

Темы курсовых и дипломных работ под руководством М. В. Житлухина

1. Симулирование случайных процессов с использованием сигнатурных методов

Во многих приложениях теории случайных процессов (например, оценке опционов, составлении инвестиционного портфеля, и др.) приходится применять методы Монте–Карло – для этого симулируются траектории случайных процессов и по траекториям вычисляются математические ожидания интересующих случайных величин.

Важной проблемой является необходимость точной спецификации вероятностного распределения случайного процесса, используемого для симуляций. В подавляющем большинстве приложений используется параметрический подход: рассматривается некоторый класс моделей, зависящих от параметра, эти параметры оцениваются по наблюдаемым данным, а затем, используя модели с полученными значениями параметров, проводятся симуляции. Простым примером является симулирование геометрического броуновского движения, в котором коэффициенты сноса и волатильности оценены по данным.

Недостатком такого подхода является то, что для процессов описывающих сложные явления достаточно трудно подобрать класс моделей, который бы охватывал все важные свойства наблюдаемых данных.

В течение последних нескольких лет стали активно развиваться непараметрические подходы к симуляции случайных процессов. Один из таких подходов предложен в работе [1]. Ключевой ее идеей является применение некоторого преобразования к наблюдаемым траекториям – вычисление так называемой сигнатуры траектории, а затем обучение вариационного автокодировщика и использование его для симулирования траекторий. Теория сигнатур зародилась в конце 1990-х гг. в связи с исследованиями так называемых “грубых траекторий”. Недавно (начиная с 2010-х г.), было обнаружено, что сигнатурные методы могут использоваться в различных задачах машинного обучения, так как они позволяют удобным образом описывать траектории случайных процессов или функций. Например, известны работы по использованию этих методов для распознавания иероглифов (см. [1]).

В курсовой или дипломной работе будет предложено разобраться с методами статьи [1] и обобщить их со случая одномерного процесса на случай многомерного процесса. Такое обобщение можно будет, например, использовать для симулирования пары цен – например, цены на газ и цены на акции Газпрома. Имея множество симулированных траекторий, можно изучать различные характеристики их совместного распределения.

Для восприятия результатов статьи [1] потребуется изучить основные методы теории сигнатур по работе [2], а также иметь представление об основных методах машинного обучения (например, в объеме книги [3]). Необходимо также помнить курсы теории вероятностей и случайных процессов (броуновское движение, диффузионные процессы, формула Ито, основы стохастических дифференциальных уравнений).

[1] Buehler H, Horvath B, Lyons T, Perez Arribas I, Wood B. A data-driven market simulator for small data environments. Available at SSRN 3632431. 2020 Jun 21.

[2] Chevyrev I, Kormilitzin A. A primer on the signature method in machine learning. arXiv preprint arXiv:1603.03788. 2016 Mar 11.

- [3] Géron A. Hands-on machine learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, tools, and techniques to build intelligent systems. O'Reilly Media; 2019.

2. Анализ стохастического уравнения воспроизводства со сменой режимов

Уравнение воспроизводства (динамика репликаторов, replicator dynamics equation) – это хорошо изученная модель эволюционной теории игр. Она описывает изменение численности популяций при взаимодействии индивидов различных типов (например, изменение численности хищников и травоядных). Классическим вопросом является изучение устойчивых состояний этого уравнения и их связь с равновесиями Нэша соответствующей игры. Первой работой в этом направлении была статья [1] 1978 г., где было изучено детерминистическое уравнение воспроизводства. Далее, в начале 1990-х гг., были предложены обобщения этой модели на случай, когда имеется внешнее случайное воздействие на численность популяций, см. работы [2,3].

В рамках курсовой или дипломной работы на эту тему нужно будет обобщить стохастическое уравнение из работы [3] на случай, когда внешняя сила может находиться в одном из нескольких “режимов” и случайным образом переключаться между ними. Некоторые результаты были получены в работе [4] 2015 г., но, я думаю, их можно улучшить – этому и будет посвящена курсовая или дипломная работа.

Для работы в этой области нужно знать основные результаты теории случайных процессов и, в особенности, диффузионных процессов и стохастических дифференциальных уравнений. Также необходимо иметь представления об основных понятиях теории игр (что такое игра, что такое равновесие Нэша, эволюционно устойчивые стратегии, и т.п.).

- [1] Taylor, P. D. and Jonker, L. B. (1978). Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, 40(1-2):145–156.
- [2] Foster, D. and Young, P. (1990). Stochastic evolutionary game dynamics. *Theoretical Population Biology*, 38(2):219–232.
- [3] Fudenberg, D. and Harris, C. (1992). Evolutionary dynamics with aggregate shocks. *Journal of Economic Theory*, 57(2):420–441.
- [4] Vlasic, A. (2015). Stochastic replicator dynamics subject to Markovian switching. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 427(1):235–247.