Лекция 2. Оценивание параметров. Свойства оценок

Курбацкий А. Н.

МШЭ МГУ

17 февраля 2020

Содержание

1. Ещё раз о ГС и выборке
2. Примеры оценок
3. Свойства оценок
4. Более подробно

Содержание

1. Ещё раз о ГС и выборке
2. Примеры оценок
3. Свойства оценок
4. Более подробно

Параметрические методы

Важно!

Полагаем известным, что выборка имеет распределение известной функциональной формы, но в этом распределении есть неизвестные параметры.

[1] В **непараметрическом** случае у нас не будет информации о том, что выборка имеет распределение из какого-то класса.

Параметрические методы

Важно!

Полагаем известным, что выборка имеет распределение известной функциональной формы, но в этом распределении есть неизвестные параметры.

Пример

Часто мы будем предполагать известным, что выбрка взята из нормального распределения.

[1] В **непараметрическом** случае у нас не будет информации о том, что выборка имеет распределение из какого-то класса.

Параметрические методы

Важно!

Полагаем известным, что выборка имеет распределение известной функциональной формы, но в этом распределении есть неизвестные параметры.

Пример

Часто мы будем предполагать известным, что выбрка взята из нормального распределения.

Дальнейшее исследование сводится к оценке этих параметров и дальнейшему их анализу (построение доверительных интервалов, проверке гипотез). Этот случай называется **параметрическим**[1].

[1] В **непараметрическом** случае у нас не будет информации о том, что выборка имеет распределение из какого-то класса.

Что нас интересует?

- Как правило, выводы касаются некоторых характеристик генеральной совокупности (среднего, дисперсии, доли признака), поэтому по выборке мы ищем оценки для этих характеристик.

Что нас интересует?

- Как правило, выводы касаются некоторых характеристик генеральной совокупности (среднего, дисперсии, доли признака), поэтому по выборке мы ищем оценки для этих характеристик.
- Выборка объёма n из заданной генеральной совокупности получается при случайном выборе n субъектов из генеральной совокупности и фиксации значений исследуемого признака. Короче, выборка - это набор $x_1, \ldots, x_n$ наблюдений значений изучаемой характеристики.

Что нас интересует?

- Как правило, выводы касаются некоторых характеристик генеральной совокупности (среднего, дисперсии, доли признака), поэтому по выборке мы ищем оценки для этих характеристик.
- Выборка объёма n из заданной генеральной совокупности получается при случайном выборе n субъектов из генеральной совокупности и фиксации значений исследуемого признака. Короче, выборка - это набор $x_1, \ldots, x_n$ наблюдений значений изучаемой характеристики.

Пример

Если изучается распределение роста взрослых мужчин в Минске, то генеральная совокупность – это все возможные значения роста жителей Минска. Если у нас нет информации о росте жителей, то можно взять и самим начать измерять рост людей в городе пока не надоест. Данные о росте этих жителей называются выборкой из генеральной совокупности.

Содержание

1. Ещё раз о ГС и выборке
2. Примеры оценок
3. Свойства оценок
4. Более подробно

Что такое оценка?

- Случайная выборка $x_1, \ldots, x_n$ рассматривается как совокупность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих то же распределение, что и генеральная совокупность. В частности, далее будет часто использоваться такой факт, что их математические ожидания и дисперсии равны $E(x_i) = \mu$, $Var(x_i) = \sigma^2$ при каждом i.

[2] Мы сможем понять, в частности, почему выборочная дисперсия в первой теме вычислялась по формуле $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$, а не по формуле $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$.

Что такое оценка?

- Случайная выборка $x_1, \ldots, x_n$ рассматривается как совокупность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих то же распределение, что и генеральная совокупность. В частности, далее будет часто использоваться такой факт, что их математические ожидания и дисперсии равны $E(x_i) = \mu$, $Var(x_i) = \sigma^2$ при каждом i.
- Если мы хотим оценить теоретическое среднее значение $\mu = E(X)$ рассматриваемой генеральной совокупности на основании выборки $x_1, \ldots, x_n$, то можно посчитать выборочное среднее $\bar{x}$. Потом мы узнаем, почему эта оценка часто лучше остальных.

[2] Мы сможем понять, в частности, почему выборочная дисперсия в первой теме вычислялась по формуле $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$, а не по формуле $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$.

Что такое оценка?

- Случайная выборка $x_1, \ldots, x_n$ рассматривается как совокупность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих то же распределение, что и генеральная совокупность. В частности, далее будет часто использоваться такой факт, что их математические ожидания и дисперсии равны $E(x_i) = \mu$, $Var(x_i) = \sigma^2$ при каждом i.
- Если мы хотим оценить теоретическое среднее значение $\mu = E(X)$ рассматриваемой генеральной совокупности на основании выборки $x_1, \ldots, x_n$, то можно посчитать выборочное среднее $\bar{x}$. Потом мы узнаем, почему эта оценка часто лучше остальных.
- По традиции параметр обозначается греческой буквой θ, а её оценка - $\hat{\theta}$.

[2] Мы сможем понять, в частности, почему выборочная дисперсия в первой теме вычислялась по формуле $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$, а не по формуле $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$.

Что такое оценка?

- Случайная выборка $x_1, \ldots, x_n$ рассматривается как совокупность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих то же распределение, что и генеральная совокупность. В частности, далее будет часто использоваться такой факт, что их математические ожидания и дисперсии равны $E(x_i) = \mu$, $Var(x_i) = \sigma^2$ при каждом i.
- Если мы хотим оценить теоретическое среднее значение $\mu = E(X)$ рассматриваемой генеральной совокупности на основании выборки $x_1, \ldots, x_n$, то можно посчитать выборочное среднее $\bar{x}$. Потом мы узнаем, почему эта оценка часто лучше остальных.
- По традиции параметр обозначается греческой буквой θ, а её оценка - $\hat{\theta}$.
- Далее мы обсудим, каким образом выбирать оценки, чтобы они были информативными[2].

[2] Мы сможем понять, в частности, почему выборочная дисперсия в первой теме вычислялась по формуле $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$, а не по формуле $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$.

Оценки среднего

Не всякое число имеет смысл рассматривать в качестве оценки некоторого параметра.

Пример

В примере с ростом жителей в качестве оценки среднего роста можно взять несколько величин:

- *самый популярный рост;*
- *величину роста, при которой у половины людей рост меньше этой величины, а у половины больше.*
- *среднее арифметическое, то есть сумму величин роста всех измеренных людей, делённую на их количество.*

Оценки среднего

Не всякое число имеет смысл рассматривать в качестве оценки некоторого параметра.

Пример

В примере с ростом жителей в качестве оценки среднего роста можно взять несколько величин:

- *самый популярный рост;*
- *величину роста, при которой у половины людей рост меньше этой величины, а у половины больше.*
- *среднее арифметическое, то есть сумму величин роста всех измеренных людей, делённую на их количество.*

Мы уже знаем, что приведенные выше оценки, это, соответственно, мода, медиана и среднее.

Оценки разброса

Ещё одним из самых популярных параметров, которые пытаются оценить, является показатель разброса.

Пример

Помимо среднего роста жителей нас может заинтересовать, насколько сильно отличается рост остальных людей относительно этого среднего.

В этом случае мы тоже можем оценивать разброс разными способами:

- вычислить размах;
- вычислить межквартильный размах;

Оценки разброса

Ещё одним из самых популярных параметров, которые пытаются оценить, является показатель разброса.

Пример

Помимо среднего роста жителей нас может заинтересовать, насколько сильно отличается рост остальных людей относительно этого среднего.

В этом случае мы тоже можем оценивать разброс разными способами:

- вычислить размах;
- вычислить межквартильный размах;
- посчитать среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$;

Оценки разброса

Ещё одним из самых популярных параметров, которые пытаются оценить, является показатель разброса.

Пример

Помимо среднего роста жителей нас может заинтересовать, насколько сильно отличается рост остальных людей относительно этого среднего.

В этом случае мы тоже можем оценивать разброс разными способами:

- вычислить размах;
- вычислить межквартильный размах;
- посчитать среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$;
- посчитать среднее арифметическое модулей отклонений от среднего $\frac{1}{n}\sum|x_i - \bar{x}|$;

Оценки разброса

Ещё одним из самых популярных параметров, которые пытаются оценить, является показатель разброса.

Пример

Помимо среднего роста жителей нас может заинтересовать, насколько сильно отличается рост остальных людей относительно этого среднего.

В этом случае мы тоже можем оценивать разброс разными способами:

- вычислить размах;
- вычислить межквартильный размах;
- посчитать среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$;
- посчитать среднее арифметическое модулей отклонений от среднего $\frac{1}{n}\sum|x_i - \bar{x}|$;
- посчитать взвешенную сумму отклонений от среднего $\sum\omega_i(x_i - \bar{x})$.

Содержание

1. Ещё раз о ГС и выборке
2. Примеры оценок
3. Свойства оценок
4. Более подробно

Несмещённость

Поскольку возможны различные оценки для одного и того же параметра, то надо уметь выбирать те, которые получше.

Важно!

Оценка является случайной величиной ξ, значение которой рассчитывается по выборке, поэтому можно искать $E\xi$, $D\xi$ и т.д.

Несмещённость

Поскольку возможны различные оценки для одного и того же параметра, то надо уметь выбирать те, которые получше.

Важно!

Оценка является случайной величиной ξ, значение которой рассчитывается по выборке, поэтому можно искать $E\xi$, $D\xi$ и т.д.

Определение

Величина $\hat{\theta}$ называется несмещённой оценкой параметра θ, если $E(\hat{\theta}) = \theta$. Для любой оценки $\hat{\theta}$ параметра θ разность $bias = E(\hat{\theta}) - \theta$ будем называть смещением.

Если говорить неформально, то отсутствие смещения означает, что метод не имеет систематической ошибки.

Несмещённость

Поскольку возможны различные оценки для одного и того же параметра, то надо уметь выбирать те, которые получше.

Важно!

Оценка является случайной величиной ξ, значение которой рассчитывается по выборке, поэтому можно искать $E\xi$, $D\xi$ и т.д.

Определение

Величина $\hat{\theta}$ называется несмещённой оценкой параметра θ, если $E(\hat{\theta}) = \theta$. Для любой оценки $\hat{\theta}$ параметра θ разность $bias = E(\hat{\theta}) - \theta$ будем называть смещением.

Если говорить неформально, то отсутствие смещения означает, что метод не имеет систематической ошибки.

Пример

Выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$.

Эффективность

Свойство несмещенности говорит нам, что в среднем наша оценка совпадает с параметром. Но таких оценок тоже много и далеко не всегда они будут хорошими. Как выбирать среди несмещенных наиболее подходящую?

Определение

Несмещенная оценка называется **эффективной** *среди рассматриваемых оценок, если она имеет минимальную дисперсию.*

Эффективность

Свойство несмещенности говорит нам, что в среднем наша оценка совпадает с параметром. Но таких оценок тоже много и далеко не всегда они будут хорошими. Как выбирать среди несмещенных наиболее подходящую?

Определение

Несмещенная оценка называется **эффективной** *среди рассматриваемых оценок, если она имеет минимальную дисперсию.*

Если требуется сравнить оценки, которые не обязательно являются несмещенными, то вычисляют величину $MSE = \mathrm{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$. Эффективной в этом случае называют ту оценку, у которой эта величина минимальна.

Замечание

Величина $\mathrm{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$ называется среднеквадратической ошибкой. Для несмещенных оценок она совпадает с дисперсией.

Неравенство Рао-Крамера

Определение

Информацией Фишера о неизвестном параметре θ, содержащейся водном из независимых наблюдений случайной величины ξ, называется величина $I(\theta) = \mathsf{E}\left(\frac{\partial \ln p(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$.

Неравенство Рао-Крамера

Определение

Информацией Фишера о неизвестном параметре θ, содержащейся водном из независимых наблюдений случайной величины ξ, называется величина $I(\theta) = \mathsf{E}\left(\frac{\partial \ln p(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$.

Теорема

Если плотность $p(\xi,\theta)$ удовлетворяет условиям регулярности[a]*, то для несмещённой оценки $\hat{\theta}$ выполняется неравенство* $D\hat{\theta}_n \geq \frac{1}{nI(\theta)}$.

[a] Помимо условий на возможность дифференцирования, важно, чтобы носитель функции плотности не зависил от θ, а $I(\theta) > 0$ была конечна.

Неравенство Рао-Крамера

Определение

Информацией Фишера о неизвестном параметре θ, содержащейся водном из независимых наблюдений случайной величины ξ, называется величина $I(\theta) = \mathsf{E}\left(\frac{\partial \ln p(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$.

Теорема

Если плотность $p(\xi,\theta)$ удовлетворяет условиям регулярности[a], то для несмещённой оценки $\hat{\theta}$ выполняется неравенство $D\hat{\theta}_n \geq \frac{1}{nI(\theta)}$.

[a] Помимо условий на возможность дифференцирования, важно, чтобы носитель функции плотности не зависил от θ, а $I(\theta) > 0$ была конечна.

Замечание

Если достигается равенство, то $\hat{\theta}_n$ – эффективная оценка!

Для смещённых оценок существует обобщение этой теоремы.

Виды сходимостей

Определение

Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ $P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \to 1$.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ при $n \to \infty$ или $\operatorname{plim} \xi_n = \xi$.

Виды сходимостей

Определение

Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ $P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \to 1$.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ при $n \to \infty$ или $\operatorname{plim} \xi_n = \xi$.

Определение

Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится распределению к случайной величине ξ, если при $n \to \infty$ последовательность соответствующих функций распределения $F_1(x), F_2(x), \ldots$ сходится к функции распределения $F_\xi(x)$ в каждой точке непрерывности последней.

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ при $n \to \infty$.

Состоятельность

Определение

Оценка $\hat{\theta}$ *называется* **состоятельной** *оценкой параметра* θ*, если* $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ *при* $n \to \infty$ *(то есть оценка стремится к параметру по вероятности). Еще это записывается так:* $\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n \to +\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$.

Состоятельность

Определение

Оценка $\hat{\theta}$ называется **состоятельной** *оценкой параметра θ, если $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$ (то есть оценка стремится к параметру по вероятности). Еще это записывается так: $\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n \to +\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$.*

Чем больше n, тем больше у нас информации о генеральной совокупности. Значит и оценка должна быть ближе к неизвестному параметру. Если это не так, то оценка точно "несостоятельна". Это свойство является, пожалуй, наиболее важным.

Пример

Эмпирическая функция распределения приближается к теоретической функции распределения с ростом объема выборки, то есть является состоятельной оценкой.

Теоремы Слуцкого и Манна-Вальда

Теорема

(Слуцкого)[a] *Если* $\xi_n \xrightarrow{P} a$ *и* $\eta_n \xrightarrow{P} b$, *то*

$$f(\xi_n; \eta_n) \xrightarrow{P} f(a; b)$$

для непрерывной в этой точке функции $f(\cdot;\cdot)$.

[a] Существуют обобщения теоремы!

Теорема

(Манна-Вальда) Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ $(\xi_n \xrightarrow{d} \xi)$, *то* $f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$ $(f(\xi_n) \xrightarrow{d} f(\xi))$ *для непрерывной функции* $f(\cdot;\cdot)$.

Теорема

Если $\hat{\theta}_n$ *– несмещённая оценка параметра* θ *и её дисперсия стремится к нулю при* $n \to \infty$, *то оценка состоятельна.*

Теоремы Слуцкого и Манна-Вальда

Теорема

(Слуцкого)[a] *Если* $\xi_n \xrightarrow{P} a$ *и* $\eta_n \xrightarrow{P} b$, *то*

$$f(\xi_n; \eta_n) \xrightarrow{P} f(a; b)$$

для непрерывной в этой точке функции $f(\cdot;\cdot)$.

[a] Существуют обобщения теоремы!

Теорема

(Манна-Вальда) Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ $(\xi_n \xrightarrow{d} \xi)$, *то* $f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$ $(f(\xi_n) \xrightarrow{d} f(\xi))$ *для непрерывной функции* $f(\cdot;\cdot)$.

Теорема

Если $\hat{\theta}_n$ *– несмещённая оценка параметра* θ *и её дисперсия стремится к нулю при* $n \to \infty$, *то оценка состоятельна.*

Пример

Теорема

Выборочное среднее $\bar{x}$ является несмещённой, состоятельной и асимптотически нормальной оценкой для теоретического среднего (математического ожидания).

Пример

Теорема

Выборочное среднее $\bar{x}$ является несмещённой, состоятельной и асимптотически нормальной оценкой для теоретического среднего (математического ожидания).

Доказательство.

а По свойству мат.ожидания;

б Следует из ЗБЧ;

в Следует из ЦПТ.

□

Пример

Теорема

Выборочное среднее $\bar{x}$ является несмещённой, состоятельной и асимптотически нормальной оценкой для теоретического среднего (математического ожидания).

Доказательство.

а По свойству мат.ожидания;

б Следует из ЗБЧ;

в Следует из ЦПТ.

□

Пример

Выборочные квантили являются состоятельными и асимптотически нормальными оценками.

Содержание

1. Ещё раз о ГС и выборке
2. Примеры оценок
3. Свойства оценок
4. Более подробно

Где и что почитать?

Тема. Точечные оценки. Свойства оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность). ([И-М], §10; [Ф,Л], глава 11).

- Ивашев-Мусатов О. С., Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИМА, 2003. - 224 с.
- Фадеева Л. Н., Лебедев А. В., Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Эксмо, 2010. - 496 с. – (Новое экономическое образование).