{-1} такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

13) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

14) Если $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

15) Если $a > b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$.

Указанные свойства вещественных чисел отражают количественные характеристики простейших математических объектов, таких как длины отрезков, площади прямоугольников и объемы прямоугольных параллелепипедов, а также изменения этих величин при различных преобразованиях.

Есть еще два важных свойства вещественных чисел: аксиома Архимеда и свойство полноты вещественных чисел.

16) (*Аксиома Архимеда*). $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha n \geq 1$.

Историческая справка. Основоположником математической теории вещественных чисел является французский математик

Шарль Мерэ (1835 — 1911). В 1869 году он опубликовал статью, в которой было впервые дано определение вещественного числа и впервые изложена математическая теория вещественных чисел. Несмотря на значимость, его идеи не были должным образом оценены современниками и никак не повлияли на развитие математики. Позже, независимо от него, к тем же идеям пришли Рихард Дедекинд (1831 — 1916) и Георг Кантор (1845 — 1918) [27].

2. Точная верхняя и нижняя грани

Для того чтобы сформулировать свойство полноты действительных чисел или 17-ую аксиому, введем несколько определений.

Определение 2.1. Непустое множество A на вещественной оси $\mathbb{R}$ называют *ограниченным сверху,* если существует число $b \in \mathbb{R}$, такое, что для всех $a \in A$ выполнено неравенство $a \leq b$ ($\exists\ b \in \mathbb{R} : \forall a \in A \Rightarrow a \leq b$). Число b называется *верхней гранью* множества A.

У множества, ограниченного сверху, существует бесконечно много верхних граней, например, b, $b+1, b+3,5$ и т.д.

Аналогичным образом определяется нижняя грань d и ограниченность снизу непустого множества A.

Определение 2.2. Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу,* если $\exists\ d \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A \Rightarrow d \leq a$. Число d называется *нижней гранью* множества A, которых, в свою очередь, бесконечно много.

Определение 2.3. Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным,* если $\exists\ b \geq 0, b \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A$ имеем $|a| \leq b$.

Утверждение 2.1. *Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ является ограниченным тогда и только тогда, когда оно является одновременно ограниченным сверху и снизу.*

Доказательство. **Необходимость** (утверждения в прямую сторону). Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено. Тогда по определению $\exists\ b \geq 0, b \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A$ имеем $|a| \leq b$. Возьмем в качестве верхней грани $c = |b|$, а в качестве нижней грани $d = -|b|$. Тогда множество A ограничено сверху и снизу. Доказали необходимость.

Достаточность (утверждение в обратную сторону). Пусть множество ограничено сверху и снизу, а d и c его нижняя и верхняя грани. Возьмем $b = max(|d|, |c|)$. Тогда $\forall x \in A$ имеем $|x| \leq b$. Достаточность доказана. $\square$

Утверждение 2.2. *Множество B всех верхних граней b непустого ограниченного сверху множества $A \subset \mathbb{R}$ является ограниченным снизу.*

Доказательство. Каждая верхняя грань $b \in B$ удовлетворяет неравенству $a \leq b$ при любом фиксированном $a \in A$. Это означает, что a есть нижняя грань для B, а значит, B ограничено снизу. $\square$

17). (*Аксиома полноты множества вещественных чисел* $\mathbb{R}$). Для всякого непустого ограниченного сверху множества A множество B его верхних граней b содержит минимальным элемент b', то есть $\exists!\ b' \in B$:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq b'$ (b' — верхняя грань множества A);

2) $\forall b \in B \Rightarrow b' \leq b$ (b' — минимальный элемент B).

Определение 2.4. Элемент b', удовлетворяющий свойствам 1) и 2), называется *точной верхней гранью* или *супремумом* множества A (обозначается как $\sup A$).

Пример. У множества действительных отрицательных чисел, то есть $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, точной верхней гранью является число 0.

Из аксиомы полноты множества вещественных чисел следует, что с множеством нижних граней D ограниченного снизу множества C дело обстоит точно так же, а именно:

Утверждение 2.3. $\exists!\ d' \in D$:

1) $\forall a \in C \Rightarrow d' \leq a$ *(d' — нижняя грань множества C);*

2) $\forall d \in D \Rightarrow d \leq d'$ *(d' — максимальный элемент D).*

Доказательство. Если взять $A = -C$ и $B = -D$, то для A и B верна аксиома полноты вещественных чисел. А значит, для C и D утверждение доказано. □

Определение 2.5. Элемент d', удовлетворяющий свойствам 1) и 2), называется *точной нижней гранью* или *инфинумом* множества A (обозначается как $\inf A$).

3. Модуль. Целая часть

Определение 3.1. *Модулем* или *абсолютной величиной* числа a является:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля: $|a|$ представляет собой расстояние от нуля до точки a на вещественной прямой.

Легко видеть, что

$$|a| = \max(-a, a), \quad |-a| = |a|$$

и справедливы неравенства

$$-a \leq |a|, \quad a \leq |a|, \ -|a| \leq a \leq |a|.$$

Утверждение 3.1. *(Неравенство треугольника): Для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *справедливо:*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Доказательство. Докажем утверждение для четырех случаях.

1. Если $a, b \geq 0$, то $|a + b| = |a| + |b|$.

2. Если $a, b \leq 0$, то $|a + b| = |a| + |b|$.

3. Если $a > 0, b < 0$, то $|a+b| < |a|+|b|$; например, $|3+(-2)| < |3| + |-2| = 3 + 2$.

4. Аналогично, если $a < 0, b > 0$, то $|a + b| < |a| + |b|$.

□

Введем операцию *извлечения целой части из вещественного числа,* обозначив ее $[a]$, а также операцию *изеления дробной части* из вещественного числа, обозначив ее $\{a\}$.

Определение 3.2. Если a — неотрицательное, то целой частью называется число до запятой, а если a — отрицательное, то $[a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a. Под дробной частью вещественного числа $\{a\}$ понимают число, которое стоит после запятой.

Пример. $[5,12] = 5$; $[0,22] = 0$; $[-0,8] = -1$; $[-5,12] = -6$.

Запишем утверждение, доказательство которого следует из определения.

Утверждение 3.2. $[a] \leq a$ *и* $[a] + 1 \geq a$ *или* $[a] \leq a \leq [a] + 1$.

Историческая справка. Термин "модуль" предложил английский математик Роджер Котсом (1682 — 1716), ученик Исаака Ньютона (1642 — 1727). Слово "модуль" происходит от латинского "modulus", что означает "мера". Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 — 1716) тоже использовал эту функцию, которую на-

зывал модулем и обозначал: "mol x". Общепринятое обозначение абсолютной величины было введено Карлом Вейерштрассом (1815 — 1897) в 1841 году. Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855) в 1808 году предложил использовать квадратные скобки $[x]$ для обозначения целой части числа [35, 36].

4. Метод математической индукции

Перед тем как перейти к методу математической индукции, докажем важное свойство натуральных чисел.

Утверждение 4.1. *В любом непустом подмножестве натуральных чисел существует наименьшее число.*

Доказательство. Утверждение следует из аксиомы полноты. Поскольку множество натуральных чисел ограничено снизу 1, то и любое его подмножество ограничено снизу. Следовательно, в каждом непустом подмножестве натуральных чисел найдется минимальный элемент. Докажем это. Возьмем какой-то элемент непустого подмножества натуральных чисел. Если он минимален, то свойство доказано. Если нет, то количество натуральных чисел, меньших его, конечно. Последовательно сравнивая числа, найдем требуемое наименьшее число. □

Введем и докажем верность метода математической индукции.

Теорема 4.1. *(Метод математической индукции). Для доказательства утверждения, верного для всех натуральных чисел n, начиная с 1, достаточно:*

1) **База индукции**. *Доказать утверждение для $n = 1$, подтверждая его истинность хотя бы для одного случая.*

2) **Предположение индукции**. *Предположить верность утверждения для некоторого* $n = k$, $k \geq 1$.

3) **Шаг индукции**. *Доказать, что из истинности утверждения для* $n = k$ *следует его истинность для* $n = k + 1$.

Замечание. Метод математической индукции похож на эффект домино: если первая фишка падает и каждая следующая может опрокинуть следующую за собой, то все фишки рухнут.

Доказательство. Доказательство теоремы осуществляется методом от противного: предположим, что утверждение неверно несмотря на соблюдение шагов 1) — 3). Если так, то среди n, для которых утверждение неверно, найдется наименьшее $n = m$. Так как $m \neq 1$ (шаг 1 верен), и предыдущее число $m - 1$ удовлетворяет утверждению (шаги 2 и 3), получаем противоречие с предположением о неверности утверждения для m. □

Замечание. Методом математической индукции можно доказывать утверждения, справедливые и при $\forall\, n \geq m$, где $m \geq 1$. В ходе доказательства надо заменить первый шаг (базу индукции) следующим образом: доказать утверждение при $n = m$, а все остальное оставить, как и прежде, при необходимости пользуясь тем, что $n \geq m$.

Пример. Докажем по индукции формулу:

$$2 + 5 + 8 + ... + (3 \cdot n - 1) = \frac{(3n + 1) \cdot n}{2}.$$

Замечание. Слева стоит сумма, зависящая от n. Последнее выражение в скобках — это формула каждого члена в сумме, а количество слагаемых равно n. При $n = 2$ утверждение выглядит следующим образом:

$$2 + 5 = \frac{(3 \cdot 2 + 1) \cdot 2}{2}.$$

При $n = 3$:

$$2 + 5 + 8 = \frac{(3 \cdot 3 + 1) \cdot 3}{2}.$$

И так далее.

Заметим также, что сумма слева для краткости записывается как $\sum\limits_{k=1}^{n} (3 \cdot k - 1)$.

1) Проверим базу индукции при $n = 1$:

$$2 = \frac{(3 \cdot 1 + 1) \cdot 1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Получим верное равенство, значит, база верна.

2) Предположим, что формула верна для какого-то произвольного, фиксированного $n = k$:

$$2 + 5 + 8 + ... + (3k - 1) = \frac{(3k + 1) \cdot k}{2}.$$

3) Предполагая истинность формулы для $n = k$, покажем, что она верна и для $n = k + 1$, то есть

$$2+5+8+...+(3k-1)+(3\cdot(k+1)-1) = \frac{(3(k+1)+1)\cdot(k+1)}{2}.$$

Упростим выражение слева, заметив, что сумма первых k членов по предположению индукции равна $\frac{(3k+1)\cdot k}{2}$, а в выражении справа раскроем скобки. Получим:

$$\frac{(3k+1)\cdot k}{2} + (3(k+1) - 1) = \frac{(3 \cdot k + 4) \cdot (k + 1)}{2}.$$

Последовательно раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$\frac{3k^2 + k}{2} + (3k + 2) = \frac{3 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 4 \cdot k + 4}{2},$$

$$\frac{3k^2 + 7 \cdot k + 4}{2} = \frac{3k^2 + 7 \cdot k + 4}{2}.$$

Слева и справа получили одинаковые выражения, значит, равенство верно для $n = k + 1$. Значит, используя метод математической индукции, доказана верность формулы для любого n.

Замечание. Существует второй вариант метода математической индукции, который также часто используется. Его отличие от первого варианта лишь в предположении индукции. Запишем утверждение без доказательства.

Утверждение 4.2. *(Метод математической индукции). Для справедливости любого утверждения, высказанного для всех натуральных $n \geq 1$, достаточно:*

1) **База индукции**. *Доказать это утверждение для $n = 1$.*

2) **Предположение индукции**. *Предположить справедливость утверждения при всех n от 1 до k, где $k \geq 1$ — произвольное* **фиксированное** *натуральное число.*

3) **Шаг индукции**. *Доказать, что из предположения индукции утверждение верно и при $n = k + 1$.*

С помощью метода математической индукции можно доказывать и неравенства. В качестве примера докажем неравенство Бернулли.

Утверждение 4.3. *(Неравенство Бернулли). $\forall\, x > -1,\ x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$ и $\forall\, n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:*

$$(1 + x)^n > 1 + x \cdot n.$$

Доказательство. 1) Проверим базу индукции при $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2 \cdot x + x^2 > 1 + 2 \cdot x,$$

так как при $x \neq 0$ выполняется $x^2 > 0$, а значит, база индукции проверена.

2) Предположим, что для номера $n = k$ утверждение верно, то есть:

$$(1+x)^k > 1 + kx, \;\; k \geq 2.$$

3) Докажем верность утверждения для $n = k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1) \cdot x.$$

Преобразуя выражение слева и воспользовавшись предположением индукции 2), получим

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) > (1+kx) \cdot (1+x) =$$

$$= 1 + (k+1)x + x^2 > 1 + (k+1) \cdot x.$$

$\square$

Историческая справка. Отдельные случаи применения метода математической индукции встречаются еще в античные времена у Прокла (412 — 485) и древнегреческого математика Эвклида (325 — 265 до н.э). Метод был выделен в отдельную категорию в 1321 году Львом Герсонидом (1288 — 1344), который использовал его для доказательства комбинаторных формул подсчета числа сочетаний, перестановок и размещений. Для их доказательства он применяет математическую индукцию и вплотную подходит к выделению индукции в отдельный метод, хотя окончательное оформление этого метода обычно приписывается Блезу Паскалю (1623 — 1662). Современное название метода дал Огастес де Морган (1806 — 1871) в 1838 году [35-37].

5. Бином Ньютона

Перед тем как перейти к формуле бинома Ньютона, определим понятие "эн-факториала" и введем биномиальные коэффициенты, также известные как число сочетаний из n по k.

Определение 5.1. *Эн-факториалом или* $n!$ для $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ называют величину, равную произведению n натуральных чисел от 1 до n в случае $n > 0$, в то время как $0!$ по соглашению равно 1, то есть

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k, \;\; 0! = 1.$$

Пример.

$0! = 1,$
$1! = 1,$
$2! = 2 \cdot 1,$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, ...$

Утверждение 5.1. *Связь между* $n!$ *и* $(n-1)!$ *выражается соотношением:*

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Верность утверждения следует непосредственно из определения $n!$.

Историческая справка. Факториалы были использованы в индийской математике в джайнских текстах (300 г. до н.э. — 400 г. н.э.) и в талмудическом тексте "Сефер Йецира" (200–500 гг. н.э.). Западные математики начали изучать факториалы с конца XV века, используя их в комбинаторике. Французский математик Луи Франсуа Антуан Арбогаст (1759 — 1803) ввел термин

"факториал" (фр. "factorielle") в 1800 году. Современное обозначение $n!$ предложил французский математик Кристиан Крамп (1760 — 1826) в 1808 году [21].

Определение 5.2. *Биномиальный коэффициент* C_n^k (читается как "це" из n по k) определяется как:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Замечание. Для биномиальных коэффициентов C_n^k также часто встречается иное обозначение — $\binom{k}{n}$. Существует специальный треугольник для определения биномиальных коэффициентов, который называют "Треугольником Паскаля". В нем на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое иное число в строке равно сумме двух расположенных над ним чисел.

Пример.

$$C_1^0 = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 1,$$
$$C_1^1 = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1,$$
$$C_2^1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2,$$
$$C_3^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3,$$
$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1,$$
$$C_n^n = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1.$$

Утверждение 5.2. *Сумма двух последовательных биномиальных коэффициентов равна следующему биномиальному коэффициенту с увеличенным нижним индексом:*

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Доказательство. Действительно,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{1}{n-k} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1+n}{(n-k)(k+1)}\right) =$$

$$= \frac{n+1!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

□

Теперь перейдем к формуле бинома Ньютона.

Теорема 5.1. *(Формула бинома Ньютона). Для любого натурального числа n и $n = 0$ справедлива формула:*

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

1) База индукции. Для $n = 1$ формула принимает вид:

$$(1+x)^1 = 1 + x,$$

поскольку $C_1^0 = C_1^1 = 1$.

2) Предположение индукции. Предположим верность формулы для некоторого фиксированного $n = m,\ \ m \in \mathbb{N}$, то есть верно

$$(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + ... + C_m^m x^m.$$

3) Шаг индукции. Докажем, что справедливость формулы для $n = m+1$:

$$(1+x)^{m+1} = C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 x + C_{m+1}^2 x^2 + ... + C_{m+1}^{m+1} x^{m+1}.$$

Запишем левую часть в виде:

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m \cdot (1+x).$$

Раскрыв скобки и применив свойство биномиальных коэффициентов

$$C_k^m + C_{k+1}^m = C_{k+1}^{m+1} \ \text{ и } \ C_m^0 = C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = C_{m+1}^0 = 1,$$

получим

$$(1+x)^m \cdot (1+x) = (C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + ... + C_m^m x^m) \cdot (1+x) =$$

$$= C_m^0 + C_m^1 x + ... + C_m^m x^m + C_m^0 x + C_m^1 x^2 + C_m^2 x^3 + ... + C_m^m x^{m+1} =$$

$$= C_m^0 + (C_m^1 + C_m^0)x + ... + (C_m^m + C_m^{m-1})x^m + C_m^m x^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 x + C_{m+1}^2 x^2 + ... + C_{m+1}^m x^m + C_{m+1}^{m+1} x^{m+1}.$$

$\square$

Историческая справка. Формула бинома Ньютона для натуральных показателей степени и соответствующий ей треугольник для определения коэффициентов традиционно приписывают Блезу Паскалю (1623 — 1662), который подробно описал их в XVII веке. Однако исследования показали, что эти знания

были известны задолго до Паскаля [22, 23]. Первое упоминание треугольной последовательности встречается в комментарии индийского математика Халаюдхи (X век н. э.) и в трудах другого математика, Пингалы (150 — 100 г. до н.э). Треугольник исследуется также известным персидским философом, математиком, астрономом и поэтом Омаром Хайямом (1048 — 1131). Поэтому в Иране эту схему называют треугольником Хайяма. Формула была известна исламским математикам Насиру ад-Дину Ат-Туси (1201 — 1274) и Гияс-ад-дину Джамшиду ибн Масуд аль-Каши (1380 — 1429). В середине XIV века Михаэль Штифель (1487 — 1567) систематизировал биномиальные коэффициенты и составил их таблицу до степени 18. Исаак Ньютон (1642 — 1727) обобщил формулу бинома Ньютона для произвольного показателя степени во второй половине XVII века. Позднее она была распространена и на комплексные числа [24].

6. Задачи для закрепления материала

1. Доказать по индукции:

а) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + ... + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$;

б) $1^2 + 2^2 + 3^3 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + ... + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

г) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$;

д) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + ... + (n+1)n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}$;

е) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

2. Доказать

а) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$;

б) $C_n^{k-1} + 2C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+2}^{k+1}$;
в) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$;
г) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$;
д) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$;
е) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
ж) $C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$;
з) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + ... + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$;
и) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Глава 4.

Последовательности

1. Числовые последовательности

Определение 1.1. *Числовой последовательностью* или *последовательностью* называется упорядоченное множество чисел, где каждому элементу присвоен уникальный порядковый номер.

Обозначается последовательность $a_1, a_2, a_3, ...$ или, коротко, $\{a_n\}$, где n — номер элемента в последовательности.

Замечание. В литературе числовую последовательность также определяют как функцию, заданную на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, то есть $\{a_n\} = f(n)$.

Действительно, существует два способа задать последовательность. Первый способ: через перечисление элементов с соответствующими индексами.

Пример.

8	-3	-2	5	-2	9	5	6	-8	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Второй способ: через функциональное выражение от натуральных чисел.

Пример. $\{a_n\} = \{a(n)\} = \{\dfrac{n}{n+1}\}$, то есть $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$, $a_3 = \dfrac{3}{4}$, ...

Пример. $\{a_n\} = \{1\}$, то есть $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, ...

Пример. $\{a_n\} = \{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\}$, то есть $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2} - 1$, $a_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, ...

Числовые последовательности можно складывать, вычитать, умножать и делить.

Определение 1.2. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности, то последовательность $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$ называется суммой двух последовательностей, элементы которой равны сумме элементов $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с одинаковыми номерами. По аналогии, последовательности $\{c_n\} = \{a_n - b_n\}$, $\{c_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ и $\{c_n\} = \{a_n/b_n\}$ при условии $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ называются соответственно разностью, произведением и частным двух числовых последовательностей.

2. Ограниченность

Определение 2.1. Последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует число $b \in \mathbb{R}$ такое, что выполняется $a_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 2.2. Последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что выполняется $a_n \geq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Теперь введем два определения ограниченности последовательности и докажем их эквивалентность.

Определение 2.3. (*Первое определение*). Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной,* если существует число $d \in \mathbb{R}$ и $d \geq 0$ такое, что выполняется $|a_n| \leq d \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 2.4. (*Второе определение*). Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной,* если существуют числа $b, c \in \mathbb{R}$ такие, что верно $c \leq a_n \leq b \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1. *Первое и второе определения ограниченности являются эквивалентными, то есть из первого следует второе и наоборот.*

Доказательство. **Необходимость**. Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена по первому определению, то

$$\exists\, d \in \mathbb{R}: \ \ |a_n| \leq d \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

В результате раскрытия модуля получим:

$$-d \leq a_n \leq d.$$

После принятия за $c = -d$ и $b = d$, получим верность второго определения.

Достаточность. Если выполнено второе определение

$$\exists\, b, c \in \mathbb{R}: \ \ c \leq a_n \leq b \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

то, выбрав в качестве $d = max(|c|, |b|)$, получим

$$-d \leq c \leq a_n \leq b \leq d,$$

что означает $|a_n| \leq d$. Верность первого определения доказана.

$\square$

3. Монотонность

Определение 3.1. Последовательность a_n называется

1) *невозрастающей,* если $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначается: $a_n \searrow$);

2) *неубывающей,* если $a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначается: $a_n \nearrow$);

3) *убывающей,* если $a_{n+1} < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначается: $a_n \searrow\searrow$);

4) *возрастающей,* если $a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначается: $a_n \nearrow\nearrow$);

Пример. Последовательность $a_n = n$ возрастает, так как $n+1 > n$ для всех натуральных n, а последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ убывает, так как $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.

Пример. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Разность между последующим и предыдущим членами последовательности:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n-2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Последнее выражение всегда положительно для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность монотонно возрастает.

Пример. Для последовательности $a_n = \dfrac{6n-19}{3n-10}$, разность последовательных членов равна:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6(n+1)-19}{3(n+1)-10} - \frac{6n-19}{3n-10} = \frac{6n-13}{3n-7} - \frac{6n-19}{3n-10} =$$

$$= \frac{(3n-10)(6n-13) - (3n-7)(6n-19)}{(3n-10)(3n-7)} =$$

$$= \frac{18n^2 - 39n - 60n + 130 - (18n^2 - 57n - 42n + 133)}{(3n-10)(3n-7)} =$$

$$= -\frac{3}{(3n-10)(3n-7)}.$$

Перед дробью стоит знак "минус", числитель всегда положительный, а знаменатель положителен и не меняет знака, для всех $n \geq 4$. Значит, выражение отрицательно. Следовательно, начиная с $n = 4$ последовательность убывает.

4. Бесконечно малые и бесконечно большие

Определение 4.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой,* если для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера $N_0 = N_0(\varepsilon)$, все члены последовательности удовлетворяют условию $|a_n| \geq \varepsilon$.

Иными словами, последовательность является бесконечно большой, если для любого $\varepsilon > 0$ только конечное количество ее членов удовлетворяет условию $|a_n| < \varepsilon$. В терминах "эпсилон-дельта", используя кванторы, это определение записывается в следующем виде:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \ \forall n > N_0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \geq \varepsilon.$$

Пример. Последовательности $\{a_n\} = \{n\}$ или $\{a_n\} = \{-4n\}$ являются бесконечно большими последовательностями.

Определение 4.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой,* если для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера $N_0 = N_0(\varepsilon)$, все члены последовательности находятся в интервале $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$, что также записывается в виде: $|a_n| < \varepsilon$.

Иными словами, последовательность является бесконечно большой, если для любого $\varepsilon > 0$ только конечное количество ее членов удовлетворяет условию $|a_n| \geq \varepsilon$. В терминах "эпсилон-дельта" определение примет вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n > N_0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| < \varepsilon.$$

Замечание. Разберем, что означает это определение. Для начала запишем условие $|a_n| < \varepsilon$ в более удобном для понимания виде: $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$. Значит, для того чтобы доказать, что последовательность является бесконечно малой, нужно для любого положительного числа ε найти номер, выбор которого зависит от этого положительного числа, начиная с которого все элементы последовательности будут зажаты между двумя числами $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$. То есть, если начиная с какого-то номера вся последовательность все больше приближается к нулю, причем не важно каким образом, то такая последовательность является бесконечно малой.

Интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ принято называть *"Эпсилон окрестностью нуля"*.

Замечание. Возникает вопрос, что такое бесконечность, плюс бесконечность или минус бесконечность? Бесконечность характеризует процессы и объекты, измерение которых невозможно конечными (ограниченными) величинами. Что означает стремление к бесконечности, например, к $(+\infty)$? Под стремлением к $(+\infty)$, для упрощения работы и понимания, будем понимать приближение к самому большому положительному числу, которое никогда нельзя достичь, сколь долго к нему ни стремились. По аналогии под стремлением к минус бесконечности $(-\infty)$ будем понимать приближение к самому маленькому отрицательному числу, которое никогда нельзя достигнуть, сколь долго к нему ни подходить. А под бесконечностью (∞) будем понимать

одновременное стремление к $(+\infty)$ и $(-\infty)$.

Пример. Последовательность $\{a_n\} = \{n\}$ стремится к $(+\infty)$. Последовательность $\{a_n\} = \{-4n\}$ стремится к $(-\infty)$, а последовательность $\{a_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}$ стремится к (∞).

Утверждение 4.1. $\{a_n\} = \{1/n\}$ *является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, нужно для любого $\varepsilon > 0$ найти хотя бы один такой номер $N_0 = N_0(\varepsilon)$ чтобы для любых других номеров, больших, чем этот номер $(n > N_0)$, имело место неравенство $|1/n| < \varepsilon$. В качестве такого номера N_0 выберем число $\left[1/\varepsilon\right] + 1$. Тогда из утверждения о целой части следует, что для каждого n с условием

$$n > N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

верно $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, так как $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, следовательно, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Значит, $|a_n| = |1/n| < \varepsilon$. Таким образом, утверждение доказано. $\square$

Перейдем к формулировке и доказательству ряда важных утверждений для бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Теорема 4.1. *Верны следующие утверждения:*

1) Бесконечно малая последовательность ограничена;

2) Если $\{a_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $a_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, то $\{1/a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, и наоборот. Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $a_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\{1/a_n\}$ — бесконечно большая последовательность;

3) Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\{|a_n|\}$ также есть бесконечно малая последовательность, и наоборот;

4) Сумма или разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

5) Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность;

6) Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью;

7) Если $\{a_n\}$ — постоянная и бесконечно малая последовательность, то $a_n = 0$, то есть последовательность состоит из одних нулей.

Доказательство. 1) Пусть $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_0 = N_0(\varepsilon): \ \ \forall n > N_0 \ \ \Rightarrow \ \ |a_n| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда начиная с номера $N_0 = N_0(1)$ выполняется неравенство $|a_n| < 1$. Значит, неравенству $|a_n| \geq 1$ удовлетворяет лишь конечное число членов последовательности, причем их номера меньше $N_0(1) + 1$. Обозначим за $C = \sum |a_n|$ — сумму модулей членов, номера которых меньше $N_0(1) + 1$. Знак $\sum$ обозначает суммирование членов последовательности от $n = 1$ до $n = N_0(1)$. Тогда для каждого члена последовательности верно

$$|a_n| < C + 1,$$

так как для членов последовательности, чьи номера меньше $N_0(1) + 1$, верно $|a_n| < C$, а для номеров, равных или больших $N_0(1) + 1$, верно $|a_n| < 1$. Так как удалось найти число, которым ограничен каждый член последовательности, значит, последовательность ограничена.

2) **Необходимость**. Пусть $\{a_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Необходимо доказать, что $\{1/a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то есть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $N_0 = N_0(\varepsilon)$, начиная с которого $|1/a_n| < \varepsilon$.

Последнее условие равносильно условию $|a_n| > 1/\varepsilon$. Так как $\{a_n\}$ — бесконечно большая, то количество членов, для которых верно $|a_n| \leq 1/\varepsilon$, ограничено. Тогда в качестве N_0 выберем такой номер, начиная с которого будет верно $|a_n| > 1/\varepsilon$. Нашли номер, начиная с которого $|1/a_n| < \varepsilon$, значит, прямое утверждение доказано.

Достаточность. $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $a_n \neq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Чтобы доказать, что $\{1/a_n\}$ — бесконечно большая, необходимо $\forall\, c > 0$ найти номер $N_0 = N_0(c)$, начиная с которого $|1/a_n| \geq c$. Выберем $c = 1/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ взято из определения бесконечно малой последовательности $\{a_n\}$. Обратное утверждение доказано.

3) Необходимость и достаточность следуют непосредственно из определения бесконечно малой последовательности, в силу того, что если $|a_n| < \varepsilon$, то $||a_n|| = |a_n| < \varepsilon$, и наоборот.

4) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Тогда $\forall\, \varepsilon/2 > 0$ $\exists$ $N_1 = N_1(\varepsilon/2)$ и $\exists$ $N_2 = N_2(\varepsilon/2)$ такие, что $\forall\, n > N_1$ верно $|a_n| < \varepsilon/2$ и $\forall\, n > N_2$ верно $|b_n| < \varepsilon/2$.

Берем в качестве $N_0 = max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall\, n > N_0$ из неравенства треугольника получим

$$|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, $\{a_n \pm b_n\}$ — бесконечно малые последователь-

ности.

5) Пусть $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{b_n\}$ — ограниченная. Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ c > 0$ такое, что $|b_n| < c$. Так как $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists\ N_1 = N_1(\varepsilon_1)$ такой, что $\forall n > N_1$ верно $|a_n| < \varepsilon_1$, и без ограничения общности выберем $\varepsilon_1 = \varepsilon/c$. Получим, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n > N_0 = N_1(\varepsilon/c)$ (берем в качестве N_0 номер $N_1(\varepsilon/c)$) верно

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot c < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon.$$

Нашли номер $N_0 = N_1(\varepsilon/c)$, начиная с которого $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon$, значит, последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ — бесконечно малая.

6) Если последовательность бесконечно малая, то она ограничена по 1), а из 5) следует, что произведение бесконечно малой и ограниченной есть бесконечно малая последовательность. Значит, произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Замечание. Из этого также следует, что произведение любого количества бесконечно малых есть бесконечно малая последовательность.

7) Докажем от противного. Пусть $a_n = c \neq 0$ и последовательность бесконечно малая. В качестве ε выберем $|c|/2$. Тогда в $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (этот интервал называется *эпсилон окрестности нуля*) нет ни одной точки нашей последовательности, значит, по определению $\{a_n\}$ не может быть бесконечно малой. Получили противоречие с условием того, что $\{a_n\}$ — бесконечно малая, значит, условие $a_n = c \neq 0$ не верно, а следовательно $a_n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Все утверждения теоремы доказаны.

$\square$

Историческая справка. Терминология "эпсилон-дельта", которая широко используется в современном математическом анализе, впервые была представлена в основополагающем учебнике по бесконечно малому исчислению "Cours d'Analyse" Огюстена Луи Коши (1789 — 1857) в 1821 году. В определении предела "ε" и "δ" не фигурировали, но использовались в доказательствах.

5. Предел последовательности

Определение 5.1. (*Сходимость последовательности*). Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что последовательность $\alpha_n = a_n - A$ является бесконечно малой. Число A называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$. Говорят, что $\{a_n\}$ сходится к A или имеет предел, равный A.

Предел обозначается следующим образом:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \text{ или } a_n \to A \text{ при } n \to +\infty.$$

В терминах "эпсилон-дельта" это определение записывается в следующем виде:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\ N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \ \forall\, n > N_0, n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Определение 5.2. (*Расходимость к плюс бесконечности*). Последовательность $\{a_n\}$ *расходится к "плюс бесконечности"* $(+\infty)$, если для любого $c > 0$ только конечное количество ее членов удовлетворяет неравенству $a_n < c$ и обозначается: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ или $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

В терминах "эпсилон-дельта" определение записывается в виде:

$$\forall c > 0 \ \exists\ N_0 = N_0(c) \in \mathbb{N}: \ \ \forall n > N_0, \ \ n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ a_n > c.$$

Определение 5.3. (*Расходимость к минус бесконечности*). Последовательность $\{a_n\}$ *расходится к "минус бесконечности"* $(-\infty)$, если для любого $d < 0$ только конечное количество ее членов удовлетворяет неравенству $a_n > d$ и обозначается: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$.

В терминах "эпсилон-дельта" определение записывается в виде:

$$\forall d < 0 \ \exists \ N_0 = N_0(d) \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ a_n < d.$$

Определение 5.4. (*Расходимость к бесконечности*). Последовательность $\{a_n\}$ *расходится к "бесконечности"* (∞), если для любого $c > 0$ только конечное количество ее членов удовлетворяет неравенству $|a_n| < c$. Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

В терминах "эпсилон-дельта" определение записывается в виде:

$$\forall c > 0 \ \exists \ N_0 = N_0(c) \in \mathbb{N} : \ \forall n > N_0, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow |a_n| \geq c.$$

Историческая справка. Бельгийский математик Грегуар де Сен-Венсан (1584 — 1667) дал первое определение предела геометрический прогрессии в своей работе "Opus Geometricum" в 1647 году. Исаак Ньютон (1642 — 1727), Леонард Эйлер (1707 — 1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736 — 1813) также использовали концепцию предела, хотя и интуитивно. Первое строгое определение предложили Бернард Больцано (1781 — 1848) в 1816 году и Огюстен Луи Коши (1789 — 1857) в 1821 году [35, 36].

6. Свойства пределов последовательностей

Теорема 6.1. *Верны следующие свойста пределов:*

1) **Единственность предела.** *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится, то у нее есть только один предел. Это означает, что последовательность не может сходиться одновременно к двум разным пределам.*

2) **Предел бесконечно малой последовательности.** *Если* $\{a_n\}$ *является бесконечно малой последовательностью, то* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

3) **Ограниченность сходящейся последовательности.** *Если* $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена;*

4) **Ограниченность обратных значений.** *Если* $a_n \to A$ *при* $n \to +\infty$ *и* $a_n \neq 0, A \neq 0$, *то существует номер* $N_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что* $\forall n > N_0$ *верно* $|a_n| > |A|/2$ *или* $1/|a_n| < 2/|A|$. *Свойство утверждает, что последовательность* $\{1/a_n\}$, *составленная из обратных величин, ограничена.*

5) **Пределы суммы и разности.** *Если* $a_n \to A,\ b_n \to B$ *при* $n \to +\infty$, *то* $c_n = a_n \pm b_n \to A \pm B$ *при* $n \to +\infty$. *Это означает, что предел суммы или разности двух сходящихся последовательностей равен сумме или разности их пределов.*

6) **Предел произведения.** *Если* $a_n \to A,\ b_n \to B$ *при* $n \to +\infty$, *то* $c_n = a_n \cdot b_n \to A \cdot B$ *при* $n \to +\infty$. *Это свойство означает, что предел произведения двух последовательностей равен произведению их пределов.*

7) **Предел отношения.** *Если* $a_n \to A,\ b_n \to B$ *при* $n \to +\infty$ *и* $B \neq 0$, *то* $c_n = a_n/b_n \to A/B$ *при* $n \to +\infty$. *Свойство означает, что предел отношения равен отношению пределов, если предел последовательности, находящейся в знаменателе, не равен нулю.*

8) **Теорема о двух милиционерах для последовательностей.** *Для трех последовательностей* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *и* $\{c_n\}$ *таких, что* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *если* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = l$, *то существует предел* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$.

Доказательство. 1) От противного. Предположим существование двух различных пределов $A_1 \neq A_2$. Так как они оба пределы $\{a_n\}$, то последовательности $\alpha_n = a_n - A_1$ и $\beta_n = a_n - A_2$ являются бесконечно малыми. Значит, $a_n = \alpha_n + A_1 = \beta_n + A_2$. Следовательно, $A_2 - A_1 = \alpha_n - \beta_n$. Разность двух бесконечно малых величин также бесконечно мала. Тогда, по пункту 7) теоремы предыдущего параграфа следует, что $A_2 - A_1 = 0$, то есть $A_2 = A_1$, что приводит к противоречию $A_2 = A_1$. Значит, предел единственен.

2) Так как $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то последовательность $\alpha_n = a_n - 0$ тоже бесконечно малая, значит, предел $\{a_n\}$ равен 0. Утверждение 2) доказано.

3) Из сходимости $\{a_n\}$ следует, что найдется число A такое, что $\alpha_n = a_n - A$ — бесконечно малая последовательность. Любая бесконечно малая последовательность ограничена по пункту 1) теоремы предыдущего параграфа. Значит, $\exists\ c > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N}$ верно $|\alpha_n| < c$. Но $a_n = A + \alpha_n$, откуда из неравенства треугольника следует, что

$$|a_n| = |A + \alpha_n| \leq |A| + |\alpha_n| \leq |A| + c = C.$$

Значит, $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность. Утверждение 3) доказано.

4) Так как $\{a_n\}$ — сходящаяся, то последовательность $\alpha_n =$

$a_n - A$ — бесконечно малая. В определении бесконечно малой последовательности выберем $\varepsilon = |A|/2$. Тогда для него существует номер $N_0 = N_0(|A|/2)$ такой, что $\forall\, n > N_0$ верно $|\alpha_n| < |A|/2$. Отсюда при этих n, в силу того что $A = a_n - \alpha_n$, получим

$$|A| = |a_n - \alpha_n| \leq |a_n| + |-\alpha_n| = |a_n| + |\alpha_n|.$$

Следовательно,

$$|a_n| \geq |A| - |\alpha_n| > |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2}.$$

Пункт 4) доказан.

5) Из сходимости последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеем, что $\alpha_n = a_n - A, \beta_n = b_n - B$ — бесконечно малые последовательности. По условию $c_n = a_n \pm b_n$. Следовательно,

$$c_n - (A \pm B) = (a_n \pm b_n) - (A \pm B) = (a_n - A) \pm (b_n - B) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

А сумма или разность бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью по пункту 4) теоремы предыдущего параграфа. Следовательно, из определения следует, что $c_n \to A \pm B$ при $n \to +\infty$. Утверждение 5) доказано.

6) По условию $\alpha_n = a_n - A, \beta_n = b_n - B$ — бесконечно малые последовательности. Тогда $a_n = \alpha_n + A, b_n = \beta_n + B$, а следовательно, $c_n = a_n \cdot b_n = (\alpha_n + A) \cdot (\beta_n + B) = AB + \alpha_n B + \beta_n A + \alpha_n \beta_n = AB + \gamma_n$. Заметим, что γ_n — бесконечно малая последовательность, так она является суммой трех бесконечно малых последовательностей, причем первые две бесконечно малые по пункту 5), а третья по пункту 6) теоремы предыдущего параграфа. Отсюда $c_n \to AB$ при $n \to +\infty$. Утверждение 6) доказано.

7) Так как $c_n = a_n/b_n$, то пусть

$$\gamma_n = c_n - \frac{A}{B} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_n B - b_n A}{b_n B}.$$

Так как $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходящиеся, то $\alpha_n = a_n - A, \beta_n = b_n - B$ — бесконечно малые последовательности. Тогда $a_n = \alpha_n + A, b_n = \beta_n + B$, а следовательно,

$$\gamma_n = \frac{(A+\alpha_n)B - (B+\beta_n)A}{b_n B} = \frac{\alpha_n B - \beta_n A}{B} \cdot \frac{1}{b_n}.$$

Заметим, что последовательность $\dfrac{\alpha_n B - \beta_n A}{B}$ является бесконечно малой в силу 5) и 6) пунктов теоремы прошлого параграфа, а $\dfrac{1}{b_n}$ — ограниченной по 4) пункту этой теоремы. Тогда по 5) пункту теоремы предыдущего параграфа γ_n — бесконечно малая, а значит $c_n = a_n/b_n \to A/B$ при $n \to +\infty$.

8) Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$, существует такое натуральное число N_1, что для всех $n \geq N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = l$, существует такое натуральное число N_2, что для всех $n \geq N_2$ выполняется неравенство

$$|c_n - l| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \geq N$ одновременно выполняются неравенства

$$|a_n - l| < \varepsilon, \qquad |c_n - l| < \varepsilon,$$

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \text{и} \quad l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon.$$

Так как $a_n \le b_n \le c_n$, то из этих неравенств следует, что

$$l - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < l + \varepsilon,$$

что означает

$$|b_n - l| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана. □

7. Задачи для закрепления материала

1. Исследовать на монотонность последовательности:

а) $a_n = \dfrac{3}{2n-7}$;

б) $a_n = \dfrac{n^2}{n+4}$;

в) $a_n = \dfrac{n}{n^2+4}$;

г) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + 3n^2 + 121n + 1234}$;

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + 5n + 1}$;

в) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^4 + 2n + 3} - \sqrt{n^4 + 5n + 1}$;

г) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{n^2+3n}\right)^{7n+4}$;

д) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2+1}$;

е) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\cos(n^2+n+1)}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + n\sin(n^2 - \ln n)}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$;

з) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + n\sin(2 - n^n) + 3 - 2n}{(2n + \cos n)^2}$;

и) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2 - \cos(2n-1)}}{(\sqrt{n} + \sin n)^2 + (\sqrt{n} - \sin n)^2}$.

3. Исследовать последовательность на ограниченность:

а) $a_n = n$;

б) $a_n = \dfrac{n^2+1}{5}$;

в) $a_n = \dfrac{n^2+2n+4}{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{10n}{n^2+2}$;

д) $a_n = \dfrac{3n^3+n}{n}$;

е) $a_n = \dfrac{2n+7}{2n-13}$;

ж) $a_n = \dfrac{9}{n^2-81}$.

4. Указать такие N, начиная с которых можно гарантировать выполнение неравенства $|a_n| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, если:

а) $a_n = \dfrac{1}{n+3}$;

б) $a_n = \dfrac{1}{n^2+5}$;

в) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$;

г) $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$;

д) $a_n = \dfrac{n}{n^2+6n+2}$.

5. Используя определение предела, покажите, что последовательность сходится, и укажите ее предел:

а) $a_n = \dfrac{2}{n+2}$;

б) $a_n = \dfrac{1}{2n^2+3}$;

в) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

6. Используя определение предела, докажите, что последовательность не имеет предела:

а) $a_n = (-1)^n$;

б) $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$;

в) $a_n = 1 - (2 + (-1)^n)^2$.

Глава 5.

Предел функции

1. Предел функции по Коши и по Гейне

В предыдущей главе мы познакомились с понятием предела числовой последовательности. В математическом анализе также крайне важно понятие предела функции, определенной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ или на ее части, таких как отрезок, интервал, луч или их комбинации. Подмножество $\mathbb{R}$, на котором определена функция, будем обозначать множеством D_f (иногда обозначают $D(f)$) и называть *областью определения функции.*

Прежде чем перейти к определению предела функции, дадим несколько важных определений.

Определение 1.1. Назовем *δ-окрестностью точки* x_0, где $\delta > 0$, интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Определение 1.2. Точка x_0 называется *предельной точкой множества* D_f, если в любой δ-окрестности точки x_0 содержится бесконечно много точек из D_f.

Пример. Рассмотрим множество $D_f = (-3, 0) \cup (0, 3)$. Точка $x_0 = 0$ является предельной точкой этого множества, так как в любой окрестности этой точки существует бесконечно много точек этого множества D_f. Как видно из примера, точка может не принадлежать множеству D_f, но при этом быть ее предельной точкой. А точка $x_0 = 3,01$ не является предельной точкой множества, так как при $\delta = 0,05$ ни одна точка δ-окрестности точки $x_0 = 3,01$ не находится в D_f.

Определение 1.3. (*Неограниченное множество*). Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным*, если не существует такого числа $c > 0, c \in \mathbb{R}$ такого, что $\forall\, x \in M$ верно $|x| \leq c$. Другими словами,

$$\forall c > 0, \;\; c \in \mathbb{R} \;\; \exists \;\; x \in M : |x| > c.$$

Определение 1.4. (*Неограниченное сверху множество*). Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху*, если не существует такого числа $c \in \mathbb{R}$ такого, что $\forall\, x \in M$ верно $x \leq c$. Другими словами,

$$\forall c \in \mathbb{R} \;\; \exists \;\; x \in M : x > c.$$

Определение 1.5. (*Неограниченное снизу множество*). Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным снизу*, если не существует такого числа $c \in \mathbb{R}$ такого, что $\forall\, x \in M$ верно $x \geq c$. Другими словами,

$$\forall c \in \mathbb{R} \;\; \exists \;\; x \in M : x < c.$$

Будем считать, что все точки x_0, к которым стремится аргумент функции $f(x)$ (то есть $x \to x_0$), являются предельными точками множества D_f. В случае $x \to \infty$ это условие означает, что множество D_f не ограничено; в случае $x \to +\infty$, D_f не ограничено сверху; а в случае $x \to -\infty$, D_f не ограничено снизу.

Определение 1.6. Множество точек x, принадлежащих D_f и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, называется *проколотой δ-окрестностью точки x_0*.

В случае, когда $D_f = \mathbb{R}$, проколотая δ-окрестность точки x_0 состоит из двух интервалов: $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

Дадим два эквивалентных определения предела функции: "По Коши" (1) и "По Гейне" (2). Доказательство эквивалентности этих определений можно найти в [1].

Замечание. Эквивалентность двух определений по Коши и по Гейне означает, что существования предела функции по Коши влечет за собой существование предела функции по Гейне, и наоборот, причем в обоих случаях значения пределов совпадают.

Определение 1.7. Число l называется *пределом функции $f(x)$ при* $x \to x_0$, если

(1): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_f : 0 < |x - x_0| < \delta, \ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Определение (1) означает, что функция имеет предел в точке x_0, равный l, если для любого положительного ε можно найти положительное число δ, зависящее от ε, такое, что для всякого x из области определения функции и находящегося в проколотой δ-окрестности точки x_0, значения функции находятся в ε-окрестности точки l, или другими словами:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \ \ \forall x : x \in D_f, \ \ x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

$$\Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

(2): $\forall$ последовательности $\{x_n\}: \ \ x_n \neq x_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ x_n \in D_f$ и $x_n \to x_0$ при $n \to +\infty$ имеем $f(x_n) \to l$.

Замечание. Определение (2) означает, что функция имеет предел в точке x_0, равный l, если для любой последовательности

x_n, каждый член которой отличается от x_0, принадлежит D_f и стремится к x_0 при $n \to x_0$, верно, что $f(x_n)$ стремится к l.

Обозначается предел функции как $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или $f(x) \to l$ при $x \to x_0$.

Существуют аналогичные определения предела для случаев $x \to x_0+0$ (справа) или $x \to x_0-0$ (слева), а также при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

Определение 1.8. Число l называется *правым пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$, если

(1): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_f : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$;

(2): $\forall$ последовательности $\{x_n\}: \ \ x_n > x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in D_f$ и $x_n \to x_0$ при $n \to +\infty$ имеем $f(x_n) \to l$.

Обозначается это как $l = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ или $f(x) \to l$ при $x \to x_0 + 0$.

Определение 1.9. Число l называется *левым пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$, если

(1): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_f : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$;

(2): $\forall$ последовательности $\{x_n\}: \ \ x_n < x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in D_f$ и $x_n \to x_0$ при $n \to +\infty$ имеем $f(x_n) \to l$.

Обозначается это как $l = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ или $f(x) \to l$ при $x \to x_0 - 0$.

Замечание. В литературе вместо обозначений $x \to x_0 + 0$ и $x \to x_0 - 0$ можно встретить следующие обозначения: $x \to x_0+$ и $x \to x_0 - $.

Определение 1.10. Число l называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если

(1): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_f : |x| > c \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$;

(2): $\forall$ бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$, при $n \to +\infty$ имеем $f(x_n) \to l$.

Обозначается это как $l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ или $f(x) \to l$ при $x \to \infty$.

Определение 1.11. Число l называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если

(1): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_f : x > c \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$;

(2): $\forall$ бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$ и $x_n \in D_f$, при $n \to +\infty$ имеем $f(x_n) \to l$.

Обозначается это как $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ или $f(x) \to l$ при $x \to +\infty$.

Определение 1.12. Число l называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если

(1): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ c = c(\varepsilon) < 0$ такое, что $\forall x \in D_f : x < c \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$;

(2): $\forall$ бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < 0$ и $x_n \in D_f$, при $n \to +\infty$ имеем $f(x_n) \to l$.

Обозначается это как $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ или $f(x) \to l$ при $x \to -\infty$.

Историческая справка. Современная идея предела функции восходит к Бернарду Больцано (1781 — 1848), который в 1817 году представил основы метода "эпсилон-дельта" для определения непрерывных функций. Однако его работа не была известна при его жизни. Первое строгое определение предела функции дано Огюстеном Луи Коши (1789 — 1857) в 1821 году в его работе "Курс анализа", в которой он заложил основу для метода "эпсилон-дельта", сыгравшую ключевую роль в развитии

математического анализа. В 1861 году Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 — 1897) впервые представил "эпсилон-дельта" определение предела в том виде, в каком оно записывается сегодня. Он также ввел обозначения lim и $\lim_{x\to x_0}$. Современное обозначение размещения стрелки под символом предела $\lim\limits_{x\to x_0}$ принадлежит Годфри Харольду Харди (1877 — 1947), которое введено в его книге "Курс чистой математики" в 1908 году [35].

2. Свойства предела функции

Введем следующие обозначения для сокращения записи. Вместо "$f(x) \to A$" при любом одном из стремлений $x \to x_0$, $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$ будем использовать "$f(x) \to A$ по базе B" и назовем это пределом по базе B. Иными словами

$$\lim_{x\to x_0, x\to x_0+0, x\to x_0-0, x\to+\infty, x\to-\infty, x\to\infty} f(x) = \lim_B f(x).$$

Сформулируем теорему о свойствах предела функций.

Теорема 2.1. *(О свойствах пределов функции).*

1) *Если* $f(x) = c$, *где* $c = const, c \in \mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_B f(x) = c$.

2) *Если* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$, *то*

$$\lim_B \big(f(x) \pm g(x)\big) = l_1 \pm l_2.$$

3) *Если* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$, *то*

$$\lim_B \big(f(x) \cdot g(x)\big) = l_1 \cdot l_2.$$

4) *Если* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$ *и* $l_2 \neq 0$, *то*

$$\lim_B \big(f(x)/g(x)\big) = l_1/l_2.$$

5) *Если* $\lim\limits_{B} f(x) = l$ *и* $f(x) > c, \forall x \in D_f,\ \ c \in \mathbb{R}$ *(или* $f(x) \geq c$*), то* $l \geq c$.

Также верно противоположное утверждение:

Если $\lim\limits_{B} f(x) = l$ *и* $f(x) < c, \forall x \in D_f,\ \ c \in \mathbb{R}$ *(или* $f(x) \leq c$*), то* $l \leq c$.

6) *Если* $\lim\limits_{B} f(x) = l_1, \lim\limits_{B} g(x) = l_2$ *и* $f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in D_f \cap D_g$, *то* $l_1 \leq l_2$.

7) *(Теорема о двух милиционерах или теорема о существовании предела у функции, которая "зажата" между двумя другими функциями, имеющими одинаковый предел). Если* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \ \forall x \in D_f \cap D_g \cap D_h$ *и* $\lim\limits_{B} f(x) = l,\ \ \lim\limits_{B} h(x) = l$, *то* $\lim\limits_{B} g(x) = l$.

Замечание. Название "Теорема о двух милиционерах" происходит от аналогии с двумя милиционерами, ведущими задержанного. Эта теорема также известна как теорема сжатия, теорема о промежуточной функции, теорема о двух карабинерах, теорема о сэндвиче (или правило сэндвича), теорема о трех струнах, теорема о двух жандармах, теорема о двух городовых и пр.

Доказательство. Утверждения 1) — 5) оставим без доказательства. Во многом доказательство этих утверждений повторяет доказательство теоремы о числовой последовательности. Докажем утверждения 6) и 7), используя предыдущие утверждения теоремы.

6) Пусть $\lim\limits_{B} f(x) = l_1, \lim\limits_{B} g(x) = l_2$ и $f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in D_f \cap D_g$. Рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - f(x)$. По условию $h(x) \geq 0$, а $\lim\limits_{B} h(x) = l = l_2 - l_1$. Из утверждения 5) имеем $l \geq 0$, а значит, $l_2 \geq l_1$. Утверждение 6) доказано.

7) Пусть $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in D_f \cap D_g \cap D_h$ и

$$\lim_B f(x) = l, \ \lim_B h(x) = l.$$

Тогда

$$0 \le g(x) - f(x) \le h(x) - f(x).$$

Тогда $\lim\limits_B h(x) - f(x) = 0$ из условий утверждения и вследствие утверждения 2). Тогда по утверждению 5) имеем:

$$\lim_B 0 \le \lim_B (g(x) - f(x)) \le \lim_B (h(x) - f(x)).$$

Значит, $\lim\limits_B (g(x) - f(x)) = 0$. Тогда

$$\lim_B g(x) = \lim_B \big(g(x) - f(x) + f(x)\big) =$$

$$= \lim_B (g(x) - f(x)) + \lim_B f(x) = 0 + l = l.$$

Утверждение 7) доказано. □

3. Непрерывность функции в точке

Определение 3.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Условие означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Она является непрерывной функцией в точке $x_0 = 0$, потому что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, такое что $\forall\, x \in D_f : |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ выполняется $x^2 < \varepsilon$.

Введем определение непрерывности справа и слева.

Определение 3.2. Функция называется *непрерывной справа,* если:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0),$$

другими словами:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall\, x \in D_f : 0 < x - x_0 < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 3.3. Функция называется *непрерывной слева,* если:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0),$$

другими словами:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall\, x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Утверждение 3.1. *Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была одновременно непрерывна справа и слева в этой точке. Другими словами, если $f(x)$ непрерывная в точке x_0, то она непрерывна справа и слева в этой точке, и наоборот.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть функция непрерывна в точке. Докажем непрерывность справа и слева.

Если $f(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Иными словами,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall\, x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Условие $\forall\, x : |x - x_0| < \delta$ эквивалентно $\forall\, x : -\delta < x - x_0 < \delta$. Значит, в частности, верно следующее условие: $\forall\, x : -\delta < x - x_0 < 0$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то есть функция $f(x)$

непрерывна слева. Аналогично, $\forall x : 0 < x - x_0 < \delta$ верно $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то есть функция $f(x)$ непрерывна справа. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функция непрерывна справа и слева в точке x_0. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta_1$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \ \forall x : -\delta_2 < x - x_0 < 0$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Возьмем $\delta = min(\delta_1; \delta_2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, что означает непрерывность $f(x)$ в точке x_0. Достаточность доказана. $\square$

Историческая справка. "Эпсилон-дельта" определение непрерывности было впервые дано Бернардом Больцано (1781 — 1848) в 1817 году. Огюстен Луи Коши (1789 — 1857) определил непрерывность в "Курсе анализа" 1821 года через бесконечно малые последовательности.

4. Свойства непрерывных функций

Определение 4.1. Функция называется *ограниченной* на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если $\exists \ c \in \mathbb{R}, c > 0 : \forall x \in M$ выполняется $|f(x)| < c$.

Определение 4.2. Функция называется *ограниченной сверху* на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если $\exists \ c \in \mathbb{R} : \forall x \in M$ выполняется $f(x) < c$.

Определение 4.3. Функция называется *ограниченной снизу* на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если $\exists\ c \in \mathbb{R} : \forall x \in M$ выполняется $f(x) > c$.

Сформулируем важные свойства непрерывных функций в точке x_0 без доказательства.

Теорема 4.1. *Пусть f, g непрерывны в точке x_0, то в этой точке:*

1) Линейная комбинация $c_1 f + c_2 g$ непрерывна для всех $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Произведение $f \cdot g$ непрерывно.

3) Частное f/g непрерывно, если $g(x_0) \neq 0$.

4) Если $f(x_0) \neq 0$, то $\exists\ \delta > 0$ такое, что

$$f(x) \cdot f(x_0) > 0\ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

то есть, если значение функции в точке x_0 отлично от 0, то существует некоторая окрестность этой точки, в которой она сохраняет свой знак.

5) $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, то есть существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ следует, что найдется $c > 0 : |f(x)| < c$.

Перечислим непрерывные элементарные функции.

Замечание. Элементарные функции носят такое название потому, что они представляют собой основные, базовые функции, которые встречаются в математическом анализе и используются для построения более сложных функций.

1) Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, непрерывен на множестве $\mathbb{R}$.

2) Рациональная функция $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены, непрерывна на $\mathbb{R}$, из которого выколоты точки, в которых многочлен $Q(x)$ обращается в 0.

3) Показательная функция $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

4) Степенная функция $f(x) = x^a$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$;

5) Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$;

6) Тригонометрические функции $\sin(x), \cos(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, а $\operatorname{tg}(x)$ непрерывен на $\mathbb{R} \setminus \{x \neq \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, а $\operatorname{ctg}(x)$ на $\mathbb{R} \setminus \{x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. $\arcsin(x), \arccos(x), \operatorname{arctg}(x), \operatorname{arcctg}(x)$ также являются непрерывными функциями в своей области определения, то есть на $[-\pi/2; \pi/2], [0, \pi], (-\infty, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$ соответственно.

7) Гиперболические функции, такие как гиперболический синус $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, гиперболический тангенс $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ непрерывны на $\mathbb{R}$, а гиперболический котангенс $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ непрерывен на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Функцию e^x называют *экспонентой*, а число e называют *неперовым числом*, *числом Непера* или *числом Эйлера*. Число e является основанием натурального логарифма ($\ln x = \log_e x$). Известно, что

$$e = 2,718281828459045...$$

Дадим определение числа Эйлера.

Определение 4.4. *Числом Непера или числом Эйлера* называется величина, равная пределу следующей последовательности:

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n.$$

Доказательство того, что этот предел существует, можно найти в [1].

Определение 4.5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на некотором множестве* $M \subset D_f$, если эта функция непрерывна в каждой точке этого множества. Непрерывность в концевых точках, например, в крайних точках отрезка $[a, b]$, понимается как непрерывность справа или слева (непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b).

Историческая справка. Число e было названо Леонардом Эйлером (1707 — 1783) в честь шотландского математика Джона Непера (1550 — 1617), известного как изобретателя логарифмов и первый автора, опубликовавший логарифмические таблицы в работе под названием "Описание удивительной таблицы логарифмов" 1614 года. Впервые константа негласно присутствует в приложении к переводу на английский язык вышеупомянутой работы Непера, опубликованному в 1618 году. Негласно, потому что там содержится только таблица натуральных логарифмов, определенных из кинематических соображений, сама же константа не присутствует. Предполагается, что автором таблицы был английский математик Уильям Отред (1574 — 1660). Поэтому нет твердых оснований для утверждения, что Непер имел о числе e четкое представление.

Первое известное использование этой константы, где она обозначалась буквой b, встречается в письмах Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 — 1716) в 1690—1691 годы.

Букву e начал использовать Леонард Эйлер (1707 — 1783) в 1727 году, а первой публикацией с этой буквой была его работа "Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически" 1736 года. Поэтому число e часто также называют *числом Эйлера.* Он также вычислил точные 23 знака после запятой этого числа, использовав представление числа e в виде бесконечного числового ряда. Ему принадлежит и заслуга определения функции для комплексных значений, что положило начало матема-

тическому анализу в комплексной области — теории функций комплексного переменного.

Есть предположение, что Эйлер выбрал именно эту букву для обозначения константы от немецкого слова "exponential", которое переводится как "показательный", "экспоненциальный". Неправдоподобно предположение, что Эйлер выбрал e как первую букву в своей фамилии (нем. Euler) [35].

5. Монотонность функции. Точки разрыва

Определение 5.1. Функция $f(x)$ на множестве M называется:

1) *возрастающей* или *строго возрастающей* на M (обозначается как $f \nearrow\nearrow$), если для всех $a, b \in M$ таких, что $a < b$ выполняется $f(a) < f(b)$;

2) *убывающей* или *строго убывающей* на M (обозначается как $f \searrow\searrow$), если для всех $a, b \in M$ таких, что $a < b$ выполняется $f(a) > f(b)$;

3) *неубывающей* или *не строго возрастающей* на M (обозначается как $f \nearrow$), если для всех $a, b \in M$ таких, что $a < b$ выполняется $f(a) \leq f(b)$;

4) *невозрастающей* или *не строго убывающей* на M (обозначается как $f \searrow$), если для всех $a, b \in M$ таких, что $a < b$ выполняется $f(a) \geq f(b)$.

Если $f(x)$ или возрастающая, или убывающая, или неубывающая, или невозрастающая на M, то она называется *монотонной функцией* на M.

Определение 5.2. Функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* x_0, если она не является непрерывной в этой точке. Точка x_0 в таком случае называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Определение 5.3. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если существуют конечные пределы справа и слева:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

В противном случае точка разрыва функции $f(x)$ называется *точкой разрыва второго рода.*

Пример. Функция с разрывом первого рода:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Конечные пределы справа и слева существуют и соответственно равны 1 и -1, но в точке $x = 0$ функция разрывна, причем $x = 0$ является точкой разрыва первого рода.

Пример. Функция с разрывом второго рода:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1/x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пределы справа и слева стремятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно, следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

Определение 5.4. Разрыв первого рода в точке x_0 называется *устранимым,* если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (то есть $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l$), но $l \neq f(x_0)$. В противном случае разрыв первого рода называется *неустранимым.*

Замечание. Устранимым разрыв назван так из-за того, что можно избавиться от разрыва, по-новому задав значение функции $f(x)$ в точке разрыва $x = x_0$, равное правому и левому пределу функции в этой точке.

Замечание. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, но $f(x)$ не определена при $x = x_0$, то говорят также, что имеет место устранимый разрыв.

Пример. Устранимый разрыв в точке $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пример. Неустранимый разрыва в точке $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

6. Предел сложной функции

Определение 6.1. *Сложной функцией* $h(x)$ называется функция вида

$$h(x) = f(g(x)),$$

где $f(y)$ и $g(x)$ — некоторые функции таковы, что область определения $f(y)$ содержит все значения, которые принимает функция $g(x)$.

Замечание. Сложную функцию $h(x)$ также называют композицией функций f и g. Действие функций на x состоит из последовательного действия сначала g, а затем f на x:

$$x \underset{g}{\to} y = g(x) \underset{f}{\to} z = f(y) = f(g(x)).$$

Теорема 6.1. *(Теорема о пределе сложной функции).*

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$. *Тогда имеем*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Доказательство. Чтобы доказать теорему, необходимо

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

В силу того что $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$, верно

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0: \ \ \forall y : 0 < |y - y_0| < \delta_1$$

$$\Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

В силу того что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, верно

$$\forall\delta_1 > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\delta_1) > 0: \ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - y_0| < \delta_1.$$

Полученное δ нам и нужно было найти. В силу того что $y = g(x)$ в итоге получим

$$\forall\varepsilon > 0 \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - y_0| < \delta_1.$$

Следовательно, $|f(g(x)) - f(x_0)| < \varepsilon$. Теорема доказана. $\square$

Верна более общая теорема, которую сформулируем, но оставим без доказательства.

Теорема 6.2. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, *причем для всех* x *из некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *имеем* $g(x) \neq y_0$, *и пусть* $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Теорема верна, если заменить $x \to x_0$ на любое из $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$.

Замечание. Эта теорема необходима для того, чтобы делать замену переменных при вычислении пределов. Пусть

$$\lim_{y\to\infty} f(y) = l, \;\; y = 1/x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} f(1/x) = l.$$

Пример. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}.$$

Сделаем замену $y = 1/x$ и $y \to 0$ при $x \to \infty$. Получим

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} \sin y = 0.$$

7. Методы вычисления пределов

Определение 7.1. *Дробно-рациональной функцией* называется функция вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены некоторой степени.

Рассмотрим несколько методов вычисления пределов на примерах.

1) *Предел дробно-рациональной функции, непрерывной в точке x_0 при $x \to x_0$.* Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Так как функция непрерывна в точке $x = 0$, предел функции равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + 2x + 2} = \frac{0^2 - 4\cdot 0 + 2}{0^2 + 2\cdot 0 + 2} = 1.$$

Аналогично вычисление предела той же функции при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2^2-4\cdot 2+1}{2^2+2\cdot 2+1} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}.$$

2) *Неопределенность* (∞/∞). Вычислим предел той же функции при $x \to \infty$. При этом числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. Получим неопределенность (∞/∞). Чтобы справится с этим типом неопределенности, нужно избавиться от бесконечности в знаменателе. Для этого делим числитель и знаменатель на x в максимальной степени знаменателя, то есть на x^2. Тогда, вследствие того что $1/x^n \to 0$ при $x \to \infty$ и $n \in \mathbb{N}$, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+2}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-4/x+2/x^2}{1+2/x+2/x^2} = 1.$$

3) *Неопределенность* $(0/0)$. Вычислим предел:

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}.$$

Подставляя $x = 1$ в числитель и в знаменатель, получим $(0/0)$. Значит, $x = 1$ является корнем числителя и знаменателя. Разложим числитель и знаменатель на линейные множители. Получим

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-6)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-4)}{(x-6)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

В пределе можно сократить числитель и знаменатель на $(x-1)$, так как предел при $x \to 1$ — это число, к которому подходит функция, когда x весьма близко подходит к 1, но самой 1 она не достигает.

4) *Неопределенность* $(\infty - \infty)$. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5x+2} - \sqrt{x^2-5x-5}).$$

Чтобы избавиться от неопределенности $(+\infty)-(+\infty)$, домножим и разделим на сумму корней:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+2}-\sqrt{x^2-5x-5})\cdot$$

$$\cdot\frac{(\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2-5x-5})}{(\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2-5x-5})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+2-(x^2-5x-5)}{\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2-5x-5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x+7}{\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2-5x-5}}.$$

Получим новый предел с неопределенностью вида $(+\infty/+\infty)$, с которой справимся, разделив числитель и знаменатель на x.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10x+7}{\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2-5x-5}}\frac{:x}{:x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10+7/x}{\sqrt{1+5/x+2/x^2}+\sqrt{1-5/x-5/x^2}}=\frac{10}{2}=5.$$

5) *(Неопределенность вида* 1^∞). Вычислим предел:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+2}{4x+1}\right)^{7x+5}.$$

Чтобы вычислить данный предел, используется следующее правило, которое является следствием "замечательных пределов", с которыми познакомимся в следующем параграфе. Правило приведем без доказательства. Пусть по некоторой базе B функции $f(x)\to 1$, а $g(x)\to\infty$. Тогда

$$\lim_B f(x)^{g(x)}=e^C,\ \ C=\lim_B(f(x)-1)\cdot g(x),$$

где $\lim\limits_{B}$ является пределом по базе B. Применим это правило к нашему примеру. Сначала вычислим C.

$$C = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+2}{4x+1}-1\right)(7x+5) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+2-(4x+1)}{4x+1}\right)(7x+5) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4x+1}\right)(7x+5) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x+5}{4x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7+5/x}{4+1/x}\right) = \frac{7}{4}.$$

Тогда,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = e^C = e^{7/4}.$$

8. Замечательные пределы

Сформулируем важную теорему.

Теорема 8.1. *Имеют место следующие соотношения:*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a$, *для любого действительного* a;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x \ln a} = 1, a > 0, a \neq 1.$

Замечание. Утверждение 6) называется *первым замечательным пределом*, а утверждение 1) — *вторым замечательным пределом.* Они получили такое название из-за своей важности, так как являются фундаментов, из которых следуют многие другие пределы, в том числе пределы вышенаписанной теоремы.

Доказательство. Утверждение 1) оставим без доказательства. Оно приведено в [1].

Докажем утверждение 2) с помощью утверждения 1). Используем замену переменных $y = 1/x, x = 1/y, y \to \infty$. По теореме о пределе сложной функции получим

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Утверждение 2) доказано.

Докажем 3). Используя 2) и основное логарифмическое тождество, получим

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{(1/x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = e.$$

Из непрерывности и монотонности функции $y = e^x$ следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Утверждение 3) доказано.

Для доказательства 4) воспользуемся теоремой о пределе сложной функции, полагая, что

$$g(x) = e^x - 1, \ \lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0,$$

$$f(y) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \ \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1.$$

Откуда следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Утверждение 4) доказано.

Утверждение 5) оставим без доказательства.

Докажем 6). Рассмотрим единичный круг и угол $0 < x < \pi/2$ (рис. 5.1). Рассмотрим сектор с углом x и два прямоугольных треугольника. Первый вписан в сектор, а второй содержит его, имея с ним общий угол и сторону на оси абсцисс. Площадь первого треугольника равна $(\sin x)/2$, площадь сектора радиусом 1 равна $x/2$, а площадь второго треугольника равна $(\operatorname{tg} x)/2$. В силу того что первый треугольник находится внутри сектора, который в свою очередь находится внутри второго треугольника, имеем

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Умножив это двойное неравенство на 2 и вспомнив, что $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$, получим

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

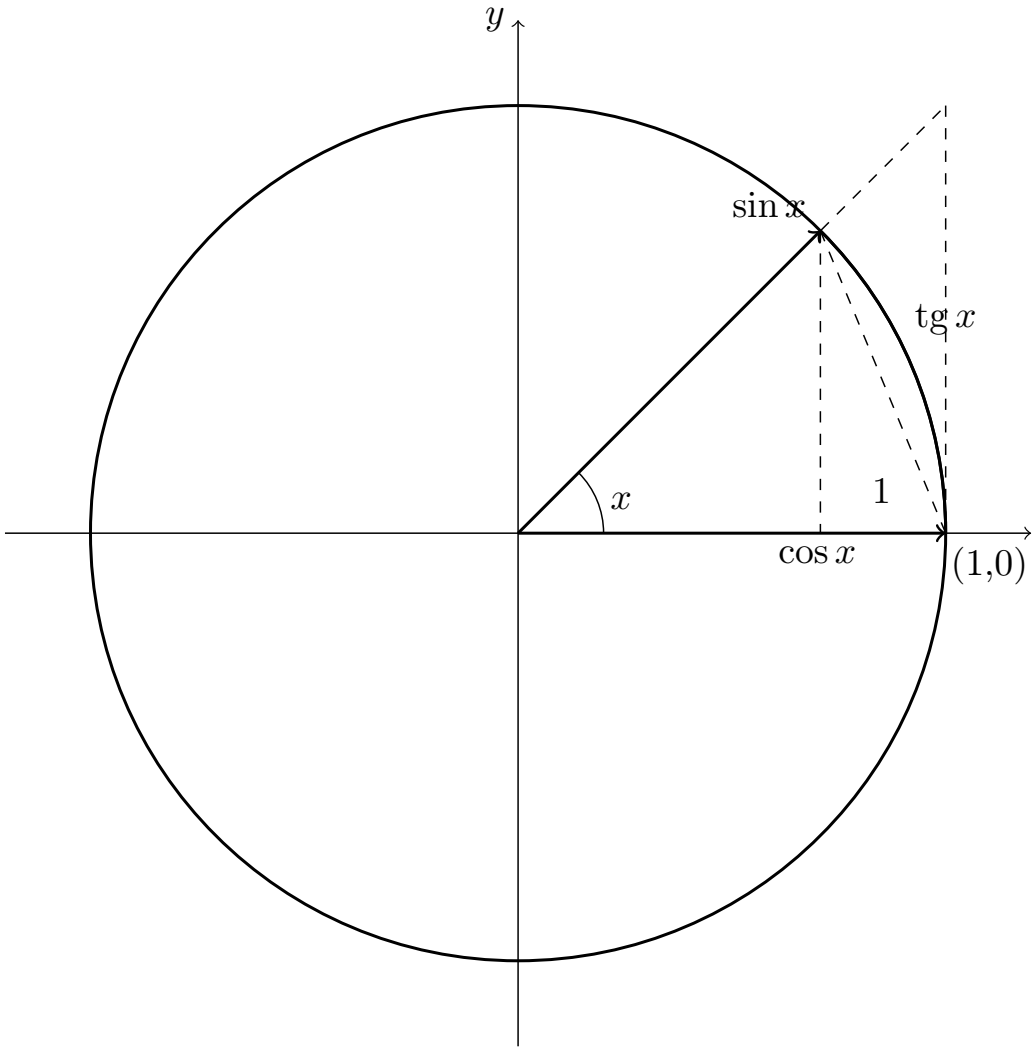

Рис. 5.1. Доказательство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

что эквивалентно

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

Так как $\sin x$ положителен на множестве $0 < x < \pi/2$, то при умножении неравенств на $\sin x$ не произойдет изменения знака. Получим

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

При замене в последнем выражении x на $-x$ ничего не поменяется, так как $\cos(-x) = \cos x$, а $\sin(-x)/(-x) = \sin x/x$. Поэтому последнее двойное неравенство будет верным и при отрицательных x. В итоге, двойное неравенство верно при $0 < |x| < \pi/2$. Тогда по теореме о двух милиционерах получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Утверждение 6) доказано.

Докажем утверждение 7). Используя для этого 6) и тригонометрическую формулу половинного угла $(1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2)$, получим

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}.$$

Сделаем замену переменных $y = x/2, x = 2\,y, y \to 0$. Тогда в силу 6) получим

$$A = \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2 y}{4y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}.$$

Утверждение 7) доказано.

Докажем утверждение 8) из 6).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Утверждение 8) доказано.

Докажем утверждение 9) из 6) с помощью замены переменной $y = \arcsin x,\ \ x = \sin y,\ \ y \to 0$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Утверждение 9) доказано.

Докажем утверждение 10) из 8) с помощью замены переменной $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $y \to 0$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1.$$

Утверждение 10) доказано.

Докажем утверждение 11) из 4) с помощью замены переменной $y = x \ln a$, $y \to 0$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(a^x)} - 1}{x \ln a} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Утверждение 11) доказано.

$\square$

Пример. Вычислим следующий предел, используя замечательные пределы.

$$A = \lim_{x\to\infty} 2x \cdot (\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x\to\infty} 2x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Сделаем замену переменных $y = 1/x, x = 1/y, y \to 0$. Тогда, в силу замечательного предела 3), имеем

$$A = \lim_{y\to 0} 2\frac{\ln(1+y)}{y} = 2.$$

Историческая справка. В 1690 году Яков Бернулли (1655 — 1705) впервые опубликовал исследование сложного процента,

в котором обосновал существование предельной выгоды, которую оценил как большую 2.5, но меньшую 3. Он фактически искал предел последовательности, равный числу e (второй замечательный предел). Первый замечательный предел был установлен Огюстеном Луи Коши (1789 — 1857) в его работе "Cours d'analyse" 1821 года. Второй замечательный предел был впервые установлен и доказан Якобом Бернулли в серии его писем и публикаций. Эти пределы сыграли ключевую роль в развитии анализа [35, 36].

9. Эквивалентные переходы

Определение 9.1. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией по базе B,* если

$$\lim_B f(x) = 0.$$

Определение 9.2. Две бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными по базе B* (обозначается как $f(x) \sim g(x)$ по базе B или $f(x) \sim_B g(x)$), если

$$\lim_B \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Теорема 9.1. *Следующие функции при $x \to 0$ эквивалентны:*

1) $\sin x \sim x$;
2) $\ln(1+x) \sim x$;
3) $e^x - 1 \sim x$;
4) $(1+x)^a - 1 \sim ax$, *в частности* $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$;
5) $1 - \cos x \sim x^2/2$;
6) $\operatorname{tg} x \sim x$;
7) $\arcsin x \sim x$;
8) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

9) $a^x \sim 1 + x \ln a$.

Эти эквивалентности являются следствием замечательных пределов. Так, например, из первого замечательного предела следует, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример. Вычислим предел двумя способами: 1) с помощью замечательных пределов и 2) с помощью эквивалентных переходов.

1) Используем замечательные пределы.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - 1 + \cos 3x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - (1 - \cos 3x)}{(\sqrt{1-4x} - 1) + \ln(1+3x)}.$$

После деления числителя и знаменателя на x получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 6x}{x} - \dfrac{1-\cos 3x}{x}}{\dfrac{\sqrt{1-4x}-1}{x} + \dfrac{\ln(1+3x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6 \cdot \dfrac{\sin 6x}{6x} - 9x \cdot \dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}}{-4 \cdot \dfrac{\sqrt{1-4x}-1}{-4x} + 3 \cdot \dfrac{\ln(1+3x)}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6 - 0 \cdot (1/2)}{(-4)(1/2) + 3} = 6.$$

В последних действиях использовались замены переменных в сочетании с замечательными пределами:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = |y = 5x, x \to 0, y \to 0| = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{(3x)^2} = |y = 3x, x \to 0, y \to 0| = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{(y)^2} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-4x}-1}{-4x} = |y = -4x, x \to 0, y \to 0| =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = |y = 3x, x \to 0, y \to 0| = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

2) Используем эквивалентные переходы.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - 1 + \cos 3x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - (1-\cos 3x)}{(\sqrt{1-4x}-1) + \ln(1+3x)}.$$

Воспользуемся эквивалентностью следующих функций:

$$\sin 6x \sim 6x, \ \ (1-\cos 3x) \sim \frac{(3x)^2}{2}, \ \ (\sqrt{1-4x}-1) \sim -\frac{4x}{2},$$

$$\ln(1+3x) \sim 3x.$$

После подстановки эквивалентностей и деления на x получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x - \frac{(3x)^2}{2}}{-2x+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x - \frac{(3x)^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6 - \frac{9x}{2}}{1} = 6.$$

10. Задачи для закрепления материала

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x-3)(3x+5)(2x-6)}{4x^3+x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-18}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3+3x^2-5}{3x^2+2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+12x+20}$;

з) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

и) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2y}{x^2-x-6}$;

к) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2+4x}{(x-2)(x+4)}$;

л) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

м) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$;

н) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

п) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

р) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$;

с) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

т) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

у) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(4x)^{1/\sin x}$;

ф) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin 3x + (1-\cos 4x)}{\sqrt{1+2x}-1+\ln(1-5x)}$;

х) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$;

ч) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

ш) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

щ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$.

2. Проверить непрерывность функции в точке x_0:

а) $f(x) = 3x + 2$ в точке $x_0 = 1$;

б) $f(x) = x^2 - 4$ в точке $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$;

г) $f(x) = \sin(x)$ в точке $x_0 = \pi$;

д) $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$;

е) $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$;

ж)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 1$;

з) $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$;

и) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ в точке $x_0 = 1$;

к) $f(x) = \ln(x)$ в точке $x_0 = 1$.

3. Определить тип разрыва:

а) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ в точке $x_0 = 1$;

б)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x \ge 2 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

г)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 3, \\ 5, & x = 3, \\ x^2 - 1, & x > 3 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 3$;

д) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ в точке $x_0 = 0$;

е)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$;

ж)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 1, \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 1$;

з) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

и)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0, \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$;

к)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 2$.

Глава 6.

Дифференциальное исчисление

1. Приращение. Дифференциал

Пусть функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x = x_0$. Свойство непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ эквивалентно тому, что функция $\alpha(x) = f(x) - f(x_0)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$. Значит, любую непрерывную в точке $x = x_0$ функцию можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Причем, если $f(x) = x$, то $\alpha_1(x) = x - x_0$. Эти две бесконечно малые функции при $x \to x_0$ играют важную роль в дифференциальном исчислении.

Определение 1.1. Функция $\alpha(x) = f(x) - f(x_0)$ называется

приращением функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначается как $\triangle f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Определение 1.2. Функция $\alpha_1(x) = x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается как $\triangle x = x - x_0$.

Если функция непрерывна, то $\triangle f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, и наоборот. А также $\triangle x \to 0$ при $x \to x_0$. Из определения приращения функции и приращения аргумента следует, что

$$x = x_0 + \triangle x,$$

$$\triangle f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \beta(\triangle x).$$

Пример. Найдем приращение функции x^2 в точке $x = 1$ с приращением аргумента $0,1$.

$$f(x) = x^2, \;\; x_0 = 1, \;\; \triangle x = 0,1 \Rightarrow$$

$$\triangle f(x) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 =$$

$$= (1 + 0,1)^2 - 1^2 = 1,21 - 1 = 0,21.$$

Будем рассматривать функцию $\triangle f(x)$ как функцию от $\triangle x$. Рассмотрим случай, когда $\triangle f(x)$ бесконечно мала, то есть $\triangle f(x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$, и при этом эквивалентна линейной функции вида $c\triangle x$, где $c = const \in \mathbb{R}$, то есть верно:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{c\triangle x} = 1.$$

В этом случае дадим следующее определение.

Определение 1.3. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и пусть $\triangle f(x)$ бесконечно мала и эквивалентна линейной функции $c\triangle x$ при $\triangle x \to 0$ ($\triangle f(x) \sim$

$c\triangle x$), где c — некоторая вещественная постоянная. Тогда линейную функцию $c\triangle x$ называют *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$, а функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* $x = x_0$. Дифференциал обозначают символом $df(x)$ или просто df.

Из определения следует, что $df(x) = c\triangle x$. Тогда,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = c.$$

Найдем дифференциал функции $f(x) = x$. Приращение этой функции, то есть $\triangle x = 1\triangle x$, значит, $dx = \triangle x$.

2. Производная

При $\triangle x \to 0$ из определения дифференциала получим

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{c\triangle x}{\triangle x} = c.$$

Определение 2.1. Число $c = \dfrac{df(x)}{dx}$, если оно существует, называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$, обозначаемой как $f'(x_0)$.

Запишем альтернативные формы записи определения производной:

$$c = f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Геометрический смысл производной: число $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, на координатной плоскости Oxy в точке $(x_0, f(x_0))$.

Утверждение 2.1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По условию дифференцируемости $f(x)$ в точке $x = x_0$ получим $\triangle f(x) \sim df(x) = f'(x_0)\triangle x$. Тогда $\triangle f(x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$, то есть $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, а значит, $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. $\square$

Пример. По определению вычислим производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$. Это можно сделать двумя способами: без использования приращения аргумента и с использованием приращения аргумента. Продемонстрируем оба способа.

$$1)\ \ c = f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

$$2)\ \ c = f'(2) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(2+\triangle x) - f(2)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{4 + 4\triangle x + (\triangle x)^2 - 4}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{(2+\triangle x)^2 - 2^2}{\triangle x} =$$

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{4\triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}(4 + \triangle x) = 4.$$

Историческая справка. В классическом дифференциальном исчислении производная определяется через понятие предела, однако исторически теория пределов появилась позже дифференциального исчисления. Концепция производной восходит к работам Исаака Ньютона (1642 — 1727) и Готтфрида Лейбница (1646 — 1716). Исаак Ньютон называл производную *"флюксией"*. Он обозначал производную и вторую производную функции $y = y(t)$, где t — время, как $\dot{y}$ и $\ddot{y}$.

Готтфрид Вильгельм Лейбниц ввел символы dx, dy, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ и сформулировал правила дифференцирования суммы, произведения и частного в 1675 году. Он же сформулировал правило дифференцирования сложной функции. Первый систематический свод правил дифференцирования был опубликован Эйлером в 1748 году во "Введении в анализ бесконечных". Жозеф Луи Лагранж (1736 — 1813) в 1770 году ввел удобные обозначения производных y' в статье "Новый метод решения буквенных уравнений с помощью рядов". Русский термин *"производная функции"* впервые употребил русский математик Василий Иванович Висковатов (1779 — 1812), переведя на русский язык соответствующий французский термин *"dérivée"*, используемый Лагранжем.

Огюстен Луи Коши (1789 — 1857) с 1821 года читал курс "Алгебраического анализа" в Политехнической школе и в 1823 году опубликовал "Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении". Он рассматривает непрерывную функцию $y = f(x)$ и при $\triangle x = i$ определяет производную как предел отношения бесконечно малых разностей $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$, обозначая ее как y' или $f'(x)$. Коши определяет правила дифференцирования и приводит формулы производных для многих элементарных функций. Приводит правила дифференцирования сложных и неявных функций как для функции одной, так и нескольких переменных, нахождения производных высших порядков. В 1907 году итальянский математик Улисс Дини (1845 — 1918) в "Лекциях по инфинитезимальному анализу" вводит современное понятие производной, используя определение Коши [35, 36].

3. Производные элементарных функций

Приведем производные элементарных функций без доказательства. Доказательство этих формул приведено в [1].

1) Производная постоянной: $(c)' = 0, \;\; c = const, c \in \mathbb{R}$.

2) Производная степенной функции:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \;\; (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \;\; \frac{1}{x^n} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

3) Производная экспоненциальной функции: $(e^x)' = e^x$.

4) Производная синуса: $(\sin x)' = \cos x$.

5) Производная косинуса: $(\cos x)' = -\sin x$.

6) Производная натурального логарифма: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

7) Производная тангенса: $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$.

8) Производная котангенса:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(\operatorname{ctg}^2 x + 1).$$

9) Производная арксинуса: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10) Производная арккосинуса: $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11) Производная арктангенса: $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12) Производная арккотангенса: $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

13) Производная экспоненциальной функции:

$$(a^x)' = a^x \ln a, \;\; \text{где} \;\; a \in (0, +\infty), \;\; \text{в частности} \;\; (2^x)' = 2^x \ln 2.$$

14) Производная логарифма по основанию a:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, \;\; \text{где} \;\; a \in (0, +\infty) \;\; \text{и} \;\; a \neq 1.$$

4. Правила дифференцирования

Все правила, кроме 7), приведены без доказательства. Доказательство можно найти в [1]. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, $c = const, c \in \mathbb{R}$, и все выражения, используемые в свойствах, определены.

1) *Производная функции, умноженной на константу:*
$(cf(x))' = cf'(x)$;

Пример. $(5x)' = 5 \cdot 1 = 5$.

2) *Производная суммы и разности:*
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

Пример. $(\cos x \pm \sin x)' = -\sin x \pm \cos x$.

3) *Производная произведения:*
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

Пример. $(x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$.

4) *Производная частного:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ в частности } \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)};$$

Пример. $\left(\dfrac{\ln x}{3^x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' 3^x - (3^x)' \ln x}{(3^x)^2} = \dfrac{3^x/x - 3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln x}{3^{2x}}$.

5) *Производная сложной функции:*

$$[f(g(x))]' = f'_g(g(x)) \cdot g'_x(x),$$

или

$$[f(g(x))]' = f'(t)|_{t=g(x)} \cdot g'(x).$$

Пример.

$$[\sin(\cos(x))]' = |g(x) = \cos x, f(g) = \sin g| =$$

$$= (\sin g)'_g \cdot (\cos x)'_x = \cos g \cdot (-\sin x) = -\cos(\cos x) \cdot \sin x.$$

6) *Производная функции, заданная параметрически:*

Пусть функция $y(x)$ задана параметрически, то есть через параметр $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = g(t), \\ y(t) = f(t). \end{cases}$$

Тогда

$$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{f'_t(t)}{g'_t(t)};$$

Пример.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \sin x, \\ y(t) = te^t. \end{cases}$$

Тогда

$$y'_x(x) = \frac{(te^t)'_t}{(t^2 \sin t)'_t} = \frac{e^t + te^t}{2t \sin t + t^2 \cos t}.$$

7) *Логарифмическая производная:*

Утверждение 4.1. *(Правило вычисления производной функции в степени функция).*

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \Big(g(x) \cdot \ln(f(x))\Big)' =$$

$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Доказательство. Найдем производную от $\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$. Вычислим ее как производную сложной функции

$$\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)' = \left|h(x) = f(x)^{g(x)}\right| = \Big(\ln h(x)\Big)'_h \cdot \left(f(x)^{g(x)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{h(x)} \cdot \left(f(x)^{g(x)} \right)' = \frac{1}{f(x)^{g(x)}} \cdot \left(f(x)^{g(x)} \right)'.$$

Выразим $(f(x)^{g(x)})'$ через $f(x)^{g(x)}$ и $\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)'$, причем у последнего вынесем степень из-под логарифма. Получим формулу, которую необходимо доказать. $\square$

Пример.

$$\left((\cos x)^{\sin x} \right)' = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\sin x \cdot \ln(\cos x) \right)' =$$

$$= (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} \right).$$

8) *Производная функции, заданной неявно.* Функция $y(x)$ задана неявно, если она задана как некоторое выражение от x и $y(x)$, равное нулю, то есть $F(x, y(x)) = 0$, например, $x^3 + y^3 - 4xy = 0$. Чтобы найти $y'(x)$, необходимо:

1) вычислить производную от функции $F(x, y(x))$ по переменной x;

2) приравнять эту производную к нулю;

3) решить полученное уравнение относительно $y'(x)$.

Пример. Вычислим производную функции $y(x)$, заданную неявно как

$$F(x, y(x)) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0.$$

Тогда

$$F'_x(x, y(x)) = 3x^2 + 3y^2 y'(x) - 3y - 3xy'(x) = 0.$$

Откуда при $x \neq y^2$ получим

$$y'(x) = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

Одним из примеров использования производной и дифференциала функции является вычисление приближенного значения корня из вещественного числа.

Пример. Найдем приближенное значение $\sqrt{9,12}$. Для решения задачи воспользуемся тем, что

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{df(x)} = 1,$$

то есть

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx df(x_0),$$

или

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + df(x_0), \;\; df(x_0) = f'(x_0)\triangle x.$$

В качестве $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$, $\triangle x = 0,12, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Получим

$$\sqrt{9,12} \approx \sqrt{9} + \frac{0,12}{2\sqrt{9}} = 3 + 0,02 = 3,02.$$

5. Раскрытие неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$

Неопределенности $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ можно эффективно устранить с помощью производной, используя так называемые два правила Лопиталя, которые также называют правилами Лопиталя-Бернулли.

Приведем правила Лопиталя без доказательства. За доказательством можно обратиться к [1].

Теорема 5.1. *(Первое правило Лопиталя или раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$ при $x \to x_0$). Пусть:*

1) *$f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $\delta > 0$, за исключением, быть может, точки $x = x_0$, то есть в некоторой проколотой δ-окрестности точки x_0;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

3) $f'(x), g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x \neq x_0$;

4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и предел этого отношения равен пределу отношения их производных:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 5.2. *(Второе правило Лопиталя или раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to x_0$). Пусть:*

1) *$f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $\delta > 0$, $x \neq x_0$, то есть в некоторой проколотой δ-окрестности точки x_0;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$;

3) $f'(x), g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x \neq x_0$;

4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Первое и второе правила Лопиталя останутся верными при замене условия $x \to x_0$ на одно из следующих: $x \to x_0+0$, $x \to x_0-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-1+\cos 3x}{\sqrt{1-4x}-1+\ln(1+3x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 6x-1+\cos 3x)'}{(\sqrt{1-4x}-1+\ln(1+3x))'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x-3\sin 3x}{\dfrac{-4}{2\sqrt{1-4x}}-1+\dfrac{3}{1+3x}}=\big|x=0\big|=\frac{6-0}{\dfrac{-4}{2}+3}=6.$$

Правила могут применяться многократно, если после первого применения неопределенность сохраняется. Продемонстрируем на следующих примерах.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x-10\sin x-x^2}{5\sin x-5x+x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(10x-10\sin x-x^2)'}{(5\sin x-5x+x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10-10\cos x-2x}{5\cos x-5+2x}.$$

При подстановке в выражение $x=0$ снова получим неопределенность вида $(0/0)$. Еще раз используем первое правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(10-10\cos x-2x)'}{(5\cos x-5+2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{10\sin x-2}{-5\sin x+2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Пример.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{e^x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{xe^x}=0.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{ctg}5x)}{\ln(\operatorname{ctg}7x)}=\left|\frac{+\infty}{+\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\operatorname{ctg}5x))'}{(\ln(\operatorname{ctg}7x))'}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 5x} \cdot \dfrac{-5}{\sin^2 5x}}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 7x} \cdot \dfrac{-7}{\sin^2 7x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \operatorname{ctg} 7x \cdot \sin^2 7x}{7 \operatorname{ctg} 5x \cdot \sin^2 5x}.$$

После сокращения $\sin 7x$ и $\sin 5x$ умножим числитель и знаменатель на 2 и воспользуемся формулой синуса двойного угла $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$. Получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{5 \dfrac{\cos 7x}{\sin 7x} \cdot \sin^2 7x}{7 \dfrac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \sin^2 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \sin(14x)}{7 \sin(10x)}.$$

Последний предел вычисляется с помощью замечательного предела или с помощью первого правила Лопиталя. Используем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(5 \sin(14x))'}{(7 \sin(10x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{(5 \cdot 14 \cos(14x))}{(7 \cdot 10 \cos(10x))} = 1.$$

Историческая справка. Правило Лопиталя было изначально разработано Иоганном Бернулли (1655 — 1705), который рассказал о нем в письме французкому математику Гийому Франсуа Лопиталю (1661 — 1704), опубликовавшему в 1696 году это правило в своем учебнике по дифференциальному исчислению [35, 36].

6. Ряды Тейлора и Маклорена

Определение 6.1. *О-малым от x степени n* (обозначается как $\overline{\overline{o}}(x^n)$) называется многочлен, включающий члены степени выше n. То есть $\overline{\overline{o}}(x^n) = a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + a_3 x^{n+3} + ...$, где $a_1, a_2, a_3, ... \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные коэффициенты.

Пример. $\overline{\overline{o}}(x^3) = a_1 x^4 + a_2 x^5 + a_3 x^6 + ...$

Пример. $\overline{\overline{o}}((x-x_0)^2) = a_1(x-x_0)^3 + a_2(x-x_0)^4 + a_3(x-x_0)^5 + ...$

Историческая справка. Обозначение $\overline{\overline{o}}(x^n)$ было введено немецким математиком Эдмундом Георг Герман Ландау (1877 — 1938) в 1909 году, в связи с чем $\overline{\overline{o}}(x^n)$ называют символом Ландау. Обозначение произошло от немецкого слова *"Ordnung"*, что означает "порядок" [38,39].

Определение 6.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема два раза в точке $x = x_0$. Тогда *второй производной функции* $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется производная от первой производной

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = (f'(x_0))'.$$

Аналогичным образом индуктивно определяется $f^{(n)}(x_0)$ — n-ая производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Определение 6.3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$ достаточное количество раз. Тогда n-ая производная функции $f(x)$ в точке x_0 определяется как $f^{(n)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0)$.

Определение 6.4. *Многочленом Тейлора или рядом Тейлора* степени n в точке $x = x_0$ называется многочлен вида

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ... +$$

$$+ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Сформулируем важную теорему без доказательства.

Теорема 6.1. *(формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть $f(x)$ дифференцируема $n-1$ раз в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда*

в некоторой малой окрестности точки $x = x_0$ функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, то есть представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \overline{\overline{o}}((x - x_0)^n).$$

Замечание. Верность теоремы в малой окрестности точки $x = x_0$ означает $\exists\ \delta > 0, \delta \to 0$ и $\forall\, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ верно

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \overline{\overline{o}}((x - x_0)^n).$$

Определение 6.5. *Рядом Маклорена* называется случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$ (назван в честь шотландского математика Колина Маклорена (1698 — 1746)), то есть

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, в том числе формулу Маклорена, используют для вычисления пределов и нахождения аппроксимации функции с высокой точностью вблизи точки разложения. Запишем формулы Маклорена для элементарных функций.

Утверждение 6.1. *(Формула Маклорена для элементарных функций).*

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + \overline{\overline{o}}(x^n);$

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+2})$;

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+1})$;

4) $(1+x)^m = 1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+$

$$+ ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + \overline{\overline{o}}(x^n);$$

5) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \overline{\overline{o}}(x^n)$.

Доказательство. Чтобы доказать эти формулы, необходимо вычислить n производных в точке $x_0 = 0$.

1) Если $f(x) = e^x$, то все ее производные равны e^x, а в точке $x_0 = 0$ равны 1. Тогда по теореме (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) в малой окрестности точки $x_0 = 0$ получим

$$e^x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\overline{\overline{o}}(x^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \overline{\overline{o}}(x^n),$$

что и необходимо доказать. Пункт 1) доказан.

Аналогичные шаги следует предпринять для доказательства остальных пунктов, рассматривая значения производных функций $\sin x, \cos x, (1+x)^m, \ln(1+x)$ в точке $x = 0$ и применяя формулу Тейлора.

2) Если $f(x) = \sin x$, получим

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1;$$

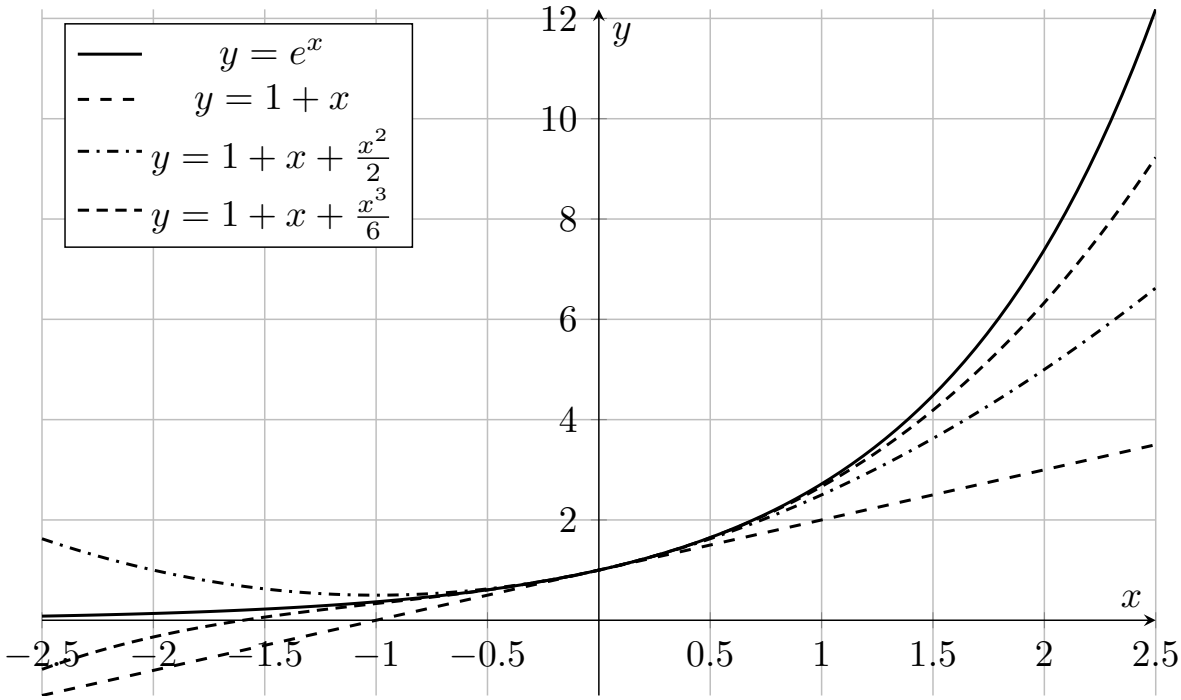

Рис. 6.1. График функции $y = e^x$ и её разложения в ряд Маклорена до третьего члена

$$f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f'''(0) = -1;$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

С четвертой производной начинается повторение. Тогда по теореме (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) в малой окрестности точки $x = 0$ получим

$$\sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \overline{\overline{o}}(x^n) =$$
$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+2}) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+2}).$$

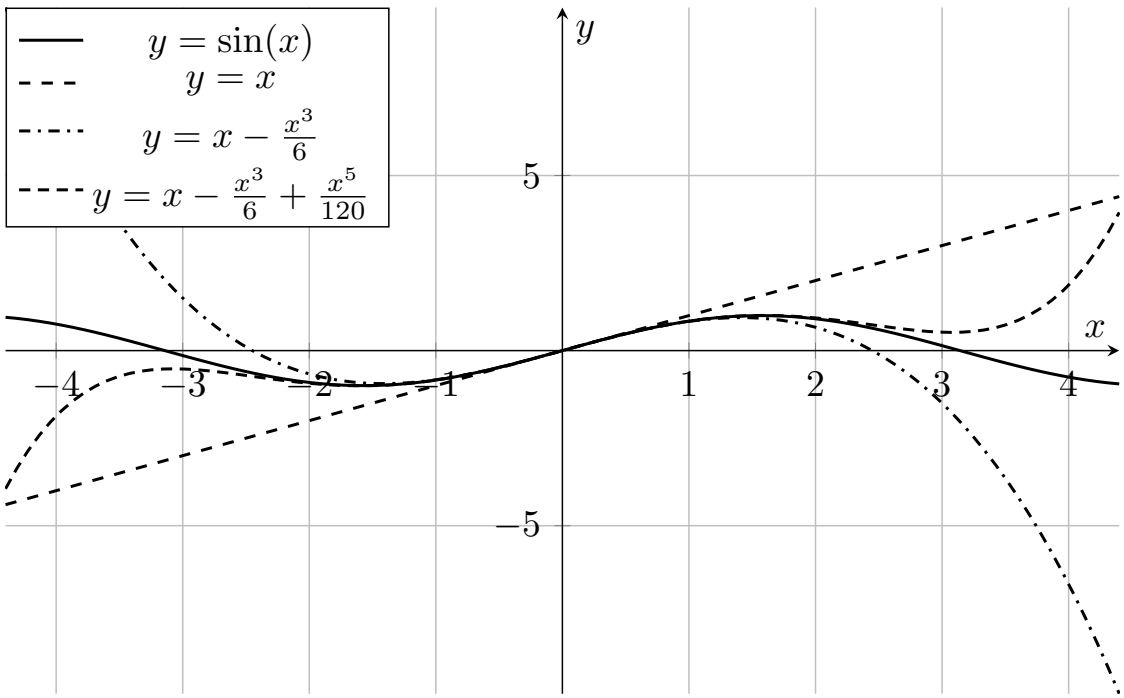

Рис. 6.2. График функции $y = \sin(x)$ и её разложения в ряд Маклорена до третьего члена

Пункт 2) доказан.

3) Аналогично докажем оставшиеся пункты. Если $f(x) = \cos x$, получим

$$f(x) = \cos x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \sin x, \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 1.$$

С четвертой производной начинается повторение. В итоге

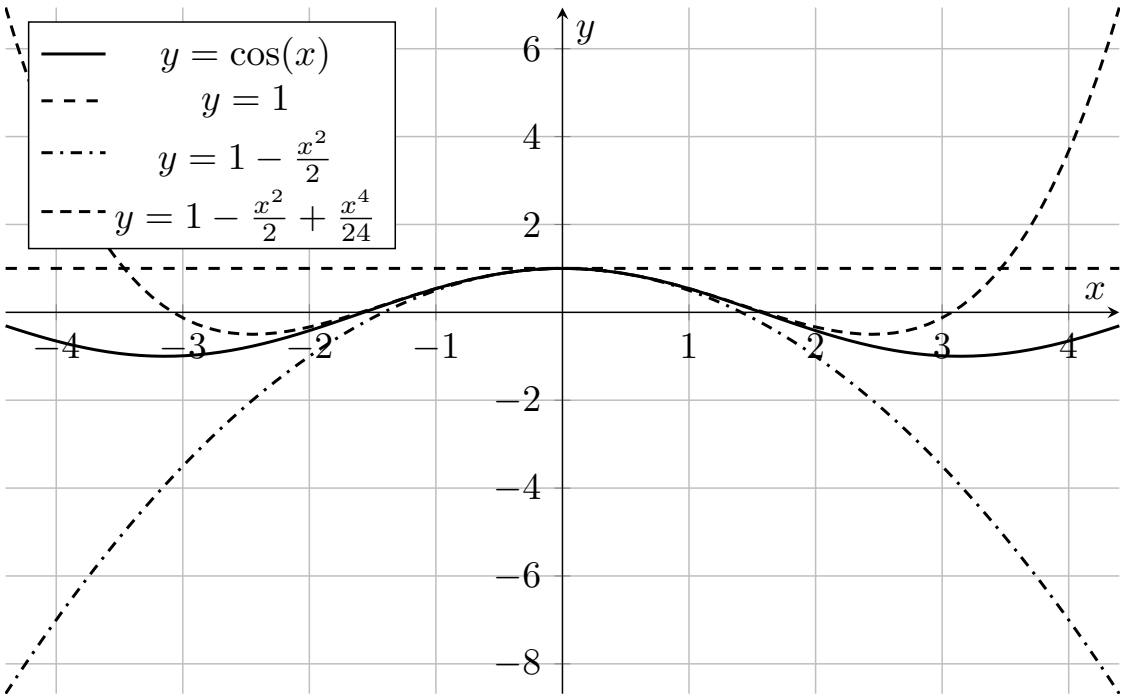

Рис. 6.3. График функции $y = \cos(x)$ и её разложения в ряд Маклорена до третьего члена

получим

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+1}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+1}).$$

Доказали 3).

4) Если $f(x) = (1+x)^m$ получим

$$f(x) = (1+x)^m, \;\; f(0) = 1;$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \;\; f'(0) = m;$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \;\; f''(0) = m(m-1);$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \;\; f'''(0) = m(m-1)(m-2).$$

В итоге получим

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...+$$

$$+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + \overline{\overline{o}}(x^n).$$

Пункт 4) доказан.

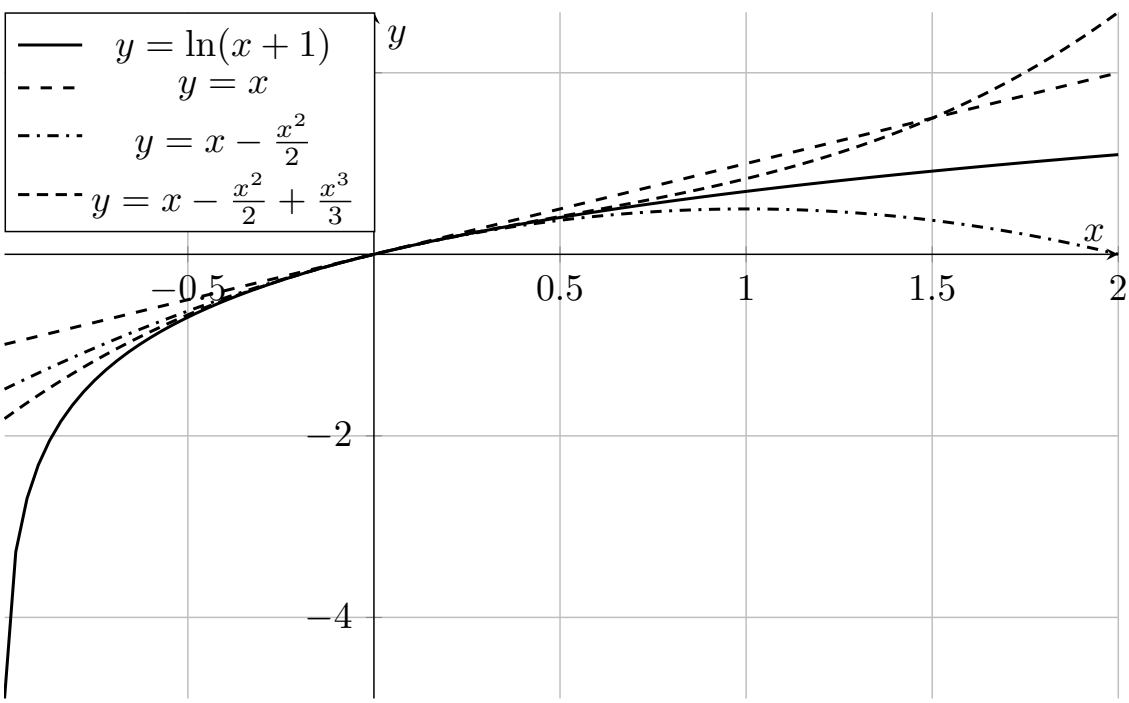

Рис. 6.4. График функции $y = \ln(x+1)$ и её разложения в ряд Маклорена до третьего члена

5) Если $f(x) = \ln(1+x)$ получим

$$f(x) = \ln(1+x), \;\; f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \;\; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = 2 \ \frac{1}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2;$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3 \ \frac{1}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -2 \cdot 3.$$

В итоге получим

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-2 \cdot 3}{4!}x^3 + ... +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + \overline{\overline{o}}(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \overline{\overline{o}}(x^n).$$

□

Пример. Вычислим предел с помощью разложения в ряд Маклорена.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - \sin(2x^4) - 2}{\cos x^2 - 1}.$$

Разложим знаменатель в ряд Маклорена и найдем первый ненулевой член.

$$\cos x^2 - 1 = 1 - \frac{x^4}{2} + \overline{\overline{o}}(x^4) - 1 = -\frac{x^4}{2} + \overline{\overline{o}}(x^4).$$

Затем разложим все функции числителя в ряд Маклорена до x^4. Получим

$$e^{x^2} + e^{-x^2} - \sin(2x^4) - 2 =$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \overline{\overline{o}}(x^4) + 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \overline{\overline{o}}(x^4) - 2x^4 + \overline{\overline{o}}(x^4) - 2 =$$

$$= -x^4 + \overline{\overline{o}}(x^4).$$

Исходный предел примет вид

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^4+\overline{\overline{o}}(x^4)}{-\dfrac{x^4}{2}+\overline{\overline{o}}(x^4)}.$$

Поделим числитель и знаменатель на x^4, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+\overline{\overline{o}}(1)}{-\dfrac{1}{2}+\overline{\overline{o}}(1)}=2,$$

так как $\overline{\overline{o}}(1)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...\to 0$ при $x\to 0$.

Историческая справка. Ряд Тейлора был известен задолго до публикаций Брука Тейлора (1685 — 1731) в 1715 году. До Тейлора его использовал индийский математик Брахмагупта (598 — 670), а также Джеймс Грегори (1638 — 1675) и Исаак Ньютон (1642 — 1727). Ряды Тейлора применяются при аппроксимации (приближении) функций многочленами. В частности, линеаризация уравнений происходит путем разложения в ряд Тейлора и отсечения всех членов выше первого порядка [35].

7. Исследование функций

Перед тем как перейти к исследованию функций с помощью производной и построению их графиков, сформулируем важные определения и утверждения, необходимые для анализа функций.

Определение 7.1. *Областью определения* функции $f(x)$, обозначаемой D_f, называется множество всех значений x, на котором эта функция задана.

Определение 7.2. *Областью значений* функции $f(x)$, обозначаемой E_f, называется множество всех значений $y=f(x)$, которые принимает функция в своей области определения.

Определение 7.3. Функция называется *периодичной,* если $\exists\ T > 0$, такое что $f(x+T) = f(x),\ \ \forall\, x \in D_f$.

Определение 7.4. Функция называется *четной,* если для всех $x \in D_f$ верно $f(-x) = f(x)$.

Определение 7.5. Функция называется *нечетной,* если для всех $x \in D_f$ верно $f(-x) = -f(x)$.

Определение 7.6. Функция называется *функцией общего вида*, если она не является ни четной, ни нечетной.

Замечание. Периодическая функция повторяет свои значения через каждый интервал, равный T. График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции не меняется при повороте графика на 180^0 относительно начала координат.

Определение 7.7. *Нулями функции* называются значения x, при которых $f(x) = 0$. Эти точки являются точками пересечения графика функции с осью Ox.

А точка с координатами $(0, f(0))$ является точкой пересечения с осью Oy.

Определение 7.8. Точка x называется *стационарной,* если в этой точке производная равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$

Сформулируем критерии монотонности функции на интервале без доказательства. Доказательство можно найти в [1].

Утверждение 7.1. *(Критерий монотонности функции на интервале). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b).*

1) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *не убывала на интервале* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

2) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *возрастала на интервале* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *и кроме того,* $f'(x) \not\equiv 0$ *ни на каком интервале* $(a_1, b_1) \subset (a, b)$.

3) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *не возрастала на интервале* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$.

4) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *убывала на интервале* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *и* $f'(x) \not\equiv 0$ *ни на каком интервале* $(a_2, b_2) \subset (a, b)$.

Определим понятия локального минимума, локального максимума и локального экстремума. Будем считать, что $f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$.

Определение 7.9. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется точкой локального минимума, если существует проколотая δ-окрестность точки, в которой

$$\triangle f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geq 0,$$

то есть значения функции в соседних точках к x_0 в этой δ-окрестности больше или равны значению функции в самой точке.

Определение 7.10. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется точкой локального максимума, если существует проколотая δ-окрестность точки, в которой

$$\triangle f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leq 0,$$

то есть значения функции в соседних точкая к x_0 в этой δ-окрестности меньше или равны значению функции в самой точке.

Определение 7.11. Точки локального максимума и минимума называются точками *локального экстремума* или *экстремумами.*

Сформулируем две важные теоремы без доказательства.

Теорема 7.1. *(Теорема Ферма). Пусть точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция $f(x)$ определена и непрерывна, является точкой экстремума этой функции, и пусть $\exists\ f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$, то есть x_0 — стационарная точка.*

Теорема 7.2. *(Свойство изменения знака производной в экстремумах). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, и эта точка является стационарной, то есть $f'(x_0) = 0$. Тогда*

1) *если $f'(x) > 0$ слева от x_0 и $f'(x) < 0$ справа от x_0, то x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$;*

2) *если $f'(x) < 0$ слева от x_0 и $f'(x) > 0$ справа от x_0, то x_0 — точка локального минимума функции $f(x)$;*

3) *если $f'(x)$ имеет справа и слева от точки x_0 один и тот же знак, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.*

Последняя теорема утверждает, что в экстремумах функция меняет свою монотонность. В локальном максимуме она из возрастающей (или неубывающей) становится убывающей (или невозрастающей), а в точке локального минимума — наоборот.

Следовательно, можно сформировать *правило поиска локального минимума и локального максимума*:

Сначала находим стационарные точки функции. Если производная функции меняет знак с "+" на "−" при переходе слева направо через стационарную точку x_0, то x_0 — точка локального максимума, а если с "−" на "+", то локальный минимум. Если знак не меняется, то в стационарной точке нет экстремума.

Перейдем к понятию выпуклости функции.

Определение 7.12. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* на интервале (a, b), если график функции лежит выше касательной для любой точки данного интервала, и *выпуклой вниз,* если график функции лежит ниже касательной для любой точки данного интервала.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ является выпуклой вниз, а $f(x) = -x^2$ — выпуклой вверх.

Замечание. График выпуклой вверх функции напоминает холм, а выпуклой вниз — яму.

Сформулируем без доказательства теорему о выпуклости функции.

Теорема 7.3. *(Теорема о выпуклости функции).*

1) *Если функция* $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *то* $f(x)$ *выпуклая вниз на* (a, b).

2) *Если функция* $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *то* $f(x)$ *выпуклая вверх на* (a, b).

Определение 7.13. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой перегиба* дифференцируемой функции $f(x)$, если существует проколотая δ-окрестность точки x_0 такая, что график функции в правой и в левой ее полуокрестностях имеет различное направление выпуклости.

Сформулируем без доказательства необходимое условие перегиба.

Теорема 7.4. *(Необходимое условие перегиба). Если* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *имеет вторую производную и точка* x_0 *— точка перегиба, то*

$$f''(x_0) = 0.$$

Пример. Для функции $f(x) = x^3$ точка $x = 0$ является точкой перегиба.

Осталось разобраться с асимптотами.

Определение 7.14. Прямая $x = a$ на плоскости Oxy называется *вертикальной асимптотой* функции $f(x)$, если один из пределов $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ равен $\pm\infty$.

Пример. Для функции $f(x) = 1/x$ прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Определение 7.15. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если

$$f(x) - kx - b \to 0 \text{ при } x \to +\infty \text{ (или } x \to -\infty),$$

причем, если $k = 0$, то асимптота называется *горизонтальной асимптотой.*

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 7.5. *(Критерий существования наклонной асимптоты). Для существования наклонной асимптоты $y = kx+b$ при $x \to +\infty$ у функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to +\infty$ одновременно выполнялись два условия:*

1) $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \ \ k \in \mathbb{R};$
2) $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx), \ \ b \in \mathbb{R}.$

Аналогичная теорема верна при $x \to -\infty$.

8. Исследование и построение графика

Для исследования и построения графика функции $f(x)$ следуйте схеме:

1) **Область определения и асимптоты:**

— Записать область определения функции D_f.

— Найти вертикальные асимптоты.

2) **Симметрия и периодичность:**

— Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

— Учесть эти особенности при исследовании функции и построении графика.

3) **Пересечения с осями:**

— Найти точки пересечения графика с осями Ox и Oy.

4) **Знаки функции:**

— Вычислить знаки функции на всей области определения.

5) **Монотонность и экстремумы:**

— Выявить экстремумы.

— Определить их характер (локальный максимум или минимум).

— Определить участки монотонности.

6) **Выпуклость и точки перегиба:**

— Выявить точки перегиба.

— Найти промежутки выпуклости.

7) **Поведение у вертикальной асимптоты. Поведение на плюс и минус бесконечности. Горизонтальные или наклонные асимптоты.**

— Исследовать поведение функции вблизи вертикальной асимптоты.

— Вычислить k и b на плюс и минус бесконечности.

Если $k = 0$, имеем горизонтальную асимптоту. Если $k = c$, $c \in \mathbb{R}$, — наклонную асимптоту. Если $k = \pm\infty$ или $b = \pm\infty$ — асимптоты нет.

8) **Эскиз графика:**

— Построить эскиз графика, отразив все перечисленные особенности функции.

— Определить по графику область значений функции E_f.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ и построить эскиз графика.

1) **Область определения и вертикальные асимптоты.** Функция определена при всех $x \neq -1$. Поскольку знаменатель функции обращается в нуль при $x = -1$, то функция имеет вертикальную асимптоту при $x = -1$.

2) **Исследование четности функции.**

$$f(-x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{-x + 1}.$$

Тогда $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Значит, функция $f(x)$ общего вида.

3) **Пересечение с осями.** Чтобы найти нули функции $f(x)$, решим уравнение:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = 0, \;\; x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицательный:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

Уравнение не имеет вещественных корней, следовательно, функция $f(x)$ не имеет нулей. Точек перечения графика с осью OX нет. Функция пересекается с осью OY в точке $(0, f(0))$, причем $f(0) = \dfrac{0^2 + 2 \cdot 0 + 2}{0 + 1} = 2$.

4) **Знаки функции.** Знак дроби меняется в нулях числителя и знаменателя. Так, у функции нет нулей числителя, значит, знак функции меняется в точке $x = -1$. Слева от $x = -1$ функция принимает отрицательные значения, то есть график находится ниже оси OX, а справа от $x = -1$ функция принимает положительные значения, значит, находится выше оси OX.

5) **Исследование монотонности.** Найдем производную функции, используя правило дифференцирования частного:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)'(x + 1) - (x^2 + 2x + 2)(x + 1)'}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 2)(x + 1) - (x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - x^2 - 2x - 2}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}.$$

Найдем стационарные точки, приравняв производную к нулю:

$$\frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2} = 0,$$

$$x = -2 \quad \text{или} \quad x = 0.$$

Исследуем знак производной слева и справа от стационарных точек. Слева от $x = -2$ и справа от $x = 0$ знак производной положительный, значит, функция возрастает, а между $x = -2$ и

$x = -1$, а также между $x = -1$ и $x = 0$ функция имеет отрицательную производную, значит, убывает на этих промежутках. Найдем значения функции в критических точках:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 2}{-2 + 1} = \frac{4 - 4 + 2}{-1} = -2, \quad f(0) = 2.$$

6) **Вторая производная и выпуклость.** Найдем вторую производную, используя правило дифференцирования частного:

$$f''(x) = \left(\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{((x(x+2))'(x+1)^2 - x(x+2)((x+1)^2)')}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2x(x+2)(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 - (2x^3 + 6x^2 + 4x)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Исследуем знак второй производной для анализа выпуклости и вогнутости функции. Слева от $x = -1$ вторая производная отрицательна, значит, функция выпукла вверх, а справа от $x = -1$ вторая производная положительна, значит, функция выпукла вниз.

7) **Поведение у вертикальной асимптоты и поведение на бесконечности.**

Функция $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту при $x = -1$, поскольку знаменатель обращается в нуль при $x = -1$, а числитель при этом остаётся ненулевым. Изучим поведение функции вблизи точки $x = -1$ слева и справа.

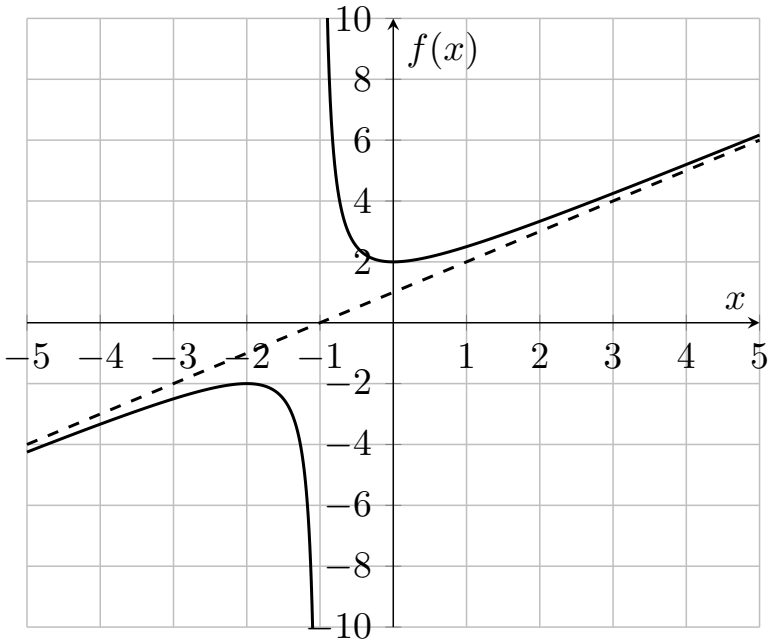

Рис. 6.5. График функции $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

При приближении к $x = -1$ слева, то есть $x \to -1 - 0$, числитель подходит к 1, а знаменатель $x+1$ стремится к $0-0$ и вся дробь стремится к $-\infty$. При приближении к $x = -1$ справа, то есть $x \to -1+0$, числитель подходит к 1, а знаменатель $x+1$ стремится к $0+0$ и вся дробь стремится к $+\infty$.

Исследуем поведение на плюс бесконечности. Проверим наличие наклонной или горизонтальной асимптот, найдя k и b.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x^2+x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1.$$

Соответственно, $y = x + 1$ является наклонной асимптотой на

плюс бесконечности. Аналогичное исследование на минус бесконечности даст тот же результат и, как следствие, $y = x + 1$ — наклонная асимптота на минус бесконечности.

8) **График функции и область значений.** График функции представлен на рисунке 6.5. Исходя из графика область значений функции $y \in E_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

9. Задачи для закрепления материала

1. Построить график функции:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$;

б) $f(x) = (x - 1)\ln(1 - x)$;

в) $f(x) = xe^{-x}$;

г) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$;

д) $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{e^{4x} + 1}$;

е) $f(x) = e^{-x^2}$;

ж) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$;

з) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1}$;

и) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}$;

к) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

л) $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$.

2. Разложить в ряд Маклорена до x^7 следующие функции:

а) $f(x) = \arcsin x$;

б) $f(x) = \arccos x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;
д) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

3. Вычислить следующие пределы с помощью разложения в ряд Маклорена:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(xe^{x^2/6}) - x\cos x^2}{x^2 \cdot \ln(1+x^3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\cos x) + x\ln(1+2x^2/3) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^x - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{\sin^4 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/(1+x)} - \cos(1-e^{-x}) - \operatorname{arctg} x}{\sin^4 x}$.

4. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n - 1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$, $n > 0$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}$.

5. Вычислить приращения и дифференциалы функций:

а) $y = 2x^2 - x$, $x = 1$, $\Delta x = 0.01$;

б) $y = x^3 + 2x$, $x = -1$, $\Delta x = 0.02$;

в) $y = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{18}$.

Глава 7.

Дополнительно

1. Список теоретических вопросов к экзамену

1. **Множества, операции над ними:** объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Примеры. Равенство множеств. Пример доказательства равенства множеств.

2. **Декартово произведение и отображения.** Пример декартового произведения и отображения.

3. **Инъекции, сюръекции, биекции**. Примеры. Определения функции и графика функции.

4. **Эквивалентность или равномощность множеств. Счетные множества**. Примеры. Доказательство счетности множества целых чисел.

5. **Комплексные числа.** Алгебраическая форма . Мнимая единица. Действительная и мнимая части, сопряженное комплексное число и его связь с операцией деления. Примеры.

6. **Полярные координаты** на плоскости.

7. **Модуль и аргумент комплексного числа**. Тригонометрическая форма. Пример.

8. **Доказательство эквивалентности множества комплексных чисел и плоскости $\mathbb{R}^2$**.

9. **Корень n-ой степени из комплексного числа**.

10. **Аксиоматика действительных чисел**. Аксиомы сложения, вычитания, умножения и сравнения.

11. **Неравенство треугольника**. Доказательство.

12. **Метод математической индукции**. Пример. Доказательство. База, предположение индукции, шаг индукции.

13. **Неравенство Бернулли**. Доказательство.

14. **Числовые последовательности**. Способы задания. Примеры. Определение суммы, разности, умножения и отношения последовательностей.

15. **Ограниченность последовательности**. Доказательство эквивалентности определений.

16. **Монотонность.** Типы монотонности. Критерий. Два примера.

17. **Бесконечно малые и бесконечно большие.** Примеры.

18. **Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.**

19. **Предел последовательности**. Сходящиеся последовательности. Последовательность, расходящаяся к плюс или минус бесконечности, а также к бесконечности.

20. **Свойства пределов последовательностей**.

21. **Предел функции в точке.** Предельная точка множества. Проколотая окрестность. Предел справа и предел слева.

22. **Свойства пределов функций**.

23. **Непрерывность функции**. Непрерывность на отрезке. Ограниченные функции. Ограниченные сверху и снизу функ-

ции. Свойства непрерывных функций.

24. **Монотонность функции и точки разрыва**. Примеры точек разрыва первого и второго рода.

25. **Типы неопределенностей и методы вычисления пределов.** Примеры.

26. **Замечательные пределы**. Пример вычисления пределов с помощью замечательных пределов.

27. **Приращения функции и аргумента функции**. Определение производной функции в точке. Геометрический смысл. Пример вычисления производной по определению.

28. **Производные элементарных функций**. Правила дифференцирования. Пример для каждого правила.

29. **Два правила Лопиталя.** Примеры устранения неопределенностей ноль на ноль или бесконечности на бесконечности.

30. **Исследование функции.** Область определения. Особые точки. Вертикальная асимптота. Четность. Пересечение с осями. Знаки функции.

31. **Исследование функции.** Монотонность. Экстремумы. Выпуклость. Точки перегиба. Поведение у вертикальной асимптоты. Наклонная асимптота. Область значений.

32. **Схема исследования функции и построение эскиза графика функции.**

2. Варианты коллоквиумов и экзамена

Пример варианта I-го коллоквиума

1. Множества, операции над ними: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Примеры. Равенство множеств. Пример.

2. Доказать или опровергнуть, построив контрпример, равенство множеств

$$(A \triangle C) \cup B = (A \cup B) \setminus (C \cup B).$$

3. Найти объединение, пересечение, разности и симметрическую разность подмножеств прямой $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2+2x-8 \leq 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$.

4. Найти все комплексные корни степени 3 из $-8i$.

5. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\frac{(3+5i)(1-4i)-(3+i)(1+2i)}{(1-2i)^2+(1+4i)^2}.$$

6. Вычислить, представив в алгебраической форме,

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2i-2}\right)^{2021}.$$

Пример варианта II-го коллоквиума

1. Метод математической индукции. База, предположение и шаг индукции. Доказательство.

2. Доказать формулу

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 + ... + (n+1) \cdot 3n = n(n+1)(n+2).$$

3. Исследовать последовательность на монотонность

$$a_n = \frac{3n+4}{4n-31}.$$

4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-3)^2+(n-4)^2}{3n^2+12n+4}$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n\cos(5n^2+4^n)}{(n-4)^3-(n+3)^3}$.

6. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^6+9n^2-2}-\sqrt{n^6-4n^3+11}$.

Пример варианта III-го коллоквиума

1. Предельная точка множества. Проколотая окрестность. Предел функции в точке. Предел справа и предел слева.

2. Вычислить предел без применения правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3x^3+2x^2-18}{x^3-10x^2+29x-24}.$$

3. Вычислить предел без применения правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{16x^2}-1}{1-\cos(4x)}.$$

4. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-\cos(3x)}{x\sin(3x)}.$$

5. Вычислить производную функции, упростив ответ,

$$\ln(x+\sqrt{x^2+25}).$$

6. Вычислить производную функции y'_x, упростив ответ,

$$x(t)=\operatorname{arctg}(7t),\ \ y(t)=\ln(1+49t^2).$$

Пример варианта IV-го коллоквиума

В следующих задачах найти область определения, вертикальные асимптоты, тип функции, точки пересечения с осями координат и промежутки знакопостоянства, точки экстремума и промежутки монотонности, промежутки выпуклости и точки перегиба, наклонные асимптоты, область значений и нарисовать эскиз графика функции:

1. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+10}{x+3}$;

2. $f(x) = \dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}$;
3. $f(x) = (x-3)^2 \ln(3-x)$.

Пример варианта экзаменационной работы

1. Доказать или опровергнуть, построив контрпример, равенство множеств

$$(A \triangle C) \triangle B = (A \triangle B) \cap (C \triangle B).$$

2. Представить комплексное число в алгебраической форме

$$\frac{(1+2i)^4 - (3+i)^4}{(1-2i)^3 + (1+2i)^3}.$$

3. Исследовать функцию $f(x) = e^{-x^2/4}$ и построить эскиз ее графика.

4. Используя правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1 + \ln(1-5x^2)}{e^{5x} - 1 - \sin 5x}.$$

5. Вычислить производную функции, упростив полученное выражение

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{\cos(5x)-1}{\cos(5x)+1}}.$$

6. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+4}\right)^{4n-6}$.

Глава 8.

Список литературы

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Наука.

2. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. I, II. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Фазис, 1997. Ч. II. М.: Наука, 1990.

3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. I, II, III. М.: Высшая школа, 1981.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс математического анализа. Т. I, II, III. М.: Физматгиз, 1962.

5. Ивашев-Мусатов О. С. Начала математического анализа: Учеб. пособие. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, ФИМА, 2002. — 256 с.

6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука. 1990.

7. Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Мироненков А. А., Попеленский Ф. Ю., Словеснов А. В., Хизгияев С. В. Сборник задач по математическому анализу. Первый семестр: учебное пособие для вузов. - Вологда: ВолНЦ РАН, 2020, — 90 с.

8. Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Мироненков А. А., Попеленский Ф. Ю., Словеснов А. В., Хизгияев С. В. Сборник задач по математическому анализу. Второй семестр: учебное пособие для вузов. - Вологда: ВолНЦ РАН, 2020, — 86 с.

9. Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Мироненков А. А., Попеленский Ф. Ю., Словеснов А. В., Сборник задач с решениями по математическому анализу и линейной алгебре. Учебное пособие для социально-экономических специальностей. М.: МАКС Пресс, 2015 — 90 с.

10. Бурбаки. Н. Основания математики. Логика. Теория множеств // Очерки по истории математики / И. Г. Башмакова (перевод с французского). — М.: Издательство иностранной литературы, 1963. — С. 37—53. — 292 с. — (Элементы математики).

11. Кантор. Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — 430 с. — (Классики науки). — 3450 экз..

12. Коэн П. Дж. Об основаниях теории множеств. P. J. Cohen, Comments on the foundations of set theory, Proc. Sym. Pure Math. 13:1 (1971), 9—15. // Успехи математических наук / Ю. И. Манин (перевод). — М., 1974. — Т. XXIX, вып. 5 (179). — С. 169 — 176.

13. Куратовский К., Мостовский А.. Теория множеств / Перевод с английского М. И. Кратко под редакцией Тайманова А. Д. — М.: Мир, 1970. — 416 с.

14. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. — М.: Наука, 1965. — 232 с. — 2500 экз.

15. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств / Перевод с английского Ю. А. Гастева под редакцией Есенина-Вольпина А. С. — М.: Мир, 1966. — 556 с.

16. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. — Изд. 2-е, испр.. — М.: URSS, 2010. — 296 с.

17. Виленкин Н. Как возникло и развивалось понятие функции // "Квант" : науч.-поп. физ.-мат. журн. — М.: "Наука», 1977. — № 7. — С. 41—45.

18. Cardano G. Ars magna or The Rules of Algebra. — Dover, 1993. — 308 p.

19. Гиндикин С. Г. Великое искусство // Рассказы о физиках и математиках. — издание 3-е, расширенное. — М.: МЦНМО, 2001. — С. 8—42. — 448 с.

20. История математики. С древнейших времен до начала Нового времени // История математики / Под редакцией А. П. Юшкевича, в трех томах. — М.: Наука, 1970. — Т. I. — 352 с.

21. Cajori F. (1929). "448–449. Factorial "n" ". A History of Mathematical Notations, Volume II: Notations Mainly in Higher Mathematics. The Open Court Publishing Company. pp. 71—77.

22. Паскаля треугольник // Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Савин А. П. — М.: Педагогика, 1985. — С. 230—232. — 352 с.

23. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979. — 48 с. — (Популярные лекции по математике). — 200 000 экз.

24. Бином Ньютона // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890 — 1907.

25. Ващенко-Захарченко М.Е. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями // Киев: Типография Императорского Университета Св. Владимира, 1880. — XV, 747 с.

26. Cajori F. A History of Mathematical Notations. Vol. 2 (1929 reprint). — NY: Cosimo, Inc., 2007. — С. 293—314. — 392 p.

27. Дюгак П. ("Историко-математические исследования" вып. 18, Москва, 1973 г.) "Понятие предела и иррациональные числа. Концепция Шарля Мерэ и Карла Вейерштрасса". 176—180. Доклад на XIII Международном конгрессе по исто-

рии науки. Москва 1971 г.

28. Бурбаки Н. Очерки по истории математики — М., 1963.

29. Синкевич Г. И. История правил дифференцирования // Наука и техника: Вопросы истории и теории. Материалы XXXIV международной годичной конференции Санкт-Петербургского отделения Российского национального комитета по истории и философии науки и техники РАН (25–29 ноября 2013). — Санкт-Петербург. — 2013. — с. 151–152.

30. Bardi, J. S. The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time. Basic Books, 2006.

31. Grattan-Guinness I. "The Search for Mathematical Roots, 1870 — 1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Godel." Princeton University Press, 2001.

32. Ferreirós J. "Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics." Birkhäuser, 2007.

33. Хинчин А. Я. "Математическая литература по истории математики." М.: Изд-во АН СССР, 1952.

34. Gupta A. K. "The Life of Abraham de Moivre." Springer, 2020.

35. Boyer C. B. "A History of Mathematics." Wiley, 2011.

36. Stillwell J. "Mathematics and Its History." Springer, 2010.

37. Cooke R. "The History of Mathematics: A Brief Course." Wiley, 2002.

38. Ландау Э. "Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (Справочник по теории распределения простых чисел). 1909.

39. Ландау Э. "Vorlesungen über Zahlentheorie" (Лекции по теории чисел). 1927.

Учебное издание

Хизгияев Семен Владимирович

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие для вузов

Часть I

Подписано в печать 03.10.2024.
Формат $60\times84^{1/16}$. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 9,22. Тираж 200 экз. Заказ № 33.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Вологодский научный центр Российской академии наук»
(ФГБУН ВолНЦ РАН)
160014, г. Вологда, ул. Горького, 56а
Телефон (8172) 59-78-03, e-mail: `common@volnc.ru`

ISBN 978-5-93299-606-5