Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

Сборник задач с решениями по математическому анализу и линейной алгебре

Учебное пособие для социально-экономических специальностей

Е.А.Ивин, А.Н.Курбацкий,
А.А.Мироненков, Ф.Ю.Попеленский, А.В.Словеснов

Москва 2015

УДК
ББК М15

Рецензент: к.ф.-м.н. Хизгияев С.В.

(ассистент кафедры "Высшая математика" МФТИ)

Ивин Е.А. и др.
М15 **Сборник задач с решениями по математическому анализу и линейной алгебре:**
Учебно-методическое пособие для социально-экономических специальностей. – М.: МАКС Пресс, 2015 – 90 с.
ISBN

Учебно-методическое пособие содержит типовые задачи и упражнения с подробными решениями по базовым разделам курсов математический анализ и линейная алгебра для социально-экономических специальностей. В конце приведены упражнения для самостоятельной работы. Все представленные задачи входили в контрольные работы, коллоквиумы и экзамены по соответствующим предметам, которые проводились в Московской школе экономики МГУ им. Ломоносова для студентов первого курса бакалавриата в 2013-2014 учебном году.

Для студентов социально-экономических специальностей и преподавателей. Пособие будет также интересно всем, кто интересуется минимально необходимыми требованиями, предъявляемыми к студентам в МШЭ МГУ им. Ломоносова по математическому анализу и линейной алгебре.

УДК () ББК
ISBN

Часть I

Примеры задач с решениями

1. Математический анализ

Задача 1. Пусть

$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 + 5k + 6 \le 0\}, B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 - 3k + 2 \le 0\}.$$

Найти

а) $A \cap B$;
б) $A \cup B$;
в) $A \setminus B$;
г) $A \bigtriangleup B$;
д) $A \times B$.

Решение. Решим в действительных числах неравенства $k^2 + 5k + 6 \le 0$ и $k^2 - 3k + 2 \le 0$.

$$k^2 + 2k - 3 \le 0 \Leftrightarrow k \in [-3; 1].$$

$$k^2 - k - 6 \le 0 \Leftrightarrow k \in [-2; 3].$$

Выберем из них целочисленные значения $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \in [-3; 1]\}, B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \in [-2; 3]\}$ или $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Теперь найдем указанные в задании множества:

а) Пересечение $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1\}$, так как эти элементы являются общими для двух множеств;

б) Объединение $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, то есть мы берем все элементы, которые принадлежат хотя бы одному множеству;

в) Разность $A \setminus B = \{-3\}$, потому что только один этот элемент из множества A не лежит в множестве B;

г) Симметрическую разность $A \bigtriangleup B$ найдем по формуле $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{-3, 2, 3\}$;

д) Декартово произведение

$A \times B = \{(-3, -2); (-3, -1); (-3, 0); (-3, 1); (-3, 2); (-3, 3); (-2, -2); (-2, -1); (-2, 0); (-2, 1); (-2, 2); (-2, 3); (-1, -2); (-1, -1); (-1, 0); (-1, 1); (-1, 2); (-1, 3); (0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (0, 3); (1, -2); (1, -1); (1, 0); (1, 1); (1, 2); (1, 3)\}$.

Мы выписали всевозможные пары чисел, в которых на первом месте стоит элемент из множества A, а на втором – из множества B.

Ответ. *Совпадает с решением.*

Задача 2. Выяснить, является ли последовательность $a_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 - 11}$ монотонной.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности:

$$a_1 = -\frac{3}{10},\ a_2 = -\frac{9}{7},\ a_3 = -\frac{19}{2},\ a_4 = \frac{33}{5}.$$

Как видно, $a_1 > a_3$ и $a_3 < a_4$, поэтому наша последовательность не может быть монотонной.

Ответ. *Последовательность не является монотонной.*

Задача 3. Выяснить, является ли последовательность $a_n = \dfrac{3n+2}{4n+5}$ монотонной.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности:

$$a_1 = \frac{5}{9},\ a_2 = \frac{8}{13},\ a_3 = \frac{11}{17},\ a_4 = \frac{14}{21}.$$

Видно, что если последовательность монотонна, то она может быть только возрастающей. Проверим, так ли это.

Докажем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$. Для этого решим неравенство

$$\frac{3n+2}{4n+5} < \frac{3(n+1)+2}{4(n+1)+5} \Leftrightarrow \frac{3n+2}{4n+5} < \frac{3n+5}{4n+9} \Leftrightarrow$$
$$(3n+2)(4n+9) < (3n+5)(4n+5) \Leftrightarrow$$
$$12n^2 + 35n + 18 < 12n^2 + 35n + 25 \Leftrightarrow 18 < 25.$$

Ясно, что последнее неравенство действительно выполняется для любого n.

Ответ. *Последовательность является (строго) монотонной, а точнее (строго), возрастающей.*

Задача 4. Выяснить, является ли последовательность $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2-11}$ ограниченной.

Решение. *Первый способ.* Решим эту задачу, пользуясь только определением ограниченности. Покажем, что существует такое число $M > 0$, для которого неравенство $|a_n| \leqslant M$ выполняется для всех номеров n. Так как при исследовании последовательности на ограниченность ее первые члены можно не рассматривать, докажем неравенство $\dfrac{2n^2+1}{n^2-11} \leqslant M$ для $n > 3$ (при этих n члены последовательности положительны). Действительно,

$$\frac{2n^2+1}{n^2-11} \leqslant M \Leftrightarrow 2n^2+1 \leqslant Mn^2 - 11M \Leftrightarrow (M-2)n^2 + 11M + 1 \geqslant 0.$$

Нужно выяснить, существует ли число M, для которого последнее неравенство выполняется для всех натуральных n. В данном случае видно, что, например, $M = 3$ подходит, так как тогда для всех натуральных n выполняются неравенства $(M-2)n^2 > 0$ и $11M + 1 > 0$.

Второй способ. Эта последовательность имеет предел. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-11} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{11}{n^2}} = 2.$$

А раз последовательность имеет предел, то она ограничена.

Задача 5. Доказать по индукции, что

$$1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 \ldots + n\cdot(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Решение. *База индукции.* Для $n = 1$ имеем равенство

$$1 = \frac{1(1+1)(4-1)}{6},$$

поэтому база индукции верна.

Шаг индукции. Предполагая, что равенство выполнено для номера n, докажем его для $n+1$. Мы должны доказать, используя предположение, что

$$1\cdot 1 + 2\cdot 3 + \ldots + n(2n-1) + (n+1)(2n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{6}.$$

Подставляя выражение для суммы первых n членов верное по предположению индукции, получаем

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} + (n+1)(2n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(4n-1) + 6(2n+1) = (n+2)(4n+3) \Leftrightarrow 4n^2 + 11n + 6 = 4n^2 + 11n + 6.$$

Последнее равенство выполнено при всех натуральных n. Согласно принципу математической индукции равенство верно для всех n.

Задача 6. Решить уравнение $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Решение. Вычислим дискриминант $D = 16 - 52 = -36$, откуда

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Ответ. $2 \pm 3i$.

Задача 7. Известно, что числа z_1 и z_2 являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 3z + 7 = 0$. Найти $z_1^2 + z_2^2 + 7z_1z_2$.

Решение. Воспользуемся теоремой Виета: $z_1z_2 = 7$ и $z_1 + z_2 = 3$. Тогда

$$z_1^2 + z_2^2 + 7z_1z_2 = (z_1 + z_2)^2 + 5z_1z_2 = 9 + 35 = 44.$$

Ответ. 44.

Задача 8. Вычислить $\dfrac{(2+3i)(4+3i)}{1+2i}$.

Решение. Раскроем скобки в числителе

$$\frac{(2+3i)(4+3i)}{1+2i} = \frac{8+6i+12i+9i^2}{1+2i} = \frac{18i-1}{1+2i}.$$

Домножим числитель и знаменатель на сопряженное к $1+2i$, то есть на $1-2i$:

$$\frac{(18i-1)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{18i-36i^2-1+2i}{1-4i^2} = \frac{20i+35}{5} = 4i+7.$$

Ответ. $7+4i$.

Задача 9. Вычислить $(-1+i\sqrt{3})^{11}$.

Решение. Найдем тригонометрическую форму числа $-1+i\sqrt{3}$. Для этого найдем его модуль: $r^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$, откуда $r = 2$. Найдем его аргумент:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом,
$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$
Теперь воспользуемся формулой Муавра:
$$\begin{aligned}(-1+i\sqrt{3})^{11}&=2^{11}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{11}=\\&=2096\left(\cos\frac{22\pi}{3}+i\sin\frac{22\pi}{3}\right)=2096\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\\&=2096\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1024-1024i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ответ. $-1024-1024i\sqrt{3}$.

Задача 10. Найдите корни 3-й степени из числа $z=-8i$ и укажите в ответе их сумму.

Решение. Запишем число $z=-8i$ в тригонометрической форме,
$$z=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$
и используем формулы для вычисления корней из комплексного числа:
$$w_k=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right), k=0,1,2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i,\\w_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i,\\w_2=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i.\end{array}\right.$$
Сумма всех корней $w_0+w_1+w_2$, как видно, равна 0.

Ответ. 0.

Задача 11. Найти предел последовательности $a_n=\dfrac{3n-1}{n^2+3}$, используя только определение предела.

Решение. Докажем, что предел этой последовательности равен нулю. Для любого $\varepsilon>0$ укажем $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n-0|<\varepsilon$.

Условие $|a_n - 0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|\dfrac{3n-1}{n^2+3} - 0\right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\dfrac{3n-1}{n^2+3} < \varepsilon$, так как для всех n дробь положительна. Сделаем следующее преобразование:

$$\frac{3n-1}{n^2+3} < \varepsilon \Leftrightarrow 3n-1 < (n^2+3)\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n^2 - 3n + 1 + 3\varepsilon > 0.$$

Если дискриминант полученного квадратного трехчлена неположителен, то последнее неравенство будет выполняться для всех натуральных n, поэтому в качестве N можно будет выбрать произвольное число, например $N = 1$. В противном случае, когда дискриминант положителен, решим квадратное неравенство и найдем, что оно будет выполнено для $n > \dfrac{3+\sqrt{9-4\varepsilon-12\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$. Поэтому положим $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{3+\sqrt{9-4\varepsilon-12\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right]+1$ и тогда неравенство $|a_n - 0| < \varepsilon$ будет верно для всех $n > N(\varepsilon)$.

Задача 12. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - 2n(2n-2)^2}{(n+2)^2+(n-1)^2}.$$

Решение. Преобразуем исходное выражение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - 2n(2n-2)^2}{(n+2)^2+(n-1)^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+12n^2+6n+1-2n(4n^2-8n+4)}{n^2+4n+4+n^2-2n+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+12n^2+6n+1-8n^3+16n^2-8n}{2n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{28n^2-2n+1}{2n^2+2n+5}.$$

Поделим числитель и знаменатель на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{28n^2-2n+1}{2n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{28 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{5}{n^2}} = \frac{28}{2} = 14.$$

Ответ. 14.

Задача 13. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n^2+1}).$$

Решение. Домножим и разделим выражение, предел которого нужно найти, на сопряженное:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4+n^2+1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4+n^2+1})\cdot(\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n^2+1})}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n^2+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+3n^2)-(n^4+n^2+1)}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n^2+1}}.$$

Поделим числитель и знаменатель дроби на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n^2+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{\sqrt{n^4+3n^2}}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{\dfrac{n^4+3n^2}{n^4}}+\sqrt{\dfrac{n^4+n^2+1}{n^4}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}} = \frac{2-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0+0}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 14. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{3n-1}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2+1)+(n-1)}{n^2+1}\right)^{3n-1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n-1}\,\dfrac{n-1}{n^2+1}\,\dfrac{3n-1}{1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n-1}}\right)^{\dfrac{n-1}{n^2+1}\,\dfrac{3n-1}{1}}.$$

Воспользуемся замечательным пределом, чтобы найти предел основания:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{\dfrac{n^2+1}{n-1}} = e.$$

Сделаем вспомогательное вычисление, а именно найдем предел выражения, которое стоит в показателе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(3n-1)}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}} = 3.$$

Поэтому исходный предел равен e^3.

Ответ. e^3.

Задача 15. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(\operatorname{arctg}\lg(n+\sqrt{n}))}{(n+2)^2+(n-1)^2}$.

Решение. Учитывая, что $|\cos\alpha|\leqslant 1$, имеем

$$-\frac{1}{(n+2)^2+(n-1)^2}\leqslant\frac{\cos(\operatorname{arctg}\lg(n+\sqrt{n}))}{(n+2)^2+(n-1)^2}\leqslant\frac{1}{(n+2)^2+(n-1)^2}.$$

Так как $\dfrac{1}{(n+2)^2+(n-1)^2}=\dfrac{1}{2n^2+2n+5}\to 0$ при $n\to\infty$, то по теореме «о двух милиционерах» предел исходной последовательности также равен нулю.

Ответ. 0.

Задача 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$.

Решение. Воспользуемся формулой $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и замечательным пределом $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{2\sin^2\dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x/2}{\sin(x/2)}\cdot\frac{\sin 2x}{\sin(x/2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x/2}{\sin(x/2)}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x/2}{\sin(x/2)}\cdot 4 = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 17. Найти выражение для приращения функции

$$f(x) = x^2 - 8x + 16$$

в произвольной точке x_0. Пользуясь только определением найти производную $f'(x)$. В ответе указать выражение для приращения и значение производной в точке $x_0 = 6$.

Решение. По определению, приращением функции называется

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

а производной — предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

если он существует.

По условию $f(x) = x^2 - 8x + 16$, поэтому в точке x_0 получаем:

$$\begin{aligned}
&f(x_0) = x_0^2 - 8x_0 + 16,\\
&f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 - 8 \cdot (x_0 + \Delta x) + 16 =\\
&\qquad\qquad = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 8x_0 - 8\Delta x + 16,\\
&\Delta f = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 8\Delta x.
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 8\Delta x}{\Delta x} =\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x_0 - 8 + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 - 8 + \Delta x) = 2x_0 - 8.
\end{aligned}$$

При $x_0 = 6$ получим $\Delta f = 12\Delta x + (\Delta x)^2 - 8\Delta x = 4\Delta x + (\Delta x)^2$ и $f'(6) = 2 \cdot 6 - 8 = 4$.

Ответ. *Приращение:* $\Delta f = 4\Delta x + (\Delta x)^2$*; производная:* $f'(6) = 4$.

Задача 18. Вычислить производную функции

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Решение. Прежде чем вычислять производную, преобразуем исходную функцию:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x).$$

Теперь вычислять производную от $f(x)$ удобнее:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x)\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos x}(1-\cos x)' - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\cos x}(1+\cos x)' =$$
$$= \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} - \frac{-\sin x}{2(1+\cos x)} = \frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{2(1-\cos)(1+\cos x)} =$$
$$= \frac{2\sin x}{2(1-\cos^2 x)} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Ответ. $1/\sin x$.

Задача 19. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = \ln(5x)$ в точке $x_0 = \dfrac{1}{5}$.

Решение. Формула Тейлора третьего порядка имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \overline{\overline{o}}\left((x-x_0)^3\right).$$

Вычислим производные для функции $f(x) = \ln(5x)$ и найдем их значения в точке $x_0 = \dfrac{1}{5}$:

$$f(x) = \ln(5x), \qquad f(x_0) = \ln\left(5\cdot\frac{1}{5}\right) = \ln 1 = 0,$$
$$f'(x) = \frac{1}{5x}\cdot(5x)' = \frac{1}{x}, \qquad f'(x_0) = 1 : \frac{1}{5} = 5,$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x_0) = -1 : \frac{1}{25} = -25,$$
$$f'''(x) = 2\cdot\frac{1}{x^3}, \qquad f'''(x_0) = 2 : \frac{1}{125} = 250,$$

Подставляя эти значения в общую формулу, получаем:

$$f(x) = 0 + \frac{5}{1}\left(x - \frac{1}{5}\right) - \frac{25}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{250}{6}\left(x - \frac{1}{5}\right)^3 + \overline{\overline{o}}\,((x - x_0)^3).$$

Ответ.

$$f(x) = 5\left(x - \frac{1}{5}\right) - \frac{25}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{125}{3}\left(x - \frac{1}{5}\right)^3 + \overline{\overline{o}}\,((x - x_0)^3).$$

Задача 20. Вычислить производную функции $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^x$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'.$$

Имеем

$$(\ln f(x))' = (\ln(\operatorname{ctg} x)^x)' = (x \ln(\operatorname{ctg} x))' =$$
$$= \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{x}{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sin^2 x} = \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{x}{\cos x \sin x}.$$

Таким образом, $f'(x) = (\operatorname{ctg} x)^x \left(\ln(\operatorname{ctg} x) - \dfrac{2x}{\sin 2x}\right)$.

Ответ. $f'(x) = (\operatorname{ctg} x)^x \left(\ln(\operatorname{ctg} x) - \dfrac{2x}{\sin 2x}\right)$.

Задача 21. Вычислить производную функции $y(x)$, заданной параметрически уравнениями $y(t) = \arccos 3t$, $x(t) = \sqrt{1 - 9t^2}$, при $t = 1/4$.

Решение. Находим производные по переменной t:

$$y'_t = \frac{3}{\sqrt{1 - 9t^2}} \quad x'_t = \frac{-9t}{\sqrt{1 - 9t^2}}.$$

Откуда находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{3}{\sqrt{1 - 9t^2}}}{\dfrac{-9t}{\sqrt{1 - 9t^2}}} = -\frac{1}{3t}.$$

При $t = 1/4$ получаем $y'_x = -\dfrac{4}{3}$.

Ответ. $-\dfrac{4}{3}$.

Задача 22. При каких значениях параметра a функция $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 48x + 4$ является монотонной на всей числовой оси?

Решение. Функция является всюду дифференцируемой и ее производная равна $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 48$. Производная является квадратичной функцией с положительным коэффициентом при квадрате переменной, поэтому ни при каких значениях остальных коэффициентов она не может быть отрицательна (точнее, неположительна) на всей числовой оси. Поэтому в нашей задаче функция $f(x)$ ни при каких a не может убывать на всей числовой оси, и нам остается узнать, при каких a функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty, +\infty)$.

Производная неотрицательна при всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда функция является монотонно возрастающей на всей числовой прямой. Поэтому найдем все такие a, что неравенство $3x^2 + 6ax + 48 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 16 \geq 0$ выполнено при любом x. Квадратное неравенство с положительным старшим коэффициентом выполнено при всех x, если дискриминант соответствующего квадратного трехчлена всюду меньше или равен нуля, то есть $D = 4a^2 - 64 \leq 0$. Откуда находим ответ $a \in [4; 4]$.

Ответ. $[-4; 4]$.

Задача 23. С помощью разложения Маклорена найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2) - 2\cos x + 2}{1 - e^{x^2} + x\sin x}.$$

Решение. Воспользуемся известными разложениями при $x \to 0$:

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \bar{\bar{o}}\,(x^2)$, тогда

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \bar{\bar{o}}\,((-x^2)^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + \bar{\bar{o}}\,(x^4);$$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \bar{\bar{o}}\,(x^4)$, откуда

$$2\cos x = 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \bar{\bar{o}}\,(x^4);$$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \bar{\bar{o}}\,(x^2)$, откуда

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \overline{\overline{o}}\,(x^4);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \overline{\overline{o}}\,(x^3), \text{ откуда}$$

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + \overline{\overline{o}}\,(x^4).$$

Подставляя эти разложения в исходное выражение, получаем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \overline{\overline{o}}\,(x^4) - 2 + x^2 - \dfrac{x^4}{12} - \overline{\overline{o}}\,(x^4) + 2}{1 - 1 - x^2 - \dfrac{x^4}{2} - \overline{\overline{o}}\,(x^4) + x^2 - \dfrac{x^4}{6} + \overline{\overline{o}}\,(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{12}x^4 + \overline{\overline{o}}\,(x^4)}{-\dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{6}x^4 + \overline{\overline{o}}\,(x^4)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{7}{12}x^4 + \overline{\overline{o}}\,(x^4)}{-\dfrac{5}{6}x^4 + \overline{\overline{o}}\,(x^4)}}_{\text{(делим числитель и знаменатель на } x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{7}{12} + \overline{\overline{o}}\,(1)}{-\dfrac{2}{3} + \overline{\overline{o}}\,(1)} = \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{8}.$$

Ответ. 7/10.

Задача 24. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$ и построить график.

1. *Область определения, точки разрыва функции, вертикальные асимптоты.*

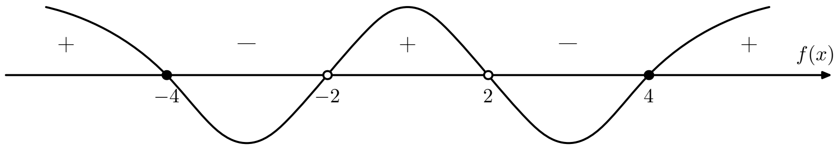
   Областью определения функции являются все значения x, за исключением тех, где знаменатель равен нулю, то есть $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

   Функция имеет две вертикальные асимптоты в точках $x = \pm 2$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = +\infty$.

2. *Четность $(f(-x) = f(x))$ / нечетность $((f(-x) = -f(x))$ / общий вид.*

   Функция является четной, так как $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 16}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = f(x)$.

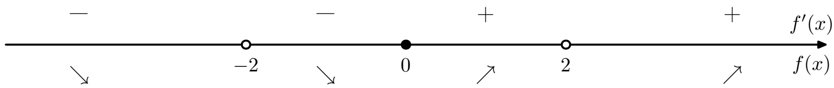
3. *Нули функции. Промежутки знакопостоянства.* Чтобы найти точки пересечения с осью x, решим уравнение $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$. Пересечение с осью ординат происходит, когда $x = 0$, поэтому $y = \dfrac{0-16}{0-4} = 4$. Определим участки знакопостоянства методом интервалов:



4. *Производная функции, нули производной. Промежутки возрастания/убывания функции. Экстремумы.* Для нахождения точек экстремума и промежутков монотонности найдем производную

$$\left(\frac{x^2-16}{x^2-4}\right)' = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-16)}{(x^2-4)^2} = \frac{24x}{(x^2-4)^2}.$$

Производная обращается в ноль в точке $x = 0$. При $x \in (0;2)\bigcup(2;+\infty)$ $f'(x) > 0$, следовательно, на этом участке функция монотонно возрастает, а при $x \in (-\infty;-2)\bigcup(-2;0)$ $f'(x) < 0$, а сама функция монотонно убывает. В нуле функция имеет локальный минимум.



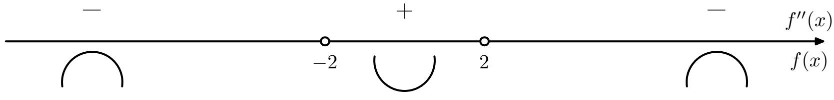
5. *Вторая производная, нули второй производной. Точки перегиба.*

Теперь находим вторую производную

$$f''(x) = \left(\frac{24x}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{24(x^2-4)^2 - 24x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{24(x^2-4)-96x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-72x^2-96}{(x^2-4)^3}.$$

При $x \in (-\infty;-2)$ и $x \in (2;+\infty)$ функция выпукла вверх, так как $f''(x) < 0$, а на промежутке $x \in (-2;2)$ функция выпукла вниз. Точек перегиба нет, потому что $f''(x) \neq 0$ ни при каких x.



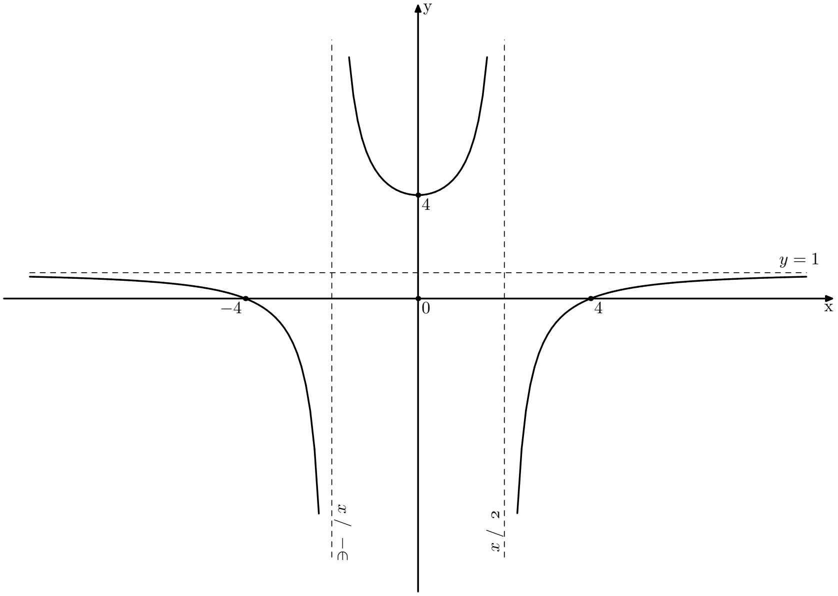
6. *Наклонные(горизонтальные) асимптоты.*

   Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{16}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = 1.$$

   Таким образом, функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.



7. *Область значений.* Областью значений функций служит $(-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$.

Задача 25. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - x + 5}{x + 4}$ и построить ее график.

Решение. Проведем анализ функции в соответствии со схемой.

1. *Область определения, точки разрыва функции, вертикальные асимптоты.*

   $D(x):\ x+4 \neq 0$, то есть $x \neq -4$, имеется точка разрыва $x=-4$;

   видим, что при $x \to -4$ $y \to \infty$, откуда можно сделать вывод о том, что прямая $x=-4$ является вертикальной асимптотой.

2. *Четность* $(f(-x)=f(x))$ */ нечетность* $((f(-x)=-f(x))$ */ общий вид.*

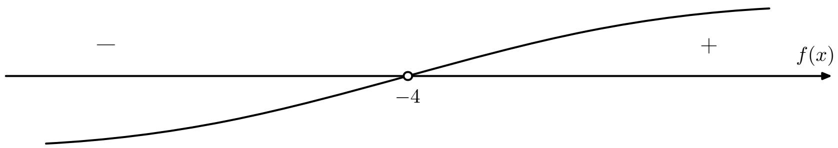
   $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-(-x)+5}{(-x)+4} = \dfrac{x^2+x+5}{-x+4}$.

   Функция $f(-x)$ не совпадает ни с $f(x)$, ни с $-f(x) \Longrightarrow$ она является функцией общего вида.

3. *Нули функции. Промежутки знакопостоянства.*

   $y = \dfrac{x^2-x+5}{x+4}$

   $x^2-x+5=0$
   $D=1-4\cdot 5=-19<0$
   корней уравнения нет;
   числитель функции больше 0



   Знак над осью соответствует знаку исходной функции на данном промежутке.

4. *Производная функции, нули производной. Промежутки возрастания/убывания функции. Экстремумы.*

$$y' = \left(\frac{x^2-x+5}{x+4}\right)' = \frac{(x^2-x+5)'\cdot(x+4)-(x^2-x+5)(x+4)'}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{(2x-1)(x+4)-(x^2-x+5)}{(x+4)^2} =$$

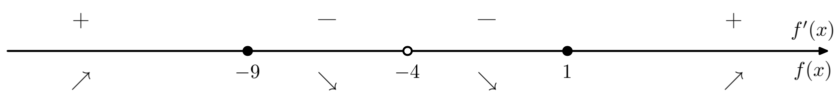
$$= \frac{2x^2+8x-x-4-x^2+x-5}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x-9}{(x+4)^2}.$$

$$y' = \frac{x^2+8x-9}{(x+4)^2}$$

Нули числителя: $x^2+8x-9=0,$
$D = 64+36 = 100,$
$\sqrt{D} = 10,$
$x_1 = \dfrac{-8-10}{2} = -9,$
$x_2 = \dfrac{-8+10}{2} = 1;$

Нули знаменателя: $(x+4)^2 = 0,$
$x = -4;$

$$f(-9) = \frac{(-9)^2-(-9)+5}{(-9)+4} = -19,$$
$$f(1) = \frac{1^2-(1)+5}{1+4} = 1$$

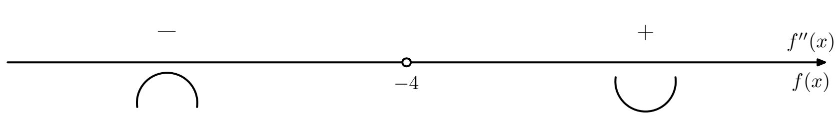


Знак над осью соответствует знаку производной на данном промежутке, т.е. отвечает за возрастание (+) или убывание (-) исходной функции. Таким образом, данная функция имеет два экстремума: максимум в точке $(-9;-19)$ и минимум в точке $(1;1)$.

5. *Вторая производная, нули второй производной. Точки перегиба.*

$$y'' = \left(\frac{x^2+8x-9}{(x+4)^2}\right)' = \left(\frac{x^2+8x+16-25}{(x+4)^2}\right)' =$$
$$= \left(1-\frac{25}{(x+4)^2}\right)' = \frac{50}{(x+4)^3}.$$

Видим, что числитель в 0 не обращается (всегда положительный).
Найдем нули знаменателя: $(x+4)^3 = 0,$
$x = -4;$



Знак над осью соответствует знаку второй производной функции на данном промежутке, т.е. отвечает за направление выпуклости исходной функции ($'+'$ - соответствует выпуклости вниз, $'-'$ - соответствует выпуклости вверх).

6. *Наклонные(горизонтальные) асимптоты.*

$y = kx + b$,

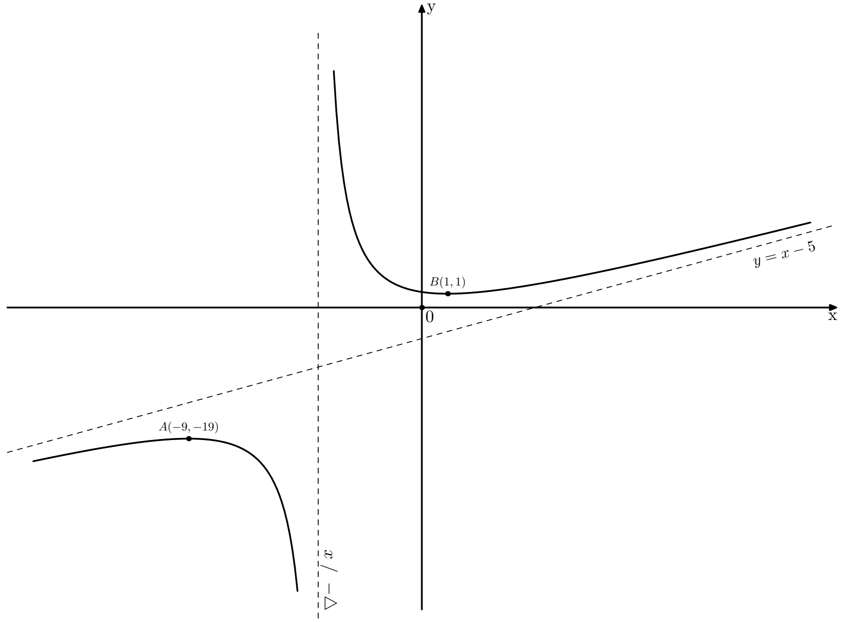
$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}f(x)\right);\ b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - k\cdot x);$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x + 5}{x(x+4)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - x + 5}{x+4} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - x + 5 - x^2 - 4x}{x+4}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x + 5}{x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = -5.$$

Итак, уравнение асимптоты $y = x - 5$.

Строим график



7. *Укажем область значений функции.* $E(y) = (-\infty; -19] \cup [1; +\infty)$.

Задача 26. Вычислить частные производные функции $f(x, y) = x^3 + 4xy - y^2 + 2x + y - 2$, вычислить градиент функции $f(x, y)$ в точке $(-1; -2)$. Найти уравнение касательной плоскости и нормаль в этой же точке. Найти в ней же производную по направлению $\overrightarrow{v} = (4; 3)$.

Решение. Вычисляем производные $f'_x = 3x^2 + 4y + 2$ и $f'_y = 4x - 2y + 1$, $f'_x(-1; -2) = 3 - 8 + 2 = -3$, $f'_y(-1; -2) = -4 + 4 + 1 = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(-1; -2) = (-3; 1)$.

Уравнение касательной плоскости имеет вид $z = f(x_0) + f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0)$. Так как $f(-1; -2) = -1 + 8 - 4 - 2 - 2 - 2 = -3$, то касательная плоскость имеет уравнение $z = -3 - 3(x + 1) + (y + 2) = y - 3x - 4$. Вектор нормали

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{|\overrightarrow{n}|}(f'_x; f'_y; -1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-1)^2}}(-3; 1; -1) = \left(\frac{-3}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{-1}{\sqrt{11}}\right).$$

Остается найти производную по направлению $\dfrac{df}{d\overrightarrow{v}} = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} f, \dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} \right\rangle$. Находим длину вектора $\overrightarrow{v}$: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$. Откуда $\dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. Вычисляем скалярное произведение:

$$\frac{df}{d\overrightarrow{v}} = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} f, \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} \right\rangle = -3 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{9}{5}.$$

Ответ. $f'_x = 3x^2+4y+2$, $f'_y = 4x-2y+1$, $f'_x(-1;-2) = -3$, $f'_y(-1;-2) = 1$, $\overrightarrow{\text{grad}} f(-1;-2) = (-3;1)$, $z = y-3x-4$, $\overrightarrow{n} = \left(\dfrac{-3}{\sqrt{11}}; \dfrac{1}{\sqrt{11}}; \dfrac{-1}{\sqrt{11}}\right)$, $\dfrac{df}{d\overrightarrow{v}} = -\dfrac{9}{5}$.

Задача 27. Вычислить аппроксимацию второго порядка функции $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{y}$ в точке $(0,1)$.

Решение. Прежде всего нам нужно вычислить значения функции, ее первых и вторых частных производных в точке $(0,1)$.

Вычисляем производные:

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \frac{y}{1+2x+x^2+y^2},\\
f'_y(x,y) &= -\frac{1+x}{1+2x+x^2+y^2},\\
f''_{xx}(x,y) &= -\frac{2(1+x)y}{(1+2x+x^2+y^2)^2},\\
f''_{yy}(x,y) &= \frac{2(1+x)y}{(1+2x+x^2+y^2)^2},\\
f''_{xy}(x,y) &= f''_{yx}(x,y) = \frac{1+2x+x^2-y^2}{(1+2x+x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Вычисляем значения при $x=0$ и $y=1$:

$$\begin{aligned}
f'_x(0,1) &= \frac{1}{2},\\
f'_y(0,1) &= -\frac{1}{2},\\
f''_{xx}(0,1) &= -\frac{1}{2},\\
f''_{yy}(0,1) &= \frac{1}{2},\\
f''_{xy}(0,1) &= f''_{yx}(x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Кроме того, $f(0,1) = \dfrac{\pi}{4}$. Отсюда получаем искомую аппроксимацию.

Ответ. *Аппроксимация второго порядка функции* $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$ *в точке* $(0,1)$ *имеет вид*

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.$$

Задача 28. Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением $\ln(x^2\sin z + y\cos z) = 0$.

Решение. Обозначим

$$F(x,y,z) = \ln(x^2\sin z + y\cos z).$$

Вычислим производные F'_x, F'_y и F'_z:

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{2x\sin z}{y\cos z + x^2\sin z}, \\ F'_y &= \frac{\cos z}{y\cos z + x^2\sin z}, \\ F'_z &= \frac{x^2\cos z - y\sin z}{y\cos z + x^2\sin z}. \end{aligned}$$

Теперь найдем требуемые производные:

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x\sin z}{x^2\cos z - y\sin z}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\cos z}{x^2\cos z - y\sin z}. \end{aligned}$$

Ответ.

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{2x\sin z}{x^2\cos z - y\sin z}, \\ z'_y &= -\frac{\cos z}{x^2\cos z - y\sin z}. \end{aligned}$$

Задача 29. Пусть $z(u,v) = \sin(uv^2)$, $u(x,y) = x - 3y$, $v(x,y) = x + y$. Найти частные производные сложной функции $z(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$. Найти их значения в точке $x = 1$, $y = 0$.

Решение. Применяем правило вычисления сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v^2 \cos(uv^2) \cdot 1 + 2uv \cos(uv^2) \cdot 1 = (3x^2 - 2xy - 5y^2) \cos[(x-3y)(x+y)^2];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v^2 \cos(uv^2) \cdot (-3) + 2uv \cos(uv^2) \cdot 1 = -(x^2 + 10xy + 9y^2) \cos[(x-3y)(x+y)^2].$$

Подставляем значения $x = 1$ и $y = 0$:

$$z'_x = 3\cos 1,\ \ z'_y = -\cos 1.$$

Ответ. *Производные:* $(3x^2 - 2xy - 5y^2)\cos[(x-3y)(x+y)^2]$, $-(x^2 + 10xy + 9y^2)\cos[(x-3y)(x+y)^2]$, *их значения в точке* $(1, 0)$*:* $3\cos 1$, $-\cos 1$.

Задача 30. Функция задана таблично:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	0	1	1	2

Методом наименьших квадратов построить ее линейную аппроксимацию $y = kx + b$.

Решение. Сначала вычислим средние:

$$\overline{x} = \frac{1}{5}(-2 + (-1) + 0 + 1 + 2) = 0,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{5}((-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2) = 2,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{5}(-2 + 0 + 1 + 1 + 2) = \frac{2}{5},$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{5}((-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = \frac{9}{5},$$

Далее воспользуемся формулой $k = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$:

$$k = \frac{\frac{9}{5} - 0}{2 - 0^2} = \frac{9}{10}.$$

Теперь найдем b по формуле $b = \overline{y} - k\,\overline{x}$:

$$b = \frac{2}{5} - \frac{9}{10} \cdot 0 = \frac{2}{5}.$$

Ответ. $y = \dfrac{9}{10}\,x + \dfrac{2}{5}$.

Задача 31. Найти критические точки функции

$$f(x, y) = x^3 + 4xy - y^2 + 2x + y - 2$$

и классифицировать их.

Решение. Сначала найдем критические точки. Для этого нужно решить систему

$$\begin{cases} f'_x &= 0, \\ f'_y &= 0. \end{cases}$$

В нашем случае она имеет вид

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y + 2 &= 0, \\ 4x - 2y + 1 &= 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим соотношение $y = 2x + \dfrac{1}{2}$ и подставим его в первое уравнение. Получим квадратное уравнение

$$3x^2 + 4\left(2x + \frac{1}{2}\right) + 2 = 0,$$

которое приводится к виду

$$3x^2 + 8x + 4 = 0.$$

Его корнями являются числа $x = -2$ и $x = -\dfrac{2}{3}$. Подставляя их в формулу $y = 2x + \dfrac{1}{2}$, находим соответствующие $y = -\dfrac{7}{2}$ и $y = -\dfrac{5}{6}$. Итак, критические точки:

$$\left(-2, -\frac{7}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right).$$

Теперь определим тип этих критических точек. Для этого вычислим матрицу Гессе, составленную из вторых частных производных функции $f(x, y)$:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

В точке $\left(-2, -\dfrac{7}{2}\right)$

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы отрицательны, в самом деле, $-12 < 0$ и $\det H = (-12) \cdot (-2) - 4 \cdot 4 > 0$. Поэтому точка $\left(-2, -\dfrac{7}{2}\right)$ является точкой максимума.

В точке $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{6}\right)$

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы имеют разные знаки, в самом деле, $-4 < 0$ и $\det H = (-4) \cdot (-2) - 4 \cdot 4 < 0$. Поэтому точка $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{6}\right)$ является седловой.

Ответ. *Две критические точки: точка максимума* $\left(-2, -\dfrac{7}{2}\right)$ *и седловая точка* $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{6}\right)$.

Задача 32. Применяя метод Лагранжа, найти условные экстремумы функции $f(x, y) = 3x + 8y + 2$ при ограничении $x^2 + 4y^2 = 25$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y) = 3x + 8y + 2 - \lambda\,(x^2 + 4y^2 - 25).$$

Составим систему

$$\begin{cases} F'_x &= 0, \\ F'_y &= 0, \\ F'_\lambda &= 0. \end{cases}$$

В нашем случае она имеет вид

$$\begin{cases} 3 - 2\lambda x &= 0, \\ 8 - 8\lambda y &= 0, \\ -x^2 - 4y^2 + 25 &= 0. \end{cases}$$

Так как при $\lambda = 0$ полученная система несовместна, мы можем выразить x и y из первого и второго уравнений соответственно: $x = \dfrac{3}{2\lambda}$ и $y = \dfrac{1}{\lambda}$. Подставив эти выражения в третье уравнение и упростив, получим $\dfrac{1}{4\lambda^2} = 1$. Отсюда получаем два значения $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$ и две точки (x, y): $(3, 2)$ и $(-3, -2)$.

Заметим теперь, что кривая $x^2 + 4y^2 = 25$ является эллипсом. Точки $(3,2)$ и $(-3,-2)$ разбивают его на две дуги. При этом $f(3,2) = 27$ и $f(-3,-2) = -23$. Так как других критических точек нет, при движении по эллипсу от точки $(-3,-2)$ к точке $(3,2)$ по любой из дуг значение функции должно возрастать. Следовательно, $(3,2)$ — точка условного максимума, а $(-3,-2)$ — точка условного минимума.

Ответ. $(3,2)$ — *точка условного максимума, а* $(-3,-2)$ — *точка условного минимума.*

Задача 33. Найти максимальное и минимальное значение функции

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$$

на эллипсе $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Решение. Зададим эллипс параметрически в виде

$$x = 2\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ t \in [0; 2\pi].$$

Тогда задача сводится к нахождению максимального и минимального значений функции одной переменной

$$g(t) = 2(2\cos t)^2 - (2\cos t)(3\sin t) + 2(3\sin t)^2 = 8\cos^2 t + 18\sin^2 t - 3\sin 2t =$$

$$= 4(\cos 2t + 1) + 9(1 - \cos 2t) - 3\sin 2t = 13 - 5\cos 2t - 3\sin 2t.$$

Здесь мы воспользовались формулами двойного угла

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t,$$
$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t.$$

Теперь, преобразуя полученное выражение методом вспомогательного угла, получаем

$$g(t) = 13 - 5\cos 2t - 3\sin 2t = 13 - \sqrt{34}\sin(2t + \phi),$$

где $\phi = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}$. Так как $|\sin(2t - \phi)| \leqslant 1$, то максимальным и минимальным значениями функции будут соответственно числа $13 + \sqrt{34}$ и $13 - \sqrt{34}$.

Ответ. $13 \pm \sqrt{34}$.

Задача 34. Вычислить

$$\int \frac{\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} + 2\cdot x\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}}\,dx = \int \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}} + 2\,\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}\,dx + 2\int x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{5}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{10}}\,dx + 2\int x^{\frac{17}{15}}\,dx = \frac{10}{13}\,x^{\frac{13}{10}} + 2\cdot\frac{15}{32}\,x^{\frac{32}{15}} + C = \frac{10}{13}\,x^{\frac{13}{10}} + \frac{15}{16}\,x^{\frac{32}{15}} + C.$$

Ответ. $\dfrac{10}{13}\,x^{\frac{13}{10}} + \dfrac{15}{16}\,x^{\frac{32}{15}} + C.$

Задача 35. Вычислить $\int\sqrt{4-2\cos x}\sin x\,dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 4-2\cos x$, $dt = 2\sin x dx$, тогда интеграл переписывается в виде

$$\int\sqrt{4-2\cos x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\,(4-2\cos x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}\,(4-2\cos x)^{\frac{3}{2}} + C.$

Задача 36. Проинтегрировать по частям:

$$\int\frac{2x+3}{e^x}\,dx.$$

Решение. Напомним формулу интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du.$$

Пусть $u = 2x+3$, $dv = e^{-x}\,dx$. Тогда

$$\begin{aligned} du &= u'dx = 2dx,\\ v &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned}\int(2x+3)e^{-x}\,dx &= (2x+3)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\cdot 2\,dx =\\ &= -(2x+3)e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx =\\ &= -(2x+3)e^{-x} - 2e^{-x} + C = -(2x+5)e^{-x} + C.\end{aligned}$$

Ответ. $-(2x+5)e^{-x}+C$.

Задача 37. Вычислить:

$$\int \frac{13-6x}{6+x-x^2}\,dx.$$

Решение. Заметим, что $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Поскольку степень числителя меньше степени знаменателя, а знаменатель раскладывается на множители, подберем числа A и B такие, что

$$\frac{6x-13}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}.$$

Для этого приведем дроби в правой части к общему знаменателю

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\cdot(x+2)+B\cdot(x-3)}{(x+2)(x-3)}= \\ =\frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x+2)(x-3)}=\frac{(A+B)x+(2A-3B)}{(x+2)(x-3)}.$$

Требуемое равенство будет выполняться в случае, если

$$\begin{cases} A+B=6, \\ 2A-3B=-13, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=6-B, \\ 12-2B-3B=-13, \end{cases}$$

$$-5B=-25,$$

$$B=5,\ \ A=1.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{6x-13}{x^2-x-6}=\frac{1}{x-3}+\frac{5}{x+2},$$

следовательно,

$$\int \frac{6x-13}{x^2-x-6}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{5}{x+2}\right)dx= \\ =\int\frac{1}{x-3}\,dx+5\int\frac{1}{x+2}\,dx=\ln|x-3|+5\ln|x+2|+C.$$

Ответ. $\ln|x-3|+5\ln|x+2|+C$.

Задача 38. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4+5x^3+8x^2+9x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Решение. Прежде всего, разделим $x^4+5x^3+8x^2+9x-1$ на x^2+2x+2 с остатком (например, «уголком»). Получим

$$x^4+5x^3+8x^2+9x-1=(x^2+2x+2)(x^2+3x)+3x-1.$$

Тем самым

$$\int \frac{x^4+5x^3+8x^2+9x-1}{x^2+2x+2}\,dx=\int\left(x^2+3x+\frac{3x-1}{x^2+2x+2}\right)dx.$$

Разобьем интеграл в сумму двух:

$$\int\left(x^2+3x+\frac{3x-1}{x^2+2x+2}\right)dx=\int(x^2+3x)\,dx+\int\frac{3x-1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Первый интеграл табличный:

$$\int(x^2+3x)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+C. \qquad (1)$$

Второй интеграл перепишем в виде

$$\int\frac{3x-1}{x^2+2x+2}\,dx=\int\frac{3x-1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

и сделаем замену $x+1=t$. Тогда $dx=dt$ и интеграл принимает вид

$$\int\frac{3t-4}{t^2+1}\,dt=\int\frac{3t}{t^2+1}\,dt-\int\frac{4}{t^2+1}\,dt.$$

В последнем равенстве второй интеграл в правой части табличный:

$$\int\frac{4}{t^2+1}\,dt=4\operatorname{arctg}t+C=4\operatorname{arctg}(x+1)+C. \qquad (2)$$

В стоящем на первом месте интеграле

$$\int\frac{3t}{t^2+1}\,dt$$

сделаем замену $s=t^2+1$. Тогда $ds=2tdt$ и интеграл принимает вид

$$\int\frac{3}{2s}\,ds.$$

Этот интеграл табличный:

$$\int \frac{3}{2s}\,ds = \frac{3}{2}\ln|s| + C = \frac{3}{2}\ln|t^2+1| + C =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) + C. \qquad (3)$$

Собирая вместе формулы (1), (2) и (3), получаем окончательный ответ.

Ответ. $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 4\,\mathrm{arctg}(x+1) + \dfrac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) + C.$

Задача 39. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^6 \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

Решение. Сначала найдем первообразную $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$. Для этого сделаем замену $t = x^2-1$, $dt = 2xdx$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-1} + C.$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница окончательно получаем

$$\int\limits_1^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left.\sqrt{x^2-1}\right|_1^6 = \sqrt{36-1} - \sqrt{1-1} = \sqrt{35}.$$

Ответ. $\sqrt{35}$.

Задача 40. Вычислить

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

Решение. Сначала вычислим первообразную

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx.$$

Сделаем замену

$$t = x+2,$$
$$dt = dx.$$

Получаем табличный интеграл

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница и используя определение несобственного интеграла, получаем

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-1}^{a} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_{-1}^{a}\right) = \lim_{a\to+\infty}(\operatorname{arctg}(a+2) - \operatorname{arctg}(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(т.к. $\lim\limits_{a\to+\infty} \operatorname{arctg}(a+2) = \dfrac{\pi}{2}$).

Ответ. $\pi/4$.

Задача 41. Пусть известно, что $f(x)$ — четная, и что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 12, \quad \int\limits_{0}^{7} f(x)\,dx = 11, \quad \int\limits_{-7}^{3} f(x)\,dx = 8.$$

Найти

$$\int\limits_{3}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx.$$

Решение. *Первый способ.* В силу четности f

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 6;$$

$$\int\limits_{0}^{7} f(x)\,dx = \int\limits_{-7}^{0} f(x)\,dx;$$

$$\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx = \int\limits_{-7}^{3} f(x)\,dx - \int\limits_{0}^{7} f(x)\,dx = 8 - 11 = -3;$$

$$\int\limits_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx - \int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx = 6 - (-3) = 9.$$

Второй способ. Введем следующие обозначения: пусть

$$\int\limits_{-\infty}^{-7} f(x)\,dx = A, \quad \int\limits_{-7}^{-3} f(x)\,dx = B, \quad \int\limits_{-3}^{0} f(x)\,dx = C.$$

В силу четности f можем сказать, что

$$\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx = C, \quad \int\limits_{3}^{7} f(x)\,dx = B, \quad \int\limits_{7}^{\infty} f(x)\,dx = A;$$

тогда во введенных обозначениях условие задачи можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = A + B + C + C + B + A,$$

$$\int\limits_{0}^{7} f(x)\,dx = C + B,$$

$$\int\limits_{-7}^{3} f(x)\,dx = B + C + C,$$

откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A + 2B + 2C &= 12, \\ B + C &= 11, \\ B + 2C &= 8. \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом Гаусса), получаем:

$$\begin{cases} A &= -5, \\ B &= 14, \\ C &= -3. \end{cases}$$

Осталось выписать ответ задачи:

$$\int\limits_{3}^{\infty} f(x)\,dx = A + B = 9, \quad \int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx = C = -3.$$

Ответ. $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx = -3$, $\int\limits_{3}^{\infty} f(x)\,dx = 9$.

Задача 42. Решить уравнение $xy' = 1$.

Решение. Сначала представим y' в виде $\dfrac{dy}{dx}$. В уравнении $x\,\dfrac{dy}{dx} = 1$ надо «разделить» переменные, то есть y оставить в левой части, а x «перебросить» направо

$$x\,\frac{dy}{dx} = 1 \;\Leftrightarrow\; dy = \frac{1}{x}\,dx.$$

Остается проинтегрировать последнее равенство:

$$\int dy = \int \frac{1}{x}dx \;\Leftrightarrow\; y = \ln|x| + C.$$

Ответ. $y(x) = \ln|x| + C$.

Задача 43. Решить уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Решение. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$. Записываем ответ $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

Ответ. $y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

Задача 44. Решить уравнение $y''' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Разложим его на множители:

$$(\lambda^3 - \lambda) - (2\lambda - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно следующему $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$.

Имеем $\lambda_1 = -2$ и кратный корень $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Для $\lambda_1 = -2$ решением будет $C_1 e^{-2x}$, для $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ решением служит $(C_2 + C_3 x)e^x$. Теперь складываем их и получаем решение исходного уравнения: $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x)e^x$.

Ответ. $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x)e^x$.

Задача 45. Решить уравнение $y'' - y' = 2e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение для однородного уравнения $y'' - y' = 0$ имеет вид $\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda - 1) = 0$. Откуда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Для

$\lambda_1 = 0$ решением будет $C_1 e^{0x} = C_1$, для $\lambda_2 = 1$ — функция $C_2 e^x$. Теперь складываем их и получаем решение однородного уравнения:

$$y_{\text{одн}} = C_1 + C_2 e^x.$$

Остается найти частное решение неоднородного уравнения, которое ищется в виде $y_{\text{част}} = ae^{2x}$. Подставим его в исходное уравнение и найдем число a:

$$(ae^{2x})'' - (ae^{2x})' = 2e^{2x} \Leftrightarrow 4ae^{2x} - 2ae^{2x} = 2e^{2x} \Leftrightarrow 2ae^{2x} = 2e^{2x} \Leftrightarrow a = 1.$$

Откуда $y_{\text{част}} = e^{2x}$ и записываем окончательный ответ

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}} = C_1 + C_2 e^x + e^{2x}.$$

Ответ. $y(x) = C_1 + C_2 e^x + e^{2x}$, *где* C_1 *и* C_2 *— произвольные постоянные.*

Задача 46. Решить уравнение $y'' + y = 6\cos 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$. Оно имеет два корня $\lambda = i$ и $\lambda = -i$. Поэтому однородное уравнение имеет решение

$$y_{\text{одн}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Остается найти частное решение неоднородного уравнения. Оно ищется в виде $a \sin 2x + b \cos 2x$. Подставляем его в исходное уравнение:

$$(a \sin 2x + b \cos 2x)'' + a \sin 2x + b \cos 2x = 6 \cos 2x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (2a \cos 2x - 2b \sin 2x)' + a \sin 2x + b \cos 2x = 6 \cos 2x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -3a \sin 2x - 3b \cos 2x = 6 \cos 2x \;\Leftrightarrow\; -3a = 0,\; -3b = 6 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a = 0,\; b = -2 \;\Rightarrow\; y_{\text{част}} = -2 \cos 2x.$$

Получаем ответ:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 2 \cos 2x.$$

Ответ. $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 2 \cos 2x$, *где* C_1 *и* C_2 *— произвольные постоянные.*

Задача 47. Решить уравнение $y'' + 2y' - 8 = e^{2x} - 8x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$. Его корни $\lambda = 2$ и $\lambda = -4$. Поэтому однородное уравнение имеет решение

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}.$$

Теперь ищем частные решения отдельно для правой части e^{2x} и отдельно для $-8x$.

Для e^{2x} частное решение имеет вид $y_{\text{част1}} = axe^{2x}$, так как один из корней характеристического уравнения равен 2. Подставляем $y_{\text{част1}} = axe^{2x}$ в исходное уравнение:

$$(axe^{2x})'' + 2(axe^{2x})' - 8axe^{2x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (ae^{2x} + 2axe^{2x})' + 2(ae^{2x} + 2axe^{2x}) - 8axe^{2x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x}) + 2ae^{2x} - 4axe^{2x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 6ae^{2x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow \ a = \frac{1}{6}, \text{ откуда } y_{\text{част1}} = \frac{1}{6}xe^{2x}.$$

Частное решение с правой частью $-8x$ ищем в виде $y_{\text{част2}} = ax + b$ (общий вид многочлена первой степени). Подставляем $y_{\text{част2}} = ax + b$ в исходное уравнение:

$$(ax + b)'' + 2(ax + b)' - 8(ax + b) = -8x \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ -8ax + 2a - 8b = -8x \ \Leftrightarrow \ -8a = -8, \ 2a - 8b = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ a = 1, \ b = \frac{1}{4}, \text{ откуда } y_{\text{част2}} = x + \frac{1}{4}.$$

Сумма общего однородного решения и двух частных дает решение исходного уравнения:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част1}} + y_{\text{част2}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{6}xe^{2x} + x + \frac{1}{4}.$$

Ответ. $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{6}xe^{2x} + x + \frac{1}{4}$, *где* C_1 *и* C_2 *— произвольные постоянные.*

Задача 48. Решить уравнение $xy' - y = x^2 e^x$.

Решение. Итак, решаем однородное уравнение $xy' - y = 0$. В этом уравнении переменные разделяются:

$$\begin{aligned} &xy' - y = 0, \\ &xy' = y, \\ &x \cdot \frac{dy}{dx} = y. \end{aligned}$$

Отметив, что $y = 0$ является решением, разделим полученное уравнение на y:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|y| = \ln|x| + const.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{одн}} = Cx.$$

Чтобы найти решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянной, т. е. будем искать решение неоднородного уравнения в виде $y(x) = C(x)\,x$. Подставив в исходное уравнение функцию $C(x)x$ вместо y, получим

$$\begin{aligned} &x\,(C(x)\,x)' - C(x)\,x = x^2 e^x, \\ &x\,(C'(x)\,x + C(x)) - C(x)\,x = x^2 e^x, \\ &C'(x) = e^x, \end{aligned}$$

откуда

$$C(x) = e^x + C_1.$$

Тем самым $y = C(x)\,x = (e^x + C_1)\,x$.

Ответ. $y(x) = (e^x + C_1)\,x$, *где* C_1 *— произвольная постоянная.*

Задача 49. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 2e^{2x}, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Решение. Сначала рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Ей соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

которая имеет, как нетрудно проверить, собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Им соответствуют собственные векторы $\vec{v}_1 = (1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1)$. Поэтому решение однородной системы имеет вид

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$
$$y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Решение исходной системы получим методом вариации постоянных. Для этого подставим полученные решения в исходную систему, считая C_1 и C_2 функциями от x:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_1 e^x + C_2' e^{3x} + 3C_2 e^{3x} = 2C_1 e^x + 2C_2 e^{3x} - C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 2e^{2x}, \\ -C_1' e^x - C_1 e^x + C_2' e^{3x} + 3C_2 e^{3x} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2C_1 e^x + 2C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

Упрощая, имеем

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{3x} = 2e^{2x}, \\ -C_1' e^x + C_2' e^{3x} = 0. \end{cases}$$

Складывая, находим

$$2C_2' e^{3x} = 2e^{2x}.$$

Откуда

$$C_2' = e^{-x}, \text{ тем самым, } C_2 = -e^{-x} + C_3.$$

Подставляя во второе уравнение, получаем

$$C_1' = e^x, \text{ откуда } C_1 = e^x + C_4.$$

Подставив эти выражения для C_1 и C_2 в общее решение однородной системы, получим решение исходной системы:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x} = (e^x + C_4)e^x + (-e^{-x} + C_3)e^{3x} = C_4 e^x + C_3 e^{3x},$$

$$y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} = -(e^x + C_4)e^x + (-e^{-x} + C_3)e^{3x} = -C_4 e^x + C_3 e^{3x} - 2e^{2x}.$$

Ответ.

$$y_1 = C_4 e^x + C_3 e^{3x},$$
$$y_2 = -C_4 e^x + C_3 e^{3x} - 2e^{2x},$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные

2. Линейная алгебра

Задача 50. На прямой $3x-2y+1=0$ найти все точки, удаленные от точки $B(7;-2)$ на расстояние $\sqrt{65}$.

Решение. Множество всех точек, удаленных от точки $(7;-2)$ на расстояние $\sqrt{65}$, является окружностью

$$(x-7)^2+(y+2)^2=65.$$

Координаты точек, лежащих на этой окружности и на данной в условии прямой, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0, \\ (x-7)^2+(y+2)^2=65. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим y через x и подставим это выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}, \\ (x-7)^2+\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}\right)^2=65. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x:

$$\begin{aligned} &x^2-14x+49+\frac{1}{4}(9x^2+30x+25)=65, \\ &4x^2-56x+196+9x^2+30x+25=260, \\ &13x^2-26x-39=0, \\ &x^2-2x-3=0, \\ &x=-1 \text{ или } \ x=3. \end{aligned}$$

С помощью выражения $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ для $x=-1$ находим $y=-1$, затем для $x=3$ находим $y=5$.

Ответ. $(-1;-1)$, $(3;5)$.

Задача 51. Представить вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Требуемое разложение имеет вид $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{b}$, то есть

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 5. \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде и решим методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & -7 \end{array} \right),$$

откуда $-14\lambda_2 = -7, \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ и $\lambda_1 + \dfrac{5}{2} = 4, \lambda_1 = \dfrac{3}{2}$.

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 52. Дана прямая $3x - 2y + 1 = 0$. Представить вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ в виде суммы вектора $\overrightarrow{b_{\|}}$, параллельного данной прямой, и вектора $\overrightarrow{b_{\perp}}$, ей перпендикулярного.

Решение. Так как прямая ℓ задается уравнением

$$\ell: \quad 3x - 2y + 1 = 0,$$

то вектор $\overrightarrow{\ell_\perp} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ перпендикулярен этой прямой, а перпендикулярный ему вектор $\overrightarrow{\ell_\parallel} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ параллелен ей. Будем искать разложение в виде:

$$\lambda_1 \overrightarrow{\ell_\parallel} + \lambda_2 \overrightarrow{\ell_\perp} = \overrightarrow{b}; \text{ то есть}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -11 \\ 3 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)+3\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -11 \\ 0 & 13 & -26 \end{array} \right).$$

Откуда последовательно получаем

$$\lambda_2 = -2, \quad -\lambda_1 - 10 = -11, \quad \lambda_1 = 1.$$

Таким образом,

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{и следовательно,}$$

$$\overrightarrow{b_\parallel} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \overrightarrow{b_\perp} = (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$\overrightarrow{b_\parallel} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \overrightarrow{b_\perp} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 53. Опустить на прямую $3x - 2y + 1 = 0$ перпендикуляр из точки $B(-7, 3)$. Найти расстояние от нее до прямой. Сделать чертеж на клетчатой бумаге.

Решение. Расстояние от точки до прямой вычислим по формуле

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В нашем случае

$$r = \frac{|3 \cdot (-7) - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-26|}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

Основание перпендикуляра $A(x; y)$ найдем из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{BA} = (x + 7; y - 3)$ (этот вектор соединяет точку $B(-7, 3)$

и основание перпендикуляра $A(x,y)$) и направляющего вектора $l_{\|}=(2;3)$ нашей прямой.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+1 & = & 0 \\ 2(x+7)+3(y-3) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+1 & = & 0 \\ 2x+3y+5 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6x-4y+2 & = & 0 \\ 6x+9y+15 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6x-4y+2 & = & 0 \\ 13y+13 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -1. \end{array}\right.$$

Для проверки вычислим расстояние между точкой $B(-7,3)$ и найденным основанием перпендикуляра $A(-1,-1)$. Оно должно совпасть с $r = 2\sqrt{13}$ — расстоянием от точки до прямой, вычисленным в самом начале решения. В нашем случае все в порядке:

$$|AB| = \sqrt{(-7+1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Ответ. *Основание перпендикуляра* $(-1,-1)$, *расстояние от точки до прямой равно* $2\sqrt{13}$.

Задача 54. Найти все касательные к эллипсу $4x^2+40x+y^2-10y+25=0$, проходящие через точку $(0,0)$.

Решение. Произвольная наклонная прямая, проходящая через точку $(0,0)$, задается уравнением вида $y=kx$, где параметр k принимает произвольные действительные значения. Прямая $y=kx$ касается эллипса $x^2+40x+y^2-10y+25=0$, т. е. у них ровно одна общая точка, тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} y=kx, \\ 4x^2+40x+y^2-10y+25=0. \end{array}\right.$$

имеет единственное решение. Выразим из первого уравнения y и подставим во второе:

$$4x^2+40x+(kx)^2-10kx+25=0.$$

Это квадратное уравнение относительно переменной x с параметром k. Чтобы увидеть это, раскроем скобки и соберем вместе слагаемые с одинаковыми степенями x. Получим

$$(4+k^2)x^2+(40-10k)\,x+25=0.$$

Условие касания означает, что дискриминант этого квадратного уравнения нулевой:

$$(40 - 10k)^2 - 4 \cdot 25\,(4 + k^2) = 0.$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим

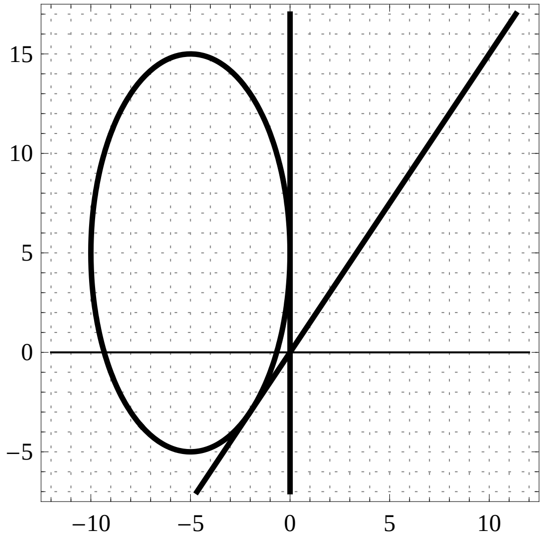
$$1200 - 800k = 0,$$

откуда $k = \dfrac{3}{2}$.

Остается проверить, является ли касательной к эллипсу вертикальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$, то есть прямая $x = 0$. Для этого надо найти количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ 4x^2 + 40x + y^2 - 10y + 25 = 0. \end{cases}$$

Подставляя из первого уравнения $x = 0$ во второе, получаем $y^2 - 10y + 25 = 0$. Отсюда $y = 5$. Итак, вертикальная прямая $x = 0$ имеет с эллипсом единственную общую точку $(0, 5)$, поэтому она касается эллипса (см. рисунок).



Ответ. *Уравнения касательных* $x = 0$ *и* $y = \dfrac{3x}{2}$.

Задача 55. Найти все касательные к эллипсу $4x^2 + 40x + y^2 - 10y + 25 = 0$, перпендикулярные прямой $2x + 3y + 6 = 0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в виде $y = -\frac{2}{3}\,x - 2$. Тогда перпендикулярные к ней прямые задаются уравнением $y = \frac{3}{2}\,x + b$, где параметр b пробегает всевозможные действительные числа. Прямая $y = \frac{3}{2}\,x + b$ касается эллипса $x^2 + 40x + y^2 - 10y + 25 = 0$, т. е. у них ровно одна общая точка, тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}\,x + b, \\ 4x^2 + 40x + y^2 - 10y + 25 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Выразим из первого уравнения y и подставим во второе:

$$4x^2 + 40x + \left(\frac{3}{2}\,x + b\right)^2 - 10\left(\frac{3}{2}\,x + b\right) + 25 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно переменной x с параметром b. Чтобы увидеть это, домножим его на 4, раскроем скобки и соберем вместе слагаемые с одинаковыми степенями x. Получим

$$25x^2 + (100 + 12b)\,x + 4b^2 - 40b + 100 = 0.$$

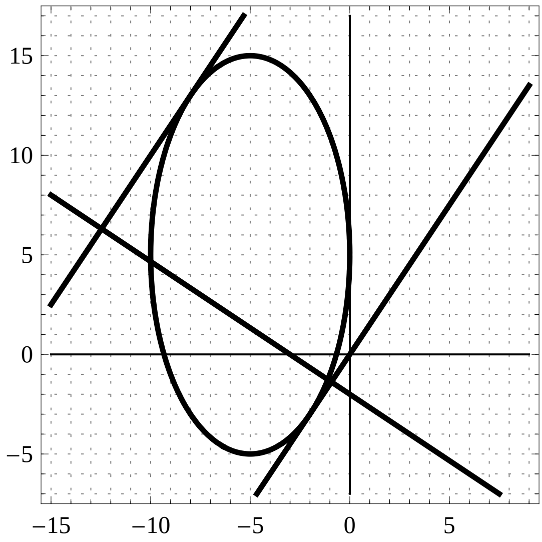
Условие касания означает, что дискриминант этого квадратного уравнения нулевой:

$$(100 + 12b)^2 - 4 \cdot 25\,(4b^2 - 40b + 100) = 0.$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим

$$6400b - 256b^2 = 0,$$

откуда $b = 0$ или $b = 25$, см. рисунок.



Ответ. *Уравнения касательных:* $y = \dfrac{3}{2}\,x$ *и* $y = \dfrac{3}{2}\,x + 25.$

Задача 56. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z - 4w &= 0, \\ x + z + w &= 0, \\ y + 2z - 2w &= 0, \\ 3x - y + z + 5w &= 0. \end{cases}$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-3\cdot(2)]{(1)-2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[(4)+(3)]{(1)-3\cdot(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, z и w — свободные переменные, а x и y – базисные. Находим общее решение системы $w = C_1$, $z = C_2$, $x = -C_1 - C_2$, $y = 2C_1 - 2C_2$, где C_1

и C_2 — произвольные вещественные числа. Удобно записать это решение в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 \\ 2C_1 - 2C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — любые числа. Для $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ имеем первое фундаментальное решение $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$, $w = 1$; для $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ — второе $x = -1$, $y = -2$, $z = 1$, $w = 0$.

Ответ. *Общее решение* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 \\ 2C_1 - 2C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$, *где* C_1 *и* C_2 *— произвольные числа. Фундаментальная система решений состоит из двух векторов* $(-1; -2; 1; 0)$ *и* $(-1; 2; 0; 1)$.

Задача 57. Решить систему линейных уравнений и найти фундаментальное решение соответствующей однородной системы (если оно существует):

$$\begin{cases} -5x + 2y + 3z &= 5, \\ 3x - y - z &= -2, \\ -2x + y + 2z &= 3. \end{cases}$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot(1)+(2)]{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)+2\cdot(1)]{(2)+5\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-2\cdot(2)]{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, базисные переменные x и y, свободная — z. Находим общее решение: $z = C$, $y = 5 - 4z$, $x = 1 - z$. Удобно записать его в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C \\ 5 - 4C \\ C \end{pmatrix}.$$

Для соответствующей однородной системы общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ -4C \\ C \end{pmatrix},$$

а фундаментальная система решений состоит из одного вектора $(-1; -4; 1)$.

Ответ. *Общее решение исходной неоднородной системы* $x = 1 - C$, $y = 5 - 4C$, $z = C$, *где* C *— любое; общее решение соответствующей однородной системы* $x = -C$, $y = -4C$, $z = C$, *где* C *— любое; фундаментальная система решений* $(-1, -4, 1)$.

Задача 58. Для каких значений параметра m вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} m \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Решение. Нам следует выяснить, при каких значениях параметра m векторное уравнение

$$\lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{b}$$

имеет решение. Запишем матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & m \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & m \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & m \end{array}\right) \to \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & m-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$$

По теореме Кронекера—Капелли рассматриваемая система имеет решение тогда и только тогда, когда $m = 1$.

Ответ. *Вектор* $\overrightarrow{b}$ *можно выразить в виде линейной комбинации векторов* $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ *только при* $m = 1$.

Задача 59. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$.

Решение. Задача решается с помощью формулы

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

В нашем случае получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 4 = -26.$$

Ответ. -26.

Задача 60. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. 1-й способ, вычисление по формуле:

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - \\ - \Big(1 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) \cdot (-2)\Big) = \\ = -20 + 2 - 3 - (5 - 1 - 24) = -1.$$

2-й способ, разложение по строке (столбцу). Мы воспользуемся разложением по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{3+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 + 5 \cdot (-5) + 3 \cdot 7 = 3 - 25 + 21 = -1.$$

3-й способ, приведение к ступенчатому виду.

$$\begin{vmatrix}-4 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{1+4\cdot(2)} \begin{vmatrix}0 & 19 & -7\\ 1 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{(2)-(3)} \begin{vmatrix}0 & 19 & -7\\ 0 & 8 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{(1)\leftrightarrow(3)}$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 8 & -3\\ 0 & 19 & -7\end{vmatrix} \xlongequal{(3)-2\cdot(2)} -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 8 & -3\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix} \xlongequal{(2)-3\cdot(3)}$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix} \xlongequal{(3)-3\cdot(2)} -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = -1\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

Ответ. *Определитель равен* -1.

Задача 61. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ -4 & -5 & -1 & -7\\ 1 & -4 & -7 & -1\\ -1 & 4 & 11 & 4\end{vmatrix}$.

Решение. Эту задачу удобнее всего решать приведением определителя к ступенчатому виду:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ -4 & -5 & -1 & -7\\ 1 & -4 & -7 & -1\\ -1 & 4 & 11 & 4\end{vmatrix} \xlongequal[(3)-(1),(4)+(1)]{(2)+4\cdot(1)} \begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & -6 & -8 & -3\\ 0 & 6 & 12 & 6\end{vmatrix} \xlongequal[(4)-2\cdot(2)]{(3)+2\cdot(2)}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 6 & 4\end{vmatrix} \xlongequal{(4)+3\cdot(3)} \begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-2)\cdot 1 = -6.$$

Ответ. *Определитель равен* -6.

Задача 62. Вычислить матрицу, обратную $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Задача решается с помощью формулы

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

В нашем случае получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. *Обратная матрица равна* $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Задача 63. Вычислить матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \\ -7 & 8 & -10 \end{pmatrix}$.

Решение. Решим задачу с помощью формулы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{A}^T.$$

Сначала вычислим элементы матрицы $\widetilde{A}$, состоящей из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 18,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -7 & -10 \end{vmatrix} = 32,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -10 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -7.$$

Итак, матрица алгебраических дополнений вычислена:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 18 & 32 & 13 \\ -4 & -11 & -6 \\ -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A удобно найти разложением по какой-нибудь строке, потому что все алгебраические дополнения уже вычислены. Мы разложим определитель по первой строке:

$$\det A = (-1) \cdot 18 + 2 \cdot 32 + (-3) \cdot 13 = -18 + 64 - 39 = 7.$$

Теперь транспонируем матрицу $\widetilde{A}$, поделим все ее элементы на определитель матрицы A, т. е. на 7, и получим

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{A}^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 18 & -4 & -7 \\ 32 & -11 & -14 \\ 13 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/7 & -4/7 & -1 \\ 32/7 & -11/7 & -2 \\ 13/7 & -6/7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 18/7 & -4/7 & -1 \\ 32/7 & -11/7 & -2 \\ 13/7 & -6/7 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 64. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 1, \\ 4x + 3ay = 2 \end{cases}$$

в зависимости от параметра a.

Решение. Воспользуемся правилом Крамера. Вычислим определители Δ, Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 4 & 3a \end{vmatrix} = 3a^2 - 12,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3a \end{vmatrix} = 3a - 6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 4.$$

Определитель Δ отличен от 0 при $a \neq \pm 2$. Поэтому при таких a по правилу Крамера получаем решение

$$x = \frac{3a-6}{3a^2-12} = \frac{1}{a+2},$$
$$y = \frac{2a-4}{3a^2-12} = \frac{2}{3a+6}.$$

Оставшиеся два значения параметра a исследуем по отдельности.

Для $a = -2$ имеем равенства $\Delta = 0$, $\Delta_x = -12$ и $\Delta_y = -8$. Поэтому по правилу Крамера при $a = -2$ наша система решений не имеет. Напомним, что в данном случае можно было ограничиться проверкой одного из неравенств $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$.

Для $a = 2$ имеем равенства $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. В данном случае правило Крамера предписывает проделать дополнительный анализ, а именно решить систему в явном виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Откуда $y = C$, а $x = \dfrac{1-3C}{2}$, где C — произвольное число.

Ответ. $x = \dfrac{1}{a+2}$, $y = \dfrac{2}{3a+6}$ *при* $a \neq \pm 2$; $x = \dfrac{1-3C}{2}$, $y = C$, *где* C — *произвольное число, при* $a = 2$; *при* $a = -2$ *решений нет.*

Задача 65. В пространстве $\mathbb{R}^4$ даны векторы $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Найти ранг и базу этого набора векторов; найденную базу дополнить до базиса $\mathbb{R}^4$.

Решение. Составим из векторов матрицу, записав координаты векторов по столбцам. Для удобства вычислений запишем их в следующем порядке:

$$\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_4.$$

Полученную матрицу приведем в ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(1)]{(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)+2\cdot(2)]{(3)-2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После приведения к ступенчатому виду в матрице оказалось две ненулевые строки, таким образом, ранг нашего набора векторов равен 2.

«Ступеньки» начинаются в первом и втором столбике, поэтому в качестве базы можно взять первый и второй векторы из набора $\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_4$, т. е. векторы $\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$.

Осталось найти векторы, которые вместе с $\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$ образуют базис $\mathbb{R}^4$. Пространство $\mathbb{R}^4$ четырехмерно, поэтому дополнение до базиса состоит из двух векторов $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Их надо выбрать так, чтобы $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ были линейно независимы. Записав координаты этих векторов по строкам, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix},$$

определитель которой отличен от нуля, если векторы линейно независимые, и равен нулю, если они линейно зависимые. По условию требуется найти не всевозможные, а лишь какие-нибудь $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$, для которых этот определитель ненулевой. Напомним, что проще всего вычисляется определитель верхнетреугольной матрицы, поэтому легко проверить, что векторы $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1, 0)$ и $\overrightarrow{w} = (0, 0, 0, 1)$ подходят.

Ответ. *Ранг набора векторов равен двум, базу образуют векторы* $\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$, *до базиса* $\mathbb{R}^4$ *их дополняют* $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1, 0)$ *и* $\overrightarrow{w} = (0, 0, 0, 1)$.

Задача 66. Образуют ли в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис векторы
а) $\overrightarrow{a}_1 = (3, -2, 1)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2, 3, -2)$;
б) $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (3, -3, 1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (-1, 7, 3)$;
в) $\overrightarrow{a}_1 = (2, 1, 2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (1, 6, 3)$, $\overrightarrow{a}_4 = (2, -7, -1)$.

Решение. Прежде всего отметим, что базис пространства $\mathbb{R}^3$ содержит в точности 3 вектора. Поэтому для пунктов а) и в) ответ такой: *указанные векторы не образуют базис пространства* $\mathbb{R}^3$.

Чтобы ответить на вопрос пункта б) остается проверить указанные три вектора на линейную зависимость. В данном случае удобно сделать это следующим образом. Образуем из координат векторов $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$ и $\overrightarrow{a}_3$ матрицу порядка 3×3 и вычислим ее определитель, при этом координаты векторов запишем по столбцам матрицы. Напомним, что если определитель окажется равным нулю, то векторы линейно зависимые, а если не равным нулю, то векторы линейно независимые.

Итак, вычисляем определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 42 - 2 - (6 + 18 + 7) = 0.$$

Тем самым в пункте б) указанные векторы *не образуют базис пространства* $\mathbb{R}^3$.

Ответ. *а) нет, б) нет, в) нет.*

Задача 67. Проверить векторы $\overrightarrow{a}_1 = (2,1,0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (3,0,1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (8,1,2)$, $\overrightarrow{a}_4 = (-4,1,-2)$ на линейную зависимость. Если они линейно зависимы, то найти два разных набора коэффициентов, для которых линейная комбинация этих векторов равна 0.

Решение. Прежде всего отметим, что данные в условии векторы лежат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Напомним, что в трехмерном пространстве любые наборы векторов, состоящие больше чем из трех векторов, линейно зависимы. Нам даны 4 вектора, поэтому они *линейно зависимы*.

Найдем теперь коэффициенты равной нулю линейной комбинации данных векторов. Для этого составим систему линейных уравнений

$$\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + \lambda_3\overrightarrow{a}_3 + \lambda_4\overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{0}.$$

Запишем ее в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(1)\leftrightarrow(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-3\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем бесконечное множество решений

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= C_1, \\ \lambda_3 &= C_2, \\ \lambda_2 &= 2C_1 - 2C_2, \\ \lambda_1 &= -C_1 - C_2, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные числа.

По условию требуется указать два из них. Для этого нужно взять два различных набора C_1 и C_2. Мы выберем следующие. Первый: $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, тогда $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1$. Второй: $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$, тогда $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$.

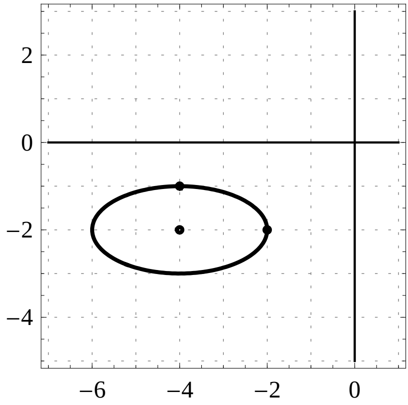
Ответ. *Векторы* $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ *и* $\overrightarrow{a}_4$ *линейно зависимы. Равные нулю линейные комбинации:* $-\overrightarrow{a}_1+2\overrightarrow{a}_2+0\overrightarrow{a}_3+\overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{0}$ *и* $-\overrightarrow{a}_1-2\overrightarrow{a}_2+\overrightarrow{a}_3+0\overrightarrow{a}_4 = \overrightarrow{0}$.

Задача 68. На плоскости выбран базис $\overrightarrow{e}_1 = (-1, 0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (-1, -1)$. Точка O — начало координат. Найти уравнение эллипса, если для центра A и двух его вершин B и C векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ в базисе $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ имеют координаты $(2, 2)$, $(3, 1)$ и $(0, 2)$ соответственно.

Решение. Нужно найти координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ в стандартном базисе декартовых координат:

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 = (-4, -2),$$
$$\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_1 = (-4, -1),$$
$$\overrightarrow{OC} = 0\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_1 = (-2, -2).$$

Центр эллипса расположен в точке $(-4, -2)$.



Полуоси — расстояния от нее до вершин B и C — соответственно равны $|\overrightarrow{AB}| = 1$ и $|\overrightarrow{AC}| = 2$, см. рисунок. Отсюда получаем

Ответ. *Уравнение эллипса* $(x + 4)^2/4 + (y + 2)^2 = 1$.

Задача 69. Дан базис $\overrightarrow{e}_1 = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1, 2, -2)$. Матрица перехода от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$ известна:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

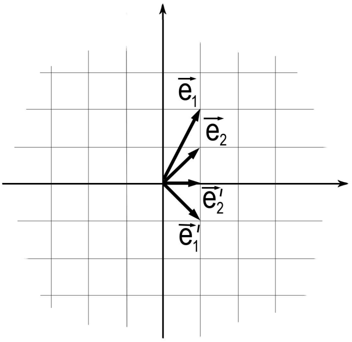
Найти векторы $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$ и $\overrightarrow{e}'_3$.

Решение. В силу равенства $(e') = (e)C$, где (e') и (e) – это матрицы со столбцами, составленными из координат векторов $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$, $\overrightarrow{e}'_3$ и $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$ соответственно, имеем

$$(e') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\overrightarrow{e}'_1 = (-3, 4, -2)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (5, 5, -9)$, $\overrightarrow{e}'_3 = (0, 0, 1)$.

Задача 70. На рисунке изображены векторы $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$. Найти матрицу перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$ и матрицу перехода от $(\overrightarrow{e}')$ к $(\overrightarrow{e})$.



Решение. Пусть C – матрица перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$, тогда $(e') = (e)C$, где (e') и (e) – это матрицы со столбцами, составленными из координат векторов $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$ и $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ соответственно, а C^{-1} будет матрицей перехода от $(\overrightarrow{e}')$ к $(\overrightarrow{e})$. По рисунку определяем их координаты $\overrightarrow{e}'_1 = (1; -1)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (1; 0)$ и $\overrightarrow{e}_1 = (1; 2)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1; 1)$ и, значит, $(e') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (e)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычисляем матрицу перехода

$$C = (e)^{-1}(e') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 71. Привести уравнение кривой второго порядка

$$-4x^2 - 24x - 63 - 18y + 9y^2 = 0$$

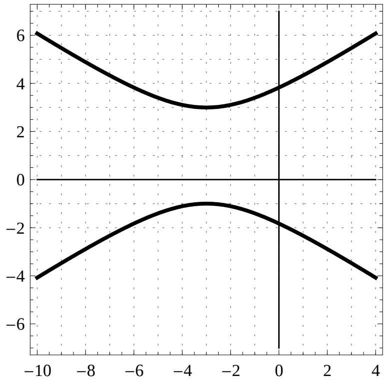
к каноническому виду, найти центр, полуоси, асимптоты (если есть), вершины. Нарисовать кривую.

Решение. Выделим полные квадраты

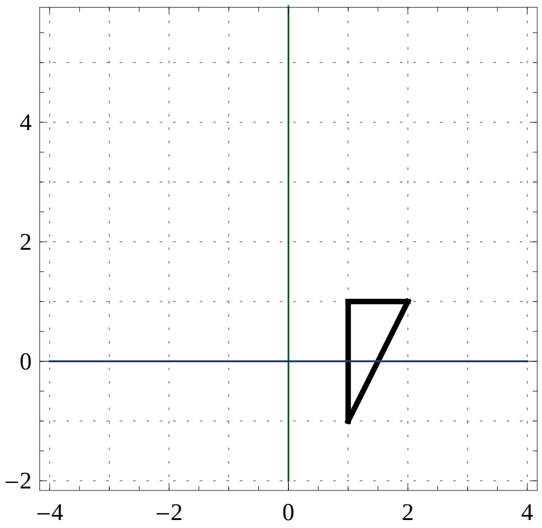
$$\begin{aligned}
&-4(x^2 + 6x) - 63 + 9(y^2 - 2y) = 0,\\
&-4(x^2 + 6x + 9) + 36 - 63 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 = 0,\\
&-4(x + 3)^2 + 9(y - 1)^2 = 36.
\end{aligned}$$

Разделив уравнение на 36, приведем его к виду $\dfrac{-(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$. Получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(-3; 1)$, действительной полуосью 2, мнимой полуосью 3 и вершинами в точках $(-3; 3)$, $(-3; -1)$. Выражая y из уравнения $\dfrac{(x+3)^2}{9} = \dfrac{(y-1)^2}{4}$, находим асимптоты $y - 1 = \pm\dfrac{2}{3}(x + 3)$ или $y = \dfrac{2}{3}x + 3$, $y = -\dfrac{2}{3}x - 1$.

Ответ. *уравнение* $-(x+3)^2/9 + (y-1)^2/4 = 1$ *описывает гиперболу с центром в точке* $(-3; 1)$, *действительной полуосью 2, мнимой полуосью 3, вершинами в точках* $(-3; 3)$ *и* $(-3; -1)$, *асимптотами* $y = \dfrac{2}{3}x + 3$ *и* $y = -\dfrac{2}{3}x - 1$, *см. рисунок.*

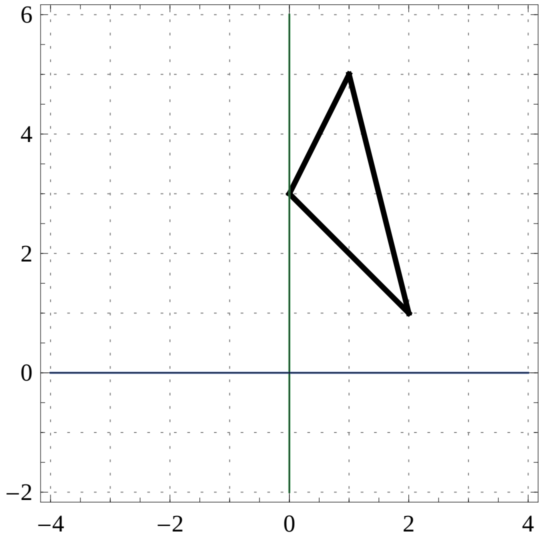


Задача 72. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



Решение. Наша фигура — треугольник с вершинами в точках $(1,-1)$, $(1,1)$ и $(2,1)$. Под действием линейного оператора отрезки переходят в отрезки, поэтому образом является треугольник. Найдем его вершины:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ. 

Задача 73. Отображение $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ задано формулой

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + 2y - x^2 - 1 \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли A линейным, и если является, то найти его матрицу в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Решение. Упростим формулы, задающие отображение:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + 2y - x^2 - 1 \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x^2 + 2x + 1 + 2y - x^2 - 1 \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix}.$$

Теперь проверим выполнение свойств линейного отображения. Пусть $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ и $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$. Тогда

1.

$$A(V_1+V_2)=\begin{pmatrix}2(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)\\ 2(y_1+y_2)+(x_1+x_2)\\ (x_1+x_2)-4(y_1+y_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1+2y_1\\ 2y_1+x_1\\ x_1-4y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x_2+2y_2\\ 2y_2+x_2\\ x_2-4y_2\end{pmatrix}=A(V_1)+A(V_2).$$

2. $A(\lambda V_1)=\begin{pmatrix}2\lambda x_1+2\lambda y_1\\ 2\lambda y_1+\lambda x_1\\ \lambda x_1-4\lambda y_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x_1+2y_1\\ 2y_1+x_1\\ x_1-4y_1\end{pmatrix}=\lambda\, A(V_1).$

Таким образом, оба свойства из определения линейного отображения выполнены, следовательно, отображение A линейно.

Матрицей линейного оператора называется матрица, столбцами которой являются образы базисных векторов. Вычислим их:

$$A(\overrightarrow{e}_1)=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$A(\overrightarrow{e}_2)=A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}.$$

Тем самым матрицей оператора A является $\begin{pmatrix}2&2\\1&2\\1&-4\end{pmatrix}$.

Ответ. *Отображение A линейно, его матрица имеет вид* $\begin{pmatrix}2&2\\1&2\\1&-4\end{pmatrix}$.

Задача 74. Оператор $A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ в стандартном базисе задан матрицей

$$A_e=\begin{pmatrix}2&-4&1&3\\3&-6&3&6\\-4&8&4&0\\4&-8&-2&2\end{pmatrix}.$$

Найти его ранг, дефект, ядро и образ, а также базисы ядра и образа.

Решение. Найдем ядро, то есть множество векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, для которых

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для этого запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+(3)]{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-4\cdot(1)]{(2)+3\cdot(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(4)-2\cdot(2)]{-\frac{1}{3}\cdot(2),(3)-12\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда находим $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_3 = -C_2$, $-x_1 + 2C_1 + 2C_2 - 3C_2 = 0$, $x_1 = 2C_1 - C_2$, тем самым ядром является множество векторов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ C_1 \\ -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} C_2.$$

Базис ядра состоит из двух векторов $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Дефект равен $\dim(\ker A) = 2$.

Ранг оператора равен $4 - \dim(\ker A) = 2$, поэтому в качестве базиса образа можно выбрать любую пару непропорциональных векторов, образующих матрицу A. Выберем, например, второй и третий столбцы, тогда образ оператора состоит из векторов вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} D_2.$$

Ответ. *Р*анг и дефект оператора равны 2. Базисы ядра и образа оператора образованы парами векторов

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix};$$

а соответствующие подпространства представляют собой множества векторов

$$C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad D_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + D_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 75. Рассмотрим множество W матриц размера 2×3, у которых $a_{11}^2 - a_{22}^2 = 0$. Является ли W линейным подпространством линейного пространства матриц размера 2×3? Ответ обосновать.

Решение. Множество W является линейным пространством, если в числе прочих выполняется свойство:

$$\forall\, V_1, V_2 \in W \Longrightarrow V_1 + V_2 \in W.$$

Но указанное свойство не выполняется, например, для

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

из множества W, поскольку

$$V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{и для этой матрицы } a_{11}^2 - a_{22}^2 = 4 \neq 0.$$

Ответ. *Рассматриваемое множество W линейным подпространством не является.*

Задача 76. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Матрица перехода к базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти значение оператора A на векторе $\vec{e}\,'_2$ и разложить полученный вектор по базисам $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$.

Решение. Так как $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_2 = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, имеем равенства

$$A(\vec{e}\,'_2) = -3A(\vec{e}_1) + 2A(\vec{e}_2) = -3\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -12 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 6\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2.$$

Теперь заметим, что $A(\vec{e}\,'_2) = 6\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 = -2(-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -2\vec{e}\,'_2$. Таким образом значение оператора A на векторе $\vec{e}\,'_2$ является вектором, который в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет координаты $(6; -4)$, а в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ — координаты $(0; -2)$.

Ответ. $A(\vec{e}\,'_2) = 6\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 = -2\vec{e}\,'_2$.

Задача 77. Оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в стандартном базисе задается матрицей $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -5 & -10 & 8 \end{pmatrix}$. Найти базис, в котором оператор A задается диагональной матрицей; найти эту матрицу, найти матрицу перехода к базису, в котором матрица оператора диагональна.

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Так как след $\operatorname{tr} A$ равен $-1-5+8 = 2$, определитель $\det A = -6$, а сумма миноров диагональных элементов $\Omega = M_{11}+M_{22}+M_{33}$ равна $-7-10+12 = -5$, то характеристический многочлен имеет вид $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

Решаем уравнение

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

или

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Среди делителей свободного члена $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ перебором ищем корень уравнения. Подходит $\lambda = 1$. Разделив $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$ на $\lambda - 1$ «уголком» или по схеме Горнера, получим в частном $\lambda^2 - \lambda - 6$, т. е. $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6)$. Корнями уравнения

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

являются $\lambda = -2$ и $\lambda = 3$. Таким образом, собственными числами являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$.

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_1$ для $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-1 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -5-1 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 8-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(2)-2\cdot(1)]{\frac{1}{2}\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & -10 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-5\cdot(1)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-3\cdot(2)]{\frac{1}{3}\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_2$ для $\lambda_2 = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-(-2) & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -5-(-2) & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 8-(-2) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)+5\cdot(1)]{(2)+3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{15}\cdot(2)]{(3)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_1$ для $\lambda_3 = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-3 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -5-3 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 8-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-5\cdot(1)]{\frac{1}{4}\cdot(1),(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, в базисе $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ матрица оператора имеет диагональный вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а матрица перехода от стандартного базиса к базису $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ равна $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 78. Возвести матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$ в 22–ю степень.

Решение. Для решения задачи найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Так как $\operatorname{tr} A = 5 - 6 = -1$, $\det A = -30 + 30 = 0$, то характеристический многочлен имеет вид

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = \lambda^2 + \lambda = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$. Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_1$ для $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 10 & -6-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\cdot(1)} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_2$ для $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 10 & -6-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-5\cdot(1)]{\frac{1}{3}\cdot(1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода к базису, составленному из собственных векторов, имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, а $C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, имеем равенство

$$A = C\Lambda C^{-1}.$$

Чтобы возвести матрицу A в 22-ю степень, остается воспользоваться формулой $A^n = C\Lambda^n C^{-1}$:

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{22} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{22} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 79. Найти все b, при которых квадратичная форма $x_1^2 + 2bx_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ положительно определена.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ b & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно критерию Сильвестра требуется выяснить, при каких b все угловые миноры этой матрицы положительны. Вычислив миноры, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \Delta_1 &= & 1 > 0 \\ \Delta_2 &= & 4 - b^2 > 0 \\ \Delta_3 &= & -8b - 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in (-2; 2) \\ b < -2.5 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \varnothing.$$

Ответ. *Ни при каких значениях b не является положительно определенной.*

Задача 80. Привести квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Найти соответствующую матрицу замены координат.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$Q_x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее характеристический многочлен. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Применим явную формулу для определителя третьего порядка:

$$\det(Q_x - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (3-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda) + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot (-2) -$$
$$- \Big((-2)(-2)(3-\lambda) + 2 \cdot 2 \cdot (3-\lambda) - \lambda\Big) =$$
$$= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-\lambda) - 8 - \big(12 - 4\lambda + 12 - 4\lambda - \lambda\big) =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda - 8 - 24 + 9\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Способ 2. Применим формулу $\det(Q_x - \lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} Q_x\, \lambda^2 - \Omega\lambda + \det Q_x$. Здесь Ω — это сумма миноров всех элементов, стоящих на главной диагонали матрицы Q_x. Тогда

$$\operatorname{tr} Q_x = 3 + 3 + 0 = 6;$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 8 = 0;$$

$$\det Q_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 - 4 - (12 + 0 + 12) = -32;$$

$$\det(Q_x - \lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Теперь найдем корни многочлена $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$ и их кратности. Решаем уравнение $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0$. Умножим его для удобства на (-1):

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0.$$

Попробуем найти его целочисленные корни. Если такой корень существует, то он обязан быть делителем свободного члена 32. Список этих делителей:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32.$$

Будем подставлять их последовательно в наше уравнение:

проверяем 1 :	$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 32 = 27 \neq 0$, т. е. 1 — не корень;
проверяем -1 :	$(-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 32 = 25 \neq 0$, т. е. -1 — не корень;
проверяем 2 :	$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 32 = 16 \neq 0$, т. е. 2 — не корень;
проверяем -2 :	$(-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 32 = 0$, т. е. -2 — корень.

Подобрав корень $\lambda = -2$, разделим многочлен $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32$ на $\lambda + 2$ («уголком» или по схеме Горнера) и получим равенство

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 16).$$

Ищем корни квадратного трехчлена $\lambda^2 - 8\lambda + 16$ и разлагаем его на множители:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$

Окончательно получаем

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2.$$

Тем самым собственными значениями матрицы Q_x являются $\lambda = -2$ кратности 1 и $\lambda = 4$ кратности 2.

Теперь мы знаем канонический вид квадратичной формы Q: в подходящих переменных y_1, y_2, y_3 она имеет вид

$$Q(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

Остается найти матрицу C замены координат $X = CY$. Для этого сначала найдем собственные векторы матрицы Q_x.

Ищем собственные векторы для $\lambda = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-(-2) & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3-(-2) & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0-(-2) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{\frac{1}{3}\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+5\cdot(1)]{(2)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\cdot(2)]{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix} C/2 \\ -C/2 \\ C \end{pmatrix}.$$

Ищем собственные векторы для $\lambda = 4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3-4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Общим решением этой системы является

$$\begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь остается найти такие собственные векторы, чтобы они образовывали ортонормированный базис $\mathbb{R}^3$.

Ищем $\overrightarrow{e}_1$. Рассмотрим собственный вектор для $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} C/2 \\ -C/2 \\ C \end{pmatrix},$$

где C — любое ненулевое вещественное число. Зафиксируем какое-нибудь C, например $C = 2$. Соответствующий собственный вектор равен

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Его длина равна $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$. Разделим этот собственный вектор на его длину и получим вектор

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся два вектора $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$ будут собственными для $\lambda = 4$. Найдем сначала $\overrightarrow{e}_2$. Для этого в выражении для произвольного собственного вектора для $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

зафиксируем C_1 и C_2; напомним, они не могут быть равными нулю одновременно. Для определенности мы возьмем $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. Получим вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Разделив его на длину $\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, получим вектор

$$\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь среди собственных векторов для $\lambda = 4$ подберем вектор, ортогональный $\overrightarrow{e}_2$. Для этого вычислим скалярное произведение вектора

$$\begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

и $\overrightarrow{e}_2$. Оно равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(C_2 - 2C_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(2C_2 - 2C_1).$$

Собственный вектор для $\lambda = 4$ будет ортогонален $\overrightarrow{e}_2$, если это скалярное произведение будет равно 0, т. е. при

$$C_1 = C_2.$$

Выберем $C_1 = C_2 = 1$. Получим вектор

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

длины $\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Нормируя этот вектор, получим

$$\overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Остается вспомнить, что матрица замены координат C состоит из координат векторов $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$, записанных по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Ответ. *Канонический вид* $Q(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_2^2$. *Ортогональная замена координат:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 81. Выяснить, диагонализуется ли матрица $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ 30 & -14 \end{pmatrix}$. Если диагонализуется, найти какую-нибудь матрицу D, для которой $A = D^2$.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A, например, по формуле $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= 19 - 14 = 5; \\ \det A &= 19 \cdot (-14) - (-9) \cdot 30 = 4; \\ \det(A - \lambda E) &= \lambda^2 - 5\lambda + 4. \end{aligned}$$

Собственные числа — корни характеристического многочлена: $\lambda = 1$ и $\lambda = 4$. Оба имеют кратность 1. Поэтому можно найти собственные векторы, которые составляют базис пространства $\mathbb{R}^2$, и следовательно, матрица A диагонализуема.

Чтобы найти D, нам нужно найти сами собственные векторы, образующие базис пространства $\mathbb{R}^2$.

Ищем собственный вектор для $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 19-1 & -9 & 0 \\ 30 & -14-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 18 & -9 & 0 \\ 30 & -15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{15}\cdot(2)]{\frac{1}{9}\cdot(1)} \\ \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ищем собственный вектор для $\lambda = 4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 19-4 & -9 & 0 \\ 30 & -14-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 15 & -9 & 0 \\ 30 & -18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{6}\cdot(2)]{\frac{1}{3}\cdot(1)} \\ \to \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Теперь перейдем к нахождению матрицы D. Из найденных векторов составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Имеем представление нашей матрицы A в виде

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Матрица D теперь может быть найдена по формуле

$$D = C \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} C^{-1},$$

причем знаки $\pm$ здесь выбираются независимо.

Найдем матрицу C^{-1}:

$$C^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем четыре варианта ответа:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix};$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -10 & 4 \end{pmatrix};$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{pmatrix};$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -30 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\pm \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{pmatrix}$.

Задача 82. Представить матрицу $A = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ в виде $A = D^2$, где D — симметрическая.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A, например, по формуле $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr}\, A + \det A$:

$$\mathrm{tr}\, A = 17 + 17 = 34;$$
$$\det A = 17^2 - 8^2 = 225;$$
$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 34\lambda + 225.$$

Собственные числа — корни характеристического многочлена: $\lambda = 9$ и $\lambda = 25$.

Ищем собственный вектор для $\lambda = 9$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 17-9 & 8 & 0 \\ 8 & 17-9 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{8}\cdot(2)]{\frac{1}{8}\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ищем собственный вектор для $\lambda = 25$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 17-25 & 8 & 0 \\ 8 & 17-25 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 8 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\xrightarrow[\frac{1}{8}\cdot(2)]{\frac{1}{8}\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Из найденных векторов составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем представление нашей симметрической матрицы A в виде

$$A = C \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Найдем матрицу C^{-1}:

$$C^{-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

В качестве матрицы D можно взять любую матрицу вида

$$D = C \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 5 \end{pmatrix} C^{-1},$$

причем знаки $\pm$ здесь выбираются независимо. Отсюда получаем четыре варианта ответа:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\pm\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 83. Найти разложение Холецкого для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 53 & 30 \\ 1 & 30 & 18 \end{pmatrix}.$$

Решение. Разложение Холецкого для симметрической положительно определенной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

имеет вид $L \cdot L^T$, где матрица L является нижнетреугольной

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

с положительными элементами на диагонали. Элементы матрицы L находятся по формулам:

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}},\\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}},\\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}},\\
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2},\\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}},\\
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}.
\end{aligned}
$$

В нашем случае:

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{1} = 1,\\
l_{21} &= \frac{2}{1} = 2,\\
l_{31} &= \frac{1}{1} = 1,\\
l_{22} &= \sqrt{53 - 2^2} = 7,\\
l_{32} &= \frac{30 - 2\cdot 1}{7} = 4,\\
l_{33} &= \sqrt{18 - 1^2 - 4^2} = 1.
\end{aligned}
$$

Ответ. $A = L \cdot L^T$, *где*

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 0\\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Задача 84. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка векторов $\overrightarrow{w}_1 = (1;-1;0)$ и $\overrightarrow{w}_2 = (2,0,1)$. Найти матрицу ортогонального проектора на подпространство W, ее ранг и собственные числа.

Решение. Будем искать матрицу ортогонального проектора по формуле $P = Z(Z^T Z)^{-1}Z^T$, в которой столбцы матрицы Z образованы координатами базисных векторов подпространства, на которое осуществляется проекция. В нашем случае, поскольку исходные векторы $\overrightarrow{w}_1 = (1;-1;0)$ и $\overrightarrow{w}_2 = (2,0,1)$ являются линейно независимыми, мы можем выбрать их в качестве базисных векторов подпространства, а, следовательно, матрица Z будет иметь вид: $Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда в соответствии с приведенной выше формулой матрица ортогонального проектора ищется как

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получим $P = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ранг проектора равен размерности подпространства, на которое осуществляется проекция. В нашем случае размерность равна 2.

Собственными числами проектора являются 1 и 0, причем кратность 1 равна рангу проектора — в нашем случае 2, а кратность 0 — дефекту проектора, в нашем случае это $3 - 2 = 1$.

Ответ. $P = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Собственные числа:* 1 *кратности* 2 *и* 0 *кратности* 1.

Задача 85. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка векторов $\overrightarrow{w}_1 = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{w}_2 = (2, 0, 1)$ и $\overrightarrow{w}_3 = (1, 1, 1)$. Разложить вектор $\overrightarrow{a} = (6, 0, 0)$ в сумму $\overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}_\perp$, где $\overrightarrow{a}_0 \in W$ и $\overrightarrow{a}_\perp$ ортогонален W.

Решение. Заметим, что $\overrightarrow{w}_2 - \overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{w}_3$, а векторы $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$ не коллинеарны, поэтому они образуют базис подпространства W. Дальше мы можем решать задачу двумя способами.

Первый способ. В предыдущей задаче была найдена матрица P ортогонального проектора на данное в условии подпространство W (сравните условия задач): $P = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда для ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на W имеем равенство:

$$\overrightarrow{a}_0 = P(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $\overrightarrow{a}_0 = (5, -1, 2)$ и $\overrightarrow{a}_\perp = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a}_0 = (6; 0; 0) - (5, -1, 2) = (1, 1, -2)$.

Второй способ. Вектор $\overrightarrow{a}_0$ должен разлагаться в линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$:

$$\overrightarrow{a}_0 = \lambda_1 \overrightarrow{w}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{w}_2$$

и $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}_\perp$. Перемножив скалярно вектор $\overrightarrow{a}$ на векторы $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$ и учитывая, что $\langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_1\rangle = \langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_2\rangle = 0$, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов λ_1 и λ_2:

$$\left\{\begin{array}{l} \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{w}_1\rangle = \lambda_1\langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_1\rangle + \lambda_2\langle \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_1\rangle + \langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_1\rangle \\ \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{w}_2\rangle = \lambda_1\langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\rangle + \lambda_2\langle \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_2\rangle + \langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_2\rangle \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 12 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 - \lambda_2 \\ 12 = 2(3-\lambda_2) + 5\lambda_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right.$$

Отсюда находим $\overrightarrow{a}_0 = 1\cdot(1; -1; 0) + 2\cdot(2; 0; 1) = (5, -1, 2)$ и $\overrightarrow{a}_\perp = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a}_0 = (6; 0; 0) - (5, -1, 2) = (1, 1, -2)$.

Ответ. *$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}_\perp$, где $\overrightarrow{a}_0 = (5, -1, 2)$ и $\overrightarrow{a}_\perp = (1, 1, -2)$.*

Задача 86. В $\mathbb{R}^4$ подпространство W задано как линейная оболочка двух векторов $\overrightarrow{w}_1 = (1, 0, 3, 5)$ и $\overrightarrow{w}_2 = (1, 3, 0, -1)$. Перпендикулярен ли подпространству W вектор $\overrightarrow{v} = (-3, 1, 1, 0)$?

Решение. Вектор $\overrightarrow{v}$ перпендикулярен подпространству W тогда и только тогда, когда он перпендикулярен векторам $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$. Поэтому достаточно проверить, равны ли нулю скалярные произведения $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_1\rangle$ и $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2\rangle$. Вычислим их:

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_1\rangle = 1\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5\cdot 0 = 0,$$
$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2\rangle = 1\cdot(-3) + 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = 0.$$

Ответ. *Да, вектор $\overrightarrow{v}$ перпендикулярен подпространству W.*

Задача 87. Пусть $\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Для функции $A(\Theta) = \Theta^T G \Theta - B\Theta$ найти $\dfrac{\partial A}{\partial \Theta}$.

Решение. Так как $\dfrac{\partial(\Theta^T G \Theta)}{\partial \Theta} = 2\Theta^T G$, а $\dfrac{\partial(B\Theta)}{\partial \Theta} = B$, то

$$\frac{\partial A}{\partial \Theta} = 2\Theta^T G - B = 2\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\\ \Theta_3\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}21 & -3 & 7\end{pmatrix} =$$

$$= 2(\Theta_1 - 2\Theta_2 + 3\Theta_3; -2\Theta_1 + 4\Theta_2; 3\Theta_1 + 7\Theta_3) - \begin{pmatrix}21 & -3 & 7\end{pmatrix} =$$

$$= (2\Theta_1 - 4\Theta_2 + 6\Theta_3 - 21; -4\Theta_1 + 8\Theta_2 + 3; 6\Theta_1 + 14\Theta_3 - 7).$$

Ответ. $\dfrac{\partial A}{\partial \Theta} = (2\Theta_1 - 4\Theta_2 + 6\Theta_3 - 21; -4\Theta_1 + 8\Theta_2 + 3; 6\Theta_1 + 14\Theta_3 - 7)$.

Задача 88. Для модели Леонтьева с матрицей затрат $A = \begin{pmatrix}0.1 & 0.4\\ 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$:

выяснить продуктивна ли матрица A;

найти конечный продукт Y, если валовой выпуск $X = \begin{pmatrix}140\\ 100\end{pmatrix}$;

найти валовой выпуск X, при котором конечный продукт $Y = \begin{pmatrix}52\\ 104\end{pmatrix}$.

Решение. Если матрица $E - A$ обратима и все ее элементы неотрицательны, то матрица A является продуктивной.

$$E - A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0.1 & 0.4\\ 0.5 & 0.2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.9 & -0.4\\ -0.5 & 0.8\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E - A)^{-1} = \frac{1}{0.9 \cdot 0.8 - 0.4 \cdot 0.5}\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.5 & 0.9\end{pmatrix} = \frac{1}{0.52}\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.5 & 0.9\end{pmatrix}.$$

Найдем конечный продукт

$$Y = \begin{pmatrix}0.9 & -0.4\\ -0.5 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}140\\ 100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}86\\ 10\end{pmatrix}.$$

Теперь вычисляем валовой выпуск

$$X = \frac{1}{0.52}\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.5 & 0.9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}52\\ 104\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}160\\ 230\end{pmatrix}.$$

Ответ. *Является,* $Y = (86, 10)$, $X = (160, 230)$.

Часть II

Задачи для самостоятельного решения

1. Математический анализ

1. Какое из множеств является подмножеством другого
$$A = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 + 5k + 6 \geq 0\}, \;\; B = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 3k + 2 \leq 0\}?$$

2. Какое из множеств является подмножеством другого
$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 + 5k + 6 \geq 0\}, \;\; B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 - 3k + 2 \leq 0\}?$$

3. Равны ли A и B, если
$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ — четное}, k^2 - k - 6 \leq 0\}$$
и
$$B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ — четное}, k^2 + k - 6 \leq 0\}?$$

4. Доказать, что $A \triangle B = A$ тогда и только тогда, когда $B = \emptyset$.

5. Доказать равенство
$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + (n+2) \cdot 2n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{3}.$$

6. Представить в алгебраической форме
(a) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; (b) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$.

7. Вычислить $(i+\sqrt{3})^{10} + (i-\sqrt{3})^{10}$.

8. Решить уравнение
(a) $z^2 + 3z + 2 = 0$;
(b) $z^2 + 6z + 13 = 0$;
(c) $4z^2 + 4z + 26 = 0$.

9. Исследовать на монотонность и ограниченность последовательность
$$a_n = \frac{-3\sqrt{5}}{5n - 13}.$$

10. Исследовать на монотонность и ограниченность последовательность
$$a_n = \frac{3n + 7}{4n + 13}.$$

11. Доказать равенство $C_{3n}^{n-1} + C_{3n}^{n} = C_{3n+1}^{n}$.

12. Доказать эквивалентность множеств $(1,2)$ и $(0,+\infty)$.

13. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n+4}$.

14. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+2n+7}-\sqrt{n^4-3n^2+16})$.

15. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-2n+13}{n^2+4n-1}\right)^{2n+3}$.

16. Доказать, что последовательность $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$ не имеет предела.

17. Для функции $f(x) = \cos\pi\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)$ найти точки разрыва и классифицировать их.

18. Для следующих функций указать пересечения с осями координат, промежутки знакопостоянства, точек разрыва и вертикальные асимптоты (если есть), поведение на границе области определения. Нарисовать эскиз графика функции.
(a) $f(x) = x^3-2x^2-8x$;
(b) $f(x) = e^x(2x+8-x^2)$;
(c) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2-2x-8}$.

19. Вычислить производную функции $\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$.

20. Найти производную функции $(\operatorname{tg} 2x)^{\cos x}$.

21. Вычислить производную функции, заданной параметрически: $x(t) = \ln(1+4t^2)$, $y(t) = \operatorname{arctg} 2t$. Найти значение этой производной при $t = 1/2$.

22. С помощью разложения в ряд Маклорена найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+\sin x}{\ln(1+x^2)}.$$

23. Написать разложение функции $x^4+3x^3+2x^2+x$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$ с точностью до четвертого порядка.

24. При каких значениях параметра a функция $-\pi+3ax-18x^2+3x^3$ монотонна на всей числовой оси?

25. Исследовать функцию $y = \frac{x^2-x-5}{x-3}$ и построить ее график.

26. Исследовать функцию $y = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ и построить ее график.

27. Вычислить производную функции $\ln(1+\sin x + y^2)$ в точке $(6\pi, 1)$ по направлению, заданному вектором $(12, 5)$.

28. Найти уравнение касательной плоскости в точке $(-3, -2)$ к графику функции $e^{2x-3y}(x^2+2y+1)$.

29. Для функции $e^{2x-3y}(x^2+2y+1)$ найти аппроксимацию второго порядка в точке $(-3, -2)$.

30. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = e^{5x-y}\left(5x^2 - 20xy + 47y^2\right)$.

31. Найти точки экстремума функции $f(x, y) = -2 - x + 11y$ при условии $-1 + 2x^2 - 2xy + 5y = 0$.

32. Методом наименьших квадратов найти оптимальную прямую для заданного набора точек:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	-3	2	3

33. Для функции $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ нарисовать на плоскости линию, для которой $f(x, y) = 36$. Найти на ней точки, в которых направление максимального роста функции перпендикулярно вектору $(1, 1)$.

34. Известно, что функция $f(x)$ четная и что

$$\int\limits_{-\infty}^{2} f(x)dx = 9, \int\limits_{-2}^{10} f(x)dx = 8, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 12.$$

Найти $\int\limits_{-\infty}^{-2} f(x)dx$ и $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$.

35. Вычислить интеграл $\int x^2 e^{-x/3}\,dx$.

36. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln x\,dx$.

37. Вычислить интеграл $\int x \sin \frac{x}{3}\,dx$.

38. Вычислить интеграл $\int \dfrac{x^2}{x^6+1}\,dx$.

39. Вычислить интеграл $\int \dfrac{14}{x^2+3x-10}\,dx$.

40. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2 - 4x + 5}\, dx$.

41. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^\infty e^{-x/2} dx$ или доказать, что он расходится.

42. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^3 \dfrac{2x dx}{x^2 - 4}$ или доказать, что он расходится.

43. Решить уравнение $y'' - 4y' + 29y = 0$.

44. Решить уравнение $x^2 y' + xy + 1/x^2 = 0$.

45. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 12e^{2x}/x^5$.

46. Решить уравнение $y'' + 3y' - 10y = -12e^{-2x}$.

2. Линейная алгебра

1. Графически решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0, \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Разложить вектор $\vec{b} = (1, 4)$ в линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1 = (2, 1)$ и $\vec{a}_2 = (-3, 2)$.

3. Дана прямая $3x + y - 2 = 0$. Спроектировать вектор $\vec{b} = (5, 5)$ на эту прямую.

4. Опустить на прямую $3x + y - 2 = 0$ перпендикуляр из точки $B(7, 1)$. Найти расстояние от нее до прямой. Найти длину отрезка, соединяющего B с основанием перпендикуляра. Сделать чертеж на клетчатой бумаге.

5. Дан вектор $(3, 1)$. Найти все векторы длины $2\sqrt{5}$, образующие с ним угол $\pi/4$.

6. На прямой $3x + y - 2 = 0$ найти точки, удаленные от $(-5, -3)$ на расстояние $5\sqrt{2}$.

7. Решить систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = -5, \\ 2x + 3y + z = -5, \\ -3x - y - 5z = 4. \end{cases}$$

8. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

тремя способами: по формуле, приведением к ступенчатому виду, разложением по второй строке.

9. Решить систему уравнений в зависимости от параметра a:

$$\begin{cases} x + ay & = & 3, \\ 2x + 4y & = & 3a. \end{cases}$$

10. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 11 & 8 & 6 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

12. При каком значении параметра x определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3-2x \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & x+1 & 1-x \end{vmatrix}$$

равен 1?

13. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

14. Для $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить обратную матрицу.

15. Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти X из уравнения $A(X+F)B = H \cdot H^T$.

16. При каких значениях параметров s и t система, заданная матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & t+2 \\ 1 & 0 & -2s-1 & -t-2 \\ 1 & 4 & 2s-1 & 4t+7 \end{array}\right)$$

имеет решения?

17. Дополнить до базиса набор векторов $(3,4,5,7), (-6,-8,13,-12)$.

18. Привести уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ к каноническому виду, найти его центр и полуоси, сделать рисунок.

19. Дана матрица перехода $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$. Вектор $\overrightarrow{v}$ имеет в базисе $(\overrightarrow{e})$ координаты $(2,-3)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{v}$ в базисе $(\overrightarrow{e}')$.

20. Даны векторы $\overrightarrow{e}_1 = (1,1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1,2)$, $\overrightarrow{e}'_1 = (3,1)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (5,2)$. Проверить, что $(\overrightarrow{e})$ и $(\overrightarrow{e}')$ являются базисами. Найти матрицы перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$ и наоборот.

21. Даны векторы $\overrightarrow{e}_1 = (1,1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1,2)$, $\overrightarrow{e}'_1 = (3,1)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (5,2)$. Вектор $\overrightarrow{v}$ имеет в базисе $(\overrightarrow{e}')$ координаты $(1,2)$. Найти его координаты в базисе $(\overrightarrow{e})$. Найти сам вектор $\overrightarrow{v}$. Сделать рисунок.

22. При каких значениях параметра k указанные векторы образуют базис:

a) $\overrightarrow{e}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (k,1,k)$.

b) $\overrightarrow{e}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{e}_2 = (k,1,k)$, $\overrightarrow{e}_3 = (1,-1,2)$.

c) $\overrightarrow{e}_1 = (-4,2,-6)$, $\overrightarrow{e}_2 = (k,1,k)$, $\overrightarrow{e}_3 = (2,-1,3)$.

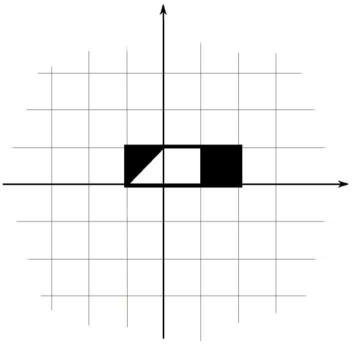
23. Для какого значения параметра a вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ является собственным для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?

24. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} -8 & 25 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.

25. Найти какой-нибудь квадратный корень из матрицы $\begin{pmatrix} 49 & -48 \\ 24 & -23 \end{pmatrix}$.

26. Для каких значений параметра a в характеристическом многочлене матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 6 & 7 & a \end{pmatrix}$ коэффициент при λ в три раза меньше коэффициента при λ^2?

27. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ фигуры, изображенной на рисунке.



28. В базисе $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ оператор задан матрицей $A_{(e)} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Известно, что $\overrightarrow{e}_1 = 2\overrightarrow{e}'_1 - \overrightarrow{e}'_2$, $\overrightarrow{e}_2 = -3\overrightarrow{e}'_1 + \overrightarrow{e}'_2$. Найти матрицу $A_{(e')}$ оператора в базисе $(\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2)$.

29. Является ли линейным оператором отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, заданное формулой $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ \arccos(\cos x) + 5y \end{pmatrix}$. Если является, найти его матрицу в стандартном базисе.

30. Для каких значений параметра a значение квадратичной формы, заданной матрицей $\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2 \\ -1 & -2 & -a \end{pmatrix}$, на векторе $(1, -2, -1)$ больше 2?

31. В квадратичной форме $x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ сделать замену переменных $y_1 = 3x_1 - 2x_2, y_2 = -x_1 + x_2$.

32. Для каких значений параметра a квадратичная форма, заданная матрицей $\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$, является положительно определенной, а для каких — отрицательно определенной?

33. Квадратичную форму $10x_1^2 - 12x_1x_2 + 10x_2^2$ привести к главным осям.

34. Возвести матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ в 142 степень.

35. Квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ привести к главным осям.

36. Привести уравнение эллипса $-56 - 8x + 10x^2 - 8y - 12xy + 10y^2 = 0$ к каноническому виду. Сделать рисунок.

37. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x & x^2 + y^2 & 2x + y \\ 2 & 2x + y & 9 \end{pmatrix}$ найти разложение Холецкого и указать значения параметров, при которых оно существует.

38. Выяснить, является ли подпространством в $\mathbb{R}^2$ множество векторов $W = \{(x, y) \mid x^2 - 3y^2 = 0\}$.

39. Подпространство W в $\mathbb{R}^4$ задано в виде линейной оболочки набора векторов

$$(1, 2, -3, 0), (1, 0, -3, 2), (2, -3, -1, 2), (4, 2, -5, -1), (4, 1, -3, -2).$$

Задать W системой, состоящей из трех линейных уравнений.

40. При каком значении параметров a и b вектор $(1, a, b, 1)$ ортогонален подпространству из предыдущей задачи?

41. Подпространство W в $\mathbb{R}^3$ задано в виде линейной оболочки набора векторов $(1, 2, -3)$, $(1, 0, -1)$, $(2, -3, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(4, 1, -5)$, $(3, 1, -4)$. Задать W как линейную оболочку линейно независимых векторов.

42. Найти матрицу ортогонального проектора на подпространство W из предыдущей задачи. Спроектировать на W вектор $(1, 2, 3)$.

43. Решить задачу линейного программирования: найти максимум функции $x + 2y$ при ограничениях $-x + 3y \geq 0$, $-2x + y \leq 0$, $3x + y - 10 \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Оглавление