Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

С. А. Вартанов, Е. А. Ивин

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИГР ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Вологда
ВолНЦ РАН
2020

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18я73

В18

Рецензенты:

Васин А. А., профессор, д. ф.-м. н., факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова;

Петров И. В., профессор, д.э.н., факультет ЭиФТЭК, Финансовый Университет при Правительстве РФ.

Вартанов, Сергей Александрович, Ивин Евгений Александрович.

В18 Прикладная теория игр для экономистов. – Вологда: ВолНЦ РАН, 2020. – XXX с.: илл., табл.

ISBN XXX-X-XXXXX-XXX-X

Книга представляет собой учебник, пригодный для изучения математического аппарата теории игр и ее приложений из математической экономики и социологии. Первая часть пособия посвящена теоретическим основам и приложениям моделей некооперативных конечных игр. Во второй части излагаются базовые принципы построения и решения игровых задач с континуальными множествами стратегий, в том числе и кооперативных игр с трансферабельными выигрышами. Третья часть посвящена многошаговым играм различных типов, в частности, иерархическим играм и позиционным играм как с полной, так и с неполной информацией.

Данный учебник предназначен для студентов экономических и математических специальностей, а также для специалистов в области теории игр, исследования операций и экономики.

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18я73

ISBN XXX-X-XXXXX-XXX-X

Светлой памяти

Евгения Александровича Ивина

посвящается

1. Предисловие.

Предлагаемая Вашему внимания книга является плодом долгой кропотливой работы, основанной на многолетнем преподавании авторами блока экономико-математических дисциплин, осуществлявшихся авторами в МГУ им. М.В. Ломоносова (ВМК, мехмат, Московская школа экономики, факультет журналистики). В основу ее, впрочем, легли два базовых курса: «Введение в теорию игр» и «Теория игр продвинутого уровня», читаемых в Московской Школе Экономики МГУ им. М.В.Ломоносова. Структура этих курсов и, как следствие, настоящего учебника несколько отличается от традиционно принятых при преподавании теории игр. В частности, настоящее пособие не выделяет антагонистические игры в отдельный раздел курса теории игр, с которого обычно начинается исследование данного предмета. Вместо этого изучение курса предлагается начать с одной из основ математического аппарата теории игр – обсуждения различных концепций решения теоретико-игровых задач от Парето-оптимальности до различных вариантов ядра.

В учебнике обсуждаются различные классы игровых моделей: помимо статических (одношаговых) игр, рассматриваются также примеры многошаговых игр (иерархические и позиционные игры), а также базовые примеры кооперативных игр. Для всех рассматриваемых классов игр обсуждаются вопросы существования/количества и методы поиска ситуаций равновесия (или иных подходящих концепций решения). При иллюстрации теоретических концепций, методов и утверждений делается упор на примеры из математической экономики, в то же время, весьма подробно разобран и ряд примеров из смежных отраслей наук об обществе, например, политологии и военного дела.

В целях ограничения объема, а также в силу вводного характера, настоящее издание содержит не слишком большое количество утверждений топологического, теоретико-оптимизационного и теоретико-функционального характера, составляющие математический базис для теории игр. Тем не менее, в нем приведены самые важные из них (например, теоремы о неподвижной точке, элементы выпуклого анализа), а также их доказательства для наиболее наглядных частных случаев. Кроме того, практически везде, где читатель, заинтересованный в более глубоком изучении вопроса, пожелает получить полные формулировки теорем и законченное формальное их доказательство, приводятся ссылки на статьи и монографии, где можно их найти.

Пособие может быть использовано для чтения курсов вводного и продвинутого уровня по теории игр и математической экономике студентам, обучающимся по специальностям "Прикладная математика" и "Экономическая кибернетика". Предполагается знакомство читателей с начальными курсами математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей. Предлагаемые после каждого раздела примеры и упражнения способствуют активному усвоению материала и позволяют использовать пособие также для проведения семинарских занятий.

Автор признателен всем коллегам по кафедре Эконометрики и математических методов за поддержку и советы, во многом определившие структуру книги и стиль ее изложения. В частности, наибольшую помощь в формировании курса оказал Алексей Мироненков, в течение многих лет являющийся коллегой авторов в преподавании курса Теории Игр в МШЭ МГУ. Авторы также благодарят заведующего кафедрой Эконометрики и математических методов МШЭ МГУ, к.ф.-м.н. Алексея Курбацкого за неоценимую помощь в подготовке и написании настоящего учебного пособия, без которой его появление было бы невозможно. Кроме того, авторы хотели бы поблагодарить профессора, зам. заведующего кафедрой Исследования операций факультета ВМК МГУ Александра Васина за ценные советы и многолетнюю совместную работу в сфере математической теории игр. И конечно же, в наибольшей степени авторы благодарны своим семьям за помощь, понимание и поддержку, оказанную на всех этапах подготовки – от появления задумки до вычитки финальной версии учебника.

2. «Введение во введение». Открываем дверь в теорию игр.

2.1. Место теории игр в современной математической и экономической науке. Понятие о задаче исследования операций.

Начнем настоящее пособие с описания места теории игр в современной математической и экономической науке. Если обратиться к формальному определению, то теория игр - раздел прикладной математики, с помощью которого моделируется поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. В других учебных пособиях и монографиях под Теорией игр понимается математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях. На самом деле, оба этих определения эквивалентны – потому что любая ситуация столкновения несовпадающих интересов и является конфликтом в широком смысле.

Построение и исследование моделей принятия решения традиционно относят к задачам **исследования операцией**. Согласно элегантному определению, предложенному одним из основателей российской школы Исследования операций, академиком П.С.Краснощековым, «теоретический аспект исследования операций состоит в построении и исследовании математических моделей принятия оптимальных решений». Очевидно, что любая операция, представляющая собой совокупность направленных на достижение какой-либо цели действий, немыслима без определения этой самой цели. **Цель** может формулироваться, вообще говоря, как угодно – в зависимости от того, в какой сфере принимается решение. Например, в военном деле целью является выполнение поставленной боевой задачи (по сути, бинарная величина: либо отряд выполнил задачу, либо нет), а в экономике целью, как правило, является максимизация определенного KPI – количественного показателя успешности лица, принимающего решение. Чаще всего в математических моделях экономики максимизируется прибыль (если субъект, принимающий решения, есть фирма) либо полезность (если решение принимает потребитель). В распоряжении оперирующей стороны – субъекта, принимающего решения – имеются определенные и в общем случае ограниченные ресурсы. На исход операции влияют как **контролируемые факторы**, значения которых определяет своими действиями оперирующая сторона, так и **неконтролируемые факторы**. Те правила, которые принимает оперирующая сторона во внимание при определении значений контролируемых факторов, формируют ее **стратегию**. Что касается неконтролируемых факторов, то они включают в себя все то, на что повлиять оперирующая сторона не в состоянии. В зависимости от того, насколько оперирующая сторона информирована и в состоянии предсказать значение неконтролируемых факторов, среди них можно выделить **случайные факторы** (для них известен хотя бы закон распределения и стохастичность поведения) и **неопределенные факторы**, о которых известна лишь область определения. Среди неопределенных факторов – как природные неопределенности и факторы неясности цели оперирующей стороне, так и стратегии, контролируемые другими субъектами с их собственными интересами, не совпадающими с интересами оперирующей стороны. Стремление субъекта к достижению своей цели характеризуется увеличением значения некоторой функции (критерия эффективности), зависящей от всех факторов и достигающей максимального значения тогда и только тогда, когда достигается цель.

Впервые с задачей исследования операций можно встретиться в курсе математического анализа или теории оптимизации. Простейшая математическая модель принятия решений состоит в следующем. Имеется множество стратегий, на котором определена скалярная числовая функция, а принцип оптимальности отвечает ее максимизации. Таким образом, простейшими моделями принятия решений является задачи (не)ограниченной оптимизации скалярной (одномерной) функции. В подобных моделях лицо, принимающее решения, выбирает стратегию – то есть свой план действий – из некоторого множества доступных стратегий (например, множество планов производства, множество стратегий поведения). Целевая функция (она же критерий эффективности) отражает интересы принимающего решения лица, а одними из ее аргументов является выбранная им стратегия (например, функция прибыли, зависящая от назначенного плана производства). Задача принятия решений состоит, как правило, в том, чтобы найти стратегию, максимизирующую целевую функцию.

Задачи, в которых существует единственный и четко сформированный критерий эффективности, впрочем, встречаются в прикладных разделах теории исследования операций не слишком часто. Более сложные модели предполагают несколько критериев эффективности, которые объединены в векторный критерий эффективности. Когда это обосновано? Во-первых, в тех случаях, когда качество решения может быть описано с нескольких точек зрения по нескольким несовпадающим параметрам. Во-вторых, когда качество решения необходимо оценивать сразу для нескольких вариантов условий, сценариев. Наконец, когда оперирующая сторона состоит из нескольких субъектов, интересы которых описываются различными целевыми функциями. В этом случае мы вплотную подходим к предмету теории игр как важнейшего раздела исследования операций.

В теории игр основным предметом анализа являются более сложные модели принятия решения – в них лиц, принимающих решение, несколько – от двух до бесконечности. Предполагается, что их интересы не совпадают – то есть целевые функции этих лиц различны[1]. В этом и заключается основная суть конфликтной ситуации: решение принимается не одним индивидом, а несколькими, и функция выигрыша каждого из них зависит не только от его стратегии, но также и от решений других участников. Математическая модель такого рода конфликта называется игрой, а участники конфликта − игроками.

Очевидно, что в рамках такого подхода сфера применения теоретико-игровых моделей необычайно широка. Помимо классических *игр* – азартных, спортивных, из исследования которых и выросла вся существующая теория, конфликтной ситуацией может

[1] Строго говоря, одного только отличия целевых функций недостаточно. Например, если целевая функция одного ЛПР равна целевой функции другого, умноженной на константу, то очевидно, что оптимальное поведение их совпадет.

считаться любое человеческое взаимодействие. Таким образом, предметом теории игр может быть не только игра в шахматы, футбол или преферанс, но и другие, значительно более значимые с общечеловеческой точки зрения конфликты. Теория игр находит применение в военном деле (например, модели типа «оборона-нападение» или модели дуэлей), в экономике (например, почти все модели рынков несовершенной конкуренции в микроэкономике имеют теоретико-игровую природу, модели размещения общественного блага - тоже[2]), а также в политологии (модели электорального поведения, модели распределения влияния[3]) и даже в биологии (некоторые модели эволюционной динамики основаны на бесконечных повторяющихся играх[4]) и государственном и корпоративном управлении[5]. В настоящем пособии отводится особое место исследованию прикладных моделей из всех упомянутых сфер.

2.2. История теории игр и классификации игровых моделей. «Камень-Ножницы-Бумага» как входной билет в теорию игр.

Исторически теория игр зародилась еще в XVIII веке, с началом эпохи просвещения и развитием экономической теории. А первые экономические модели того научного направления, что потом станет

---

[2] См., например: Савватеев А.В. Анализ коалиционной устойчивости «биполярного мира». Журнал Новой экономической ассоциации, 2012, №1 (17), с. 10-43; Савватеев А.В. Миграционно-устойчивая организация одномерного мира: теорема существования решения. Известия Иркутского государственного университета, Серия «Математика», 2013. Т. 6, № 2. С. 57-68

[3] Алескеров Ф.Т. Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций. Доклады Российской академии наук. 2007. Т. 414. № 5. С. 594-597.

[4] Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС-Пресс, 2005.

[5] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2005.

теорией игр, рассматривались А. Курно и Ж. Бертраном в XIX веке. Позже эти модели стали хрестоматийными моделями производства и ценообразования в условиях олигополии и ныне носят имена своих создателей (модели олигополии Курно и Бертрана). В начале XX в. Э.Ласкер (на протяжении 27 лет непобедимый чемпион мира по шахматам), Э.Цермело и Э.Борель выдвигают идею математической теории конфликта интересов. Формальные математические аспекты и приложения теории были впервые изложены в книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». В то время «мейнстримом» научных исследований были антагонистические игры – игры, в которых выигрыш одного игрока был равен потерям его визави. При этом вплоть до середины XX века теория игр считалась лишь математической теорией, несмотря на очевидные возможности для применения в экономике. Однако после Второй мировой войны в США (не в последнюю очередь благодаря увеличению финансирования науки), начинаются попытки практического применения теории игр в экономике, биологии, кибернетике, технике, антропологии. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений. В начале 50-х годов XX века Джон Нэш формулирует ставшую впоследствии ключевой для всей теории игр концепцию равновесия Нэша в неантагонистических играх. Согласно этой концепции, участники конфликта должны использовать оптимальную стратегию, что приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение. Работы Нэша внесли значительный вклад в развитие теории игр, были пересмотрены математические инструменты экономического моделирования. В целом современная теория игр во многом опирается на подходы и результаты, увидевшие свет именно в работах Нэша. Однако и в последние годы это научное направление бурно развивается. Некоторые направления современной экономической теории вообще невозможно сформулировать без применения теории игр. Более того, львиная доля Нобелевских премий по экономике в последние годы была вручена за работы, в которых значительное внимание уделялось именно игровым моделям. Среди них можно назвать премии 2005 (Р.И.Ауманн и Т.К.Шеллинг, «За расширение понимания проблем конфликта и кооперации с помощью анализа в рамках теории игр»), 2007 (Л.Гурвич, Э.Маскин, Р.Майерсон, «За создание основ теории оптимальных механизмов»), 2012 (Л.Шепли и Э.Рот, «За вклад в теорию устойчивого распределения и практику моделирования рынка»).

Традиционно математическая теория игр подразделяется на два основных направления. Теория кооперативных игр изучает принятие решений в предположении, что существует механизм, обеспечивающий выполнение совместно принятого решения. При этом основная задача в этом направлении − указать множество взаимовыгодных решений с учетом интересов и самостоятельных возможностей отдельных игроков и коалиций, то есть групп совместно действующих игроков. Если это множество включает несколько вариантов решения, то возникает также задача выработки критерия оптимальности, который позволил бы найти единственное, наилучшее в некотором смысле решение. В свою очередь, некооперативные игры отражают ситуации, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга, и если какие-то соглашения заключаются, то они не являются обязывающими: каждый игрок может отклониться от договоренности. Настоящее учебное пособие посвящено в основном именно некооперативным играм.

Помимо деления на кооперативные и некооперативные игровые модели, существует также множество других классификаций моделей теории игр. Например, различие между статическими и динамическими играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

Традиционно исследование теории игр начинается с изучения статических игр двух лиц. Среди таких игр в литературе часто выделяется отдельный подкласс задач, в которых выигрыш одного участника равен потерям другого. Этот тип игр называется антагонистическими. Антагонистическим играм во многих учебниках посвящена отдельная глава, где разбираются методы их решения и анализа. Однако в рамках настоящего учебного пособия исповедуется иной подход. Антагонистические игры, при всем их важном прикладном значении, являются всего лишь подклассом игровых задач в целом, и методы их решения в основном являются частными случаями методов решения поэтому авторам не кажется необходимым выделять их в отдельный раздел. Тем не менее, в силу их более простого вида и (в отдельных случаях) менее громоздких выкладок в настоящем пособии авторы формулируют некоторые теоремы, справедливые и для общих случаев, лишь для антагонистических игр. Например, каноническим примером антагонистической игры является классическая детская игра «Камень-Ножницы-Бумага». Ее очень удобно использовать для иллюстрации основных принципов теории игр: почти все знают ее правила, она проста и при этом ее математическая модели содержит все характерные элементы базового математического аппарата теории игр.

Опишем «на человеческом языке» правила игры «Камень-Ножницы-Бумага». В игре участвуют двое, игроки считают вместе вслух «Камень… Ножницы… Бумага… Раз… Два… Три», одновременно качая кулаками. На счёт «Три» они одновременно показывают при помощи руки один из трёх знаков: камень, ножницы или бумагу. Победитель определяется по следующим правилам:

- Камень побеждает ножницы («камень слишком крепок для ножниц»);
- Бумага побеждает камень («бумага накрывает камень»);
- Ножницы побеждают бумагу («ножницы разрезают бумагу»).

Если игроки показали одинаковый знак, то засчитывается ничья и игра переигрывается.

Как можно математически описать эту игру? Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Это означает, что множество игроков (будем обозначать его I в этой игре состоит из двух элементов: $I = \{1,2\}$. Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Будем обозначать множества стратегий игрока под номером i как S_i (S – от слова strategy). Тогда в теоретико-игровой модели «Камень-ножницы-бумага» для каждого из двух игроков ($i = 1; 2$, то есть $i \in I$) множество стратегий для каждого игрока будет иметь вид $S_i = \{1,2,3\}$. Здесь стратегия 1 означает выбор камня, стратегия 2 – ножниц, а стратегия 3 – бумаги.

После того, как мы формально записали множество игроков и множество стратегий, следующей задачей является формализация их выигрышей. Поскольку в игре участвуют всего два игрока, а у каждого игрока конечное число стратегий, то ***профилей стратегий*** (всевозможных наборов стратегий всех игроков) конечное число – в нашем случае их девять.

Будем считать, что выигрыш победившего игрока равен 1 условной единице, а выигрыш проигравшего равен -1[6]. Заметим, что несмотря на то, что игрок несет потери, они все равно называются «выигрышем». Их смысл как потерь для игрока несет знак минуса. В случае ничьей никто ничего не получает (но и не теряет) и сохраняется статус-кво, поэтому выигрыш будем считать равным нулю. Поскольку у каждого из игроков есть по три стратегии, удобно записать исходы игры в виде простой таблицы 3 на 3, где строки и столбцы соответствуют выбираемым игроками стратегиям, а

[6] Вообще, дальше по тексту нам часто потребуется описывать выигрыш игроков в подобном «обобщенном» виде. Поэтому дальше слова «условные единицы выигрыша» для сокращения записи будут заменяться на просто «единицы»

содержимое ячеек представляет собой вектор выигрышей игроков в соответствующей ситуации:

Игрок 2 / Игрок 1	Камень	Ножницы	Бумага
Камень	(0; 0)	(1; -1)	(-1; 1)
Ножницы	(-1; 1)	(0; 0)	(1; -1)
Бумага	(1; -1)	(-1; 1)	(0; 0)

Таблица 2.1. Выигрыши игроков в разных ситуациях игры «Камень-ножницы-бумага»

Для того, чтобы формально определить, что такое функция выигрыша, напомним следующее определение. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_N$-множества. Тогда декартовым произведением этих множеств называется множество всевозможных наборов из N элементов, где на -м месте стоит элемент s_i множества S_i:

$$S = \prod_{i=1}^{N} S_i = \{(s_1, s_2, \dots, s_N) | s_1 \in S_1, s_s \in S_2, \dots, s_N \in S_N\}$$

Множество профилей стратегий всей игры (множество ситуаций игры) представляет собой декартово произведение множеств стратегий всех игроков. Например, в игре «Камень-ножницы-бумага» множество ситуаций – это множество пар {(камень, камень); (камень, ножницы); …; (бумага, бумага)}. Таким образом, в этой игре ровно девять профилей стратегий, каждый из которых однозначно соответствует ситуации в игре. Например, в Таблица 2.1 каждая ячейка соответствует одной ситуации игры.

Обозначим $S_{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} S_j$ множество стратегий всех игроков, кроме игрока $i \in I$. Пусть у нас есть множество игроков $I = \{1, \dots, N\}$. Пусть $s_i \in S_i$ – стратегия игрока $i \in I$, а $s \in S$ – профиль стратегий. Функция $u_i(s)$ выигрыша игрока i присваивает каждому возможному профилю стратегий $s \in S$ выигрыш данного игрока, при условии, что все игроки выбирают входящие в этот профиль стратегии: $u_i: S \to R$. Обозначим $u: S \to R^N$ вектор-функцию, составленную из функций выигрыша всех игроков. Каждому профилю стратегий она ставит в соответствие вектор выигрышей всех игроков.

Определение 2.1. Тройка $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ называется игрой в нормальной форме.

В игре каждый Г игрок i выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Таким образом, все взаимодействие игроков представлено в виде математического объекта – игры в нормальной форме – который содержит всю информацию об исследуемом конфликте. Теперь нашей задачей является понять, какие стратегии игроки выберут, в зависимости от их множеств стратегий S и функций полезностей $u(\cdot)$. По сути, решить теоретико-игровую задачу – это и означает указать те стратегии, которые являются для каждого игрока оптимальными. При этом, в отличие от самых простых моделей принятия решения – оптимизационных моделей, где есть только одна целевая функция, и поиск решения сводится к поиску ее максимума, - в игровых задачах «одновременно» максимизируются сразу несколько целевых функций. Поэтому здесь могут быть несколько критериев оптимальности – в качестве решения можно рассматривать как «компромиссные» варианты (например, равновесия Нэша), так и «лучшие сразу для всех» (например, Парето-эффективные исходы, равновесия по доминированию).

2.3. Концепции решения: доминирование, наилучший гарантированный результат, равновесие Нэша, Парето-оптимальность, коалиционная устойчивость.

В теории игр, как и во многих других теориях, можно выделить два подхода: нормативный и дескриптивный. Нормативный подход состоит в том, что теория дает рекомендации, как следует действовать в той или иной конфликтной ситуации. А при дескриптивном подходе теория пытается описать, как на самом деле происходит взаимодействие между игроками. Изначально теория игр развивалась как нормативная – она пыталась определить оптимальное поведение игроков, не вдаваясь в тонкости его реализации. В настоящей главе мы обсудим концепции оптимального поведения игроков и соответствующие им профили стратегий, которые будем считать решением исходной игровой задачи. Заметим, что многие концепции решения могут напомнить читателю аналогичные подходы, характерные для задач многокритериальной оптимизации (доминирование, Парето-оптимальность, минимакс и принцип гарантированного результата). Эта «похожесть» есть следствие глубокой связи теории игр с другими разделами исследования операций.

Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему б***о***льший выигрыш. Это рассуждение приводит к понятию доминирующих и доминируемых стратегий. Начнем с формального определения.

Определение 2.2. Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ – игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ сильно (слабо) доминирует стратегию $s_i' \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо: $u_i(s_i, s_{-i}) > (\geq)\ u_i(s_i', s_{-i})$.

Иными словами, стратегия s_i дает игроку выигрыш б***о***льший, чем стратегия s_i', всегда – при любых стратегиях соперников. Очевидно, что в этом случае игроку совершенно не выгодно использовать стратегию s_i' - ведь есть как минимум одна другая стратегия, заведомо «лучше» ее. Таким образом, доминируемые стратегии не могут оказаться оптимальными для игрока ни при каком критерии оптимальности.

Если у игрока есть одна стратегия, которая доминирует все остальные (*доминирующая* стратегия), то мы можем утверждать, с большой долей уверенности, что он выберет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то получаемый из них набор стратегий составляет первый из рассматриваемых вариантов решения игры (и прогноз относительно того, что сделает каждый игрок). Речь идет о равновесии по доминированию.

Определение 2.3. Ситуация $s^* \in S$ – равновесие в сильно (слабо) доминирующих стратегиях в игре $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$, если для каждого игрока $i \in I$ его стратегиях s_i^* – доминирующая: для любого $s_i' \neq s_i^*, s_i' \in S_i$ и для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо: $u_i(s_i^*, s_{-i}) > (\geq)\, u_i(s_i', s_{-i})$.

К сожалению, в реальных конфликтных ситуациях игроку редко «везет» так, чтобы у него нашлась доминирующая стратегия. Как ему быть, если он не имеет никакого представления о том, что будут делать его «соперники» по игре - другие игроки? Согласно терминологии обобщенной модели операции, для игрока действия его конкурентов есть подмножество множества неопределенных факторов. В исследовании операций для работы с неопределенными факторами используется принцип наилучшего гарантированного результата: в качестве оценки эффективности каждой своей стратегии лицо, принимающее решение, использует минимальное (по переменным, соответствующим неопределенным факторам) значение своей целевой функции при использовании этой стратегии. Этот принцип позволяет сформулировать нам понятия гарантированного результата каждого игрока в игре и максиминной стратегии.

Определение 2.4. Наилучшим гарантированным результатом (НГР либо нижнее значение игры) игрока $i \in I$ в игре $\Gamma = \langle \mathrm{I}, \mathrm{S}, \mathrm{u} \rangle$ называется величина $\underline{v} = \sup\limits_{s_i \in S_i} W_i(s_i)$, где $W_i(s_i)$ есть оценка эффективности стратегии $s_i \in S_i$, показывающая наихудший результат, на который может рассчитывать игрок i при использовании данной стратегии: $W_i(s_i) = \inf\limits_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$. При этом стратегия $\underline{s}_i$, для которой $\inf\limits_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = \underline{v}$, называется максиминной.

Понятия доминирования, наилучшего гарантированного результата и максиминной стратегии касаются только одного участника игры – ведь только для него доминирующая стратегия заведомо лучше доминируемой, а при определении НГР и максиминной стратегии он не учитывает функции выигрыша других игроков. Очевидно, что для его соперников ситуация может быть совершенно иной – для какого-то игрока (скажем, j) вполне возможна ситуация, когда смена игроком i стратегии с доминируемой на доминирующую приведет к снижению выигрыша. В литературе в таких случаях часто используется понятие «индивидуальной устойчивости» - то есть отдельно взятому индивиду невыгодно отклоняться от доминирующей стратегии. Принципу индивидуальной устойчивости соответствует концепция решения, называемая равновесием Нэша.

Определение 2.5. Ситуация $s^0 \in S$ – равновесие Нэша в игре $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$, если для каждого игрока $i \in I$ его стратегиях s_i^0 обеспечивает максимальный выигрыш при условии, что набор стратегий всех прочих игроков есть $s_{-i}^0 = \left(s_j, j \in I \setminus i\right)$:

$$u_i\left(s_i^0, s_{-i}^0\right) = \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^0\right).$$

Если этот максимум единственный, то равновесие называется строгим, в ином случае – слабым.

Для антагонистических игр аналогом равновесия Нэша является **седловая точка** функции выигрыша первого игрока. Действительно, антагонистическая игра представляет собой игру двух лиц с функциями выигрыша $u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2) = u(s_1, s_2)$. Седловая точка (s_1^0, s_2^0) функции $u(s_1, s_2)$ - это такая точка, что для нее $u(s_1, s_2^0) \leq u(s_1^0, s_2^0) \leq u(s_1^0, s_2)$ при любых $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$. Эквивалентная запись: $\max\limits_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^0) = u(s_1^0, s_2^0) = \min\limits_{s_2 \in S_2} u(s_1^0, s_2)$, из нее становится очевидным, почему использование седловой точки оправдано в качестве решения антагонистической игры, содержательно эквивалентного равновесию Нэша. При этом величина $v = \max\limits_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^0) = u(s_1^0, s_2^0) = \min\limits_{s_2 \in S_2} u(s_1^0, s_2)$ называется **значением игры**. В отличие от игр с непротивоположными интересами, существование седловой точки в произвольной антагонистической игре проверяется достаточно просто и связано со сравнением наилучших гарантированных результатов игроков.

Теорема 2.1 (о седловой точке). Функция $F(x, y)$ имеет седловую точку на множестве $X \times Y$ тогда и только тогда, когда

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y).$$

Седловую точку образуют максиминные стратегии игроков[7], обеспечивая им наилучшие гарантированные результаты, которые, согласно данной теореме, должны совпадать.

В равновесии Нэша стратегия любого игрока обеспечивает ему максимальный выигрыш при входящих в равновесный профиль

[7] В ряде учебников и пособий для антагонистических игр с функцией выигрыша первого игрока $F(x, y)$ вводится понятия минимаксной стратегии y_0 второго игрока и верхнего значения $\overline{v}$ игры – таких, что $\sup\limits_{x \in X} F(x, y_0) = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x, y) = \overline{v}$. Авторы не посчитали необходимым делать это в основном тексте книги. Действительно, определения минимаксной стратегии второго игрока и верхнего значения совпадут с **Определение 2.4**, записанным для функции выигрыша $u_2(\cdot,\cdot) \equiv -F(\cdot,\cdot)$.

(фиксированных) стратегиях других игроков. Этому исходу игры можно дать интерпретацию «компромисса» в нормативном ключе: если всем игрокам предписать действовать в соответствии с равновесными по Нэшу стратегиями, то все игроки получат максимально возможный выигрыш, достижимый при независимом выборе стратегий. Независимость выбора играет здесь ключевую роль: если между игроками существует возможность коммуникации, то может найтись такое множество игроков, которым окажется выгодным координированно выбрать свои стратегии так, чтобы улучшить свой выигрыш по сравнению с равновесным. Таким образом, равновесие Нэша не отвечает требованию коллективной устойчивости.

Уточнений понятия равновесия Нэша, учитывающих устойчивость к отклонению **коалиций** – то есть групп игроков различного состава – существует довольно много. Различия в данных уточнениях состоят в том, отклонения коалиций какого типа запрещает каждая конкретная концепция решения. Наиболее строгим из всех вариантов является **сильное равновесие Нэша** – это равновесие Нэша, устойчивое к отклонению любых коалиций. В условиях сильного равновесия все игроки выбирают такие стратегии, что ни одно из подмножеств игроков не сможет координированно выбрать иные стратегии так, чтобы увеличить выигрыш всех своих членов при условии неизменности стратегий прочих игроков. Впрочем, несмотря на свою «абсолютную устойчивость», концепция сильного равновесия Нэша находит применение далеко не во всех игровых моделях. Во-первых, она предполагает, что между всеми игроками возможна ничем не ограниченная коммуникация, и любые группы игроков могут без потерь и проблем договариваться о единых принципах поведения. Во-вторых, для того, чтобы сильное равновесие имело практическое значение, игроков должно быть достаточно много. В-третьих, требования сильного равновесия весьма строгие, поэтому во многих игровых моделях его может попросту не существовать.

Родственным сильному равновесию понятием является некооперативный вариант ядра игры. Для его формулировки введем определение блокирования набора стратегий какой-либо коалицией.

Определение 2.6. Коалиция игроков T блокирует ситуацию (набор стратегий) $s \in S$, если существует такой набор стратегий $\tilde{s}_T = (s_i, i \in T)$ такой, что все участники из T получают выигрыш больший, чем в ситуации s:

$$u_i(\tilde{s}_T, s_{-T}) > u_i(s_T, s_{-T}) \; \forall i \in T$$

при любых действиях s_{-T} не входящих в коалицию T игроков.

Используя Определение 2.6, введем понятие ядра игры как множества таких ее ситуаций, для которых не найдется ни одной блокирующей коалиции.

Определение 2.7. Ядром $C = C_W$ (обычным, слабым ядром) игры $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ называется множество наборов стратегий, не блокируемых никакой коалицией $T \subset I$.

Таким образом, ядро – это совокупность таких ситуаций в игре, вне которой способные к переговорам игроки совершенно точно не будут заключать никаких соглашений. Однако даже знание ядра не может ответить на вопрос о том, о каких исходах игры было бы выгодно договариваться всем игрокам. Для этого традиционно используются понятия Парето-улучшения и Парето-оптимума[8]. Формальное их определение имеет следующий вид.

Определение 2.8. Ситуация $s \in S$ игры $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ является Парето-улучшением другой ситуации $s' \in S$ (s Парето-доминирует s'), если $\exists i \in I: u_i(s) > u_i(s')$; $u_j(s) \geq u_j(s')\ \forall j \neq i$.

Говоря простым языком, в Парето-доминирующей ситуации s найдется такой игрок $i \in I$, что он получает в ней выигрыш строго больший, чем в ситуации s', в то время как выигрыш остальных игроков в ней по крайней мере не хуже, чем в s'. Альтернативное название – Парето-улучшение – подсказывает основную идею: переход из ситуации s' в ситуацию s улучшает «состояние общества»: никому от него не становится хуже, а хотя бы одному участнику становится лучше.

Определение 2.9. Ситуация $s \in S$ игры $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ называется Парето-оптимальной (Парето-оптимумом), если не существует ее Парето-улучшения.

Парето-оптимальные ситуации в игре часто могут не существовать, кроме того, они могут не быть индивидуально устойчивыми – то есть какому-то отдельному игроку может оказаться выгодно «разрушить Эдем» - перейти из Парето-оптимальной ситуации в другую, увеличив свой выигрыш, но уменьшив выигрыши других игроков.

---

[8] Вильфредо Парето (15 июля 1848, Париж — 20 августа 1923, Селиньи, кантон Женева, Швейцария) — итальянский инженер, экономист и социолог. Помимо Парето-оптимальности, его имя также носит статистическое Парето-распределение.

Пример 2.1. Рассмотрим игру двух лиц, имеющих по три стратегии, выигрыши которых описываются таблицей:

	Стратегия 1	Стратегия 2	Стратегия 3
Стратегия 1	(1; 1)	(2; 4)	(5; 7)
Стратегия 2	(4; 6)	(6; 2)	(4; -1)
Стратегия 3	(7; -2)	(-1; 6)	(4; -2)

Таблица 2.2. Выигрыши игроков в игре для **Пример 2.1**

В ней выделенная цветом ситуация является одновременно и равновесием Нэша, и Парето-оптимальной. С одной стороны, ни одному из игроков не выгодно отклоняться от нее в одностороннем порядке (первое выделенное число 5 максимальное в своем столбце, второе выделенное число 7 – в своей строке). С другой стороны, не существует такой ситуации в игре, в которой **оба** игрока получали бы выигрыш б***о***льший, чем в (1,3), если бы они координированно решили «передвинуть» игру туда. Действительно, первому игроку, если он находится в ситуации (1,3), могло бы быть выгодным оказаться в ситуации (2,2), так как тогда его выигрыш увеличится с 5 до 6. Однако такое изменение заблокирует второй игрок, выигрыш которого снизится с 7 до 2. Что касается второго игрока, то он получает в ситуации (1,3) и вовсе свой единственный наибольший выигрыш, для него любая ситуация будет хуже данной.

3. Конечные игры.

3.1. Матричные и биматричные игры. Равновесие Нэша и методы его поиска.

Рассмотрим простейший класс теоретико-игровых задач, подобных задаче из **Пример 2.1**. Пусть в игре $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ всего два игрока, а множества стратегий каждого из них конечны.

Определение 3.1. Игры, в которых множество игроков состоит из двух элементов, а число их стратегий конечно, называются биматричными.

Название «биматричные» указывает на более удобный (и потому используемый традиционно) способ формализации выигрышей игроков, чем в виде таблицы с векторами выигрышей. Вообще говоря, выигрыш каждого игрока является функцией, зависящей от выбранных им и его соперниками стратегий. В случае биматричных игр выигрыши обоих игроков представимы в виде матрицы. Каждая строка этой соответствует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец - одной стратегии 2-го игрока. А на их пересечении стоит элемент матрицы, равный выигрышу данного игрока при соответствующем профиле стратегий.

Заметим, что биматричная антагонистическая игра для записи не требует двух матриц, так как матрица выигрыша второго игрока фактически является матрицей выигрыша первого игрока, умноженной на -1. Поэтому биматричные антагонистические игры называются просто «матричными», матрица выигрыша второго игрока обычно даже не записывается.

Для биматричных игр ключевые для теории игр концепции решения - равновесие в доминирующих стратегиях и равновесия Нэша - принимают довольно простой и наглядный вид. Начнем с доминирования: в биматричной игре строгое доминирование у первого игрока стратегии i над стратегией i' эквивалентно тому, что в его матрице выигрыша -я строка поэлементно строго больше i'-той (а слабое доминирование соответствует нестрогим неравенствам). Для второго игрока аналогично: -й столбец матрицы B поэлементно больше j'-ого тогда и только тогда, когда у второго игрока стратегия j доминирует j'-ю.

В равновесии Нэша стратегия любого игрока обеспечивает ему максимальный выигрыш при входящих в равновесный профиль (фиксированных) стратегиях других игроков. Зафиксируем равновесные значения стратегий всех игроков, кроме i. Тогда его функция выигрыша $\tilde{u}_i(s_i) = u_i(s_i, s^*_{-i})$ суть функция одной переменной – его стратегии, а равновесная по Нэшу стратегия ${s_i}^*$ - аргмаксимум этой функции, то есть множество тех стратегий, которые максимизируют $\tilde{u}_i(s_i)$.

Определение 3.2. Отображение реакции (оно же **отображение наилучшего ответа**) игрока i есть множество $s_i(s_{-i})$, такие, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо:

$$s_i(s_{-i}) = \left\{ s_i \in S_i | u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', s_{-i}) \right\}$$

Проиллюстрируем введенное понятие на примере. Рассмотрим биматричную игру, описываемую следующими матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем равновесия Нэша в этой игре, используя отображения наилучшего ответа. Строится такое изображение для каждого игрока следующим образом. Фиксируется стратегия его соперника, после чего ищется максимум выигрыша рассматриваемого игрока. Те стратегии, которые его максимизируют, и являются множеством наилучшего ответа на зафиксированную стратегию соперника. Проиллюстрируем это на примере первого игрока. Найдем его наилучший ответ на первую стратегию второго игрока – его соперника, имеем: $s_1(1) = 3$ – т.е., на стратегию 1 второго игрока первому игроку выгодней всего ответить стратегией 3. Аналогично находим наилучшие ответы первого игрока на другие стратегии второго: $s_1(2) = 3$, $s_1(3) = 1$ и $s_1(4) = 4$. Для второго игрока: $s_2(1) = 4$, $s_2(2) = \{1; 3\}$, $s_2(3) = 2$ и $s_2(4) = 3$. Обратите внимание, что на вторую стратегию первого игрока второй игрок может ответить любой из двух стратегий – первую или третью – получив одинаковый выигрыш в 2 единицы, максимальный среди возможных.

Равновесием Нэша в рассматриваемой игре будет та ситуация, от которой ни одному из игроков не выгодно в одностороннем порядке отклоняться. В терминах отображений наилучшего ответа это определение запишется так: равновесие – это тот профиль стратегий, в котором стратегия каждого игрока входит в множество его наилучшего ответа на равновесную стратегию соперника.

Рассмотрим наш пример. Здесь равновесием является ситуация $\{3;2\}$ – у первого игрока стратегия 3 является наилучшим ответом на стратегию 2 второго игрока, а у второго игрока стратегия 2 – наилучший ответ на третью стратегию его соперника.

Предложенному алгоритму можно дать более наглядное описание. Внимательно посмотрим на пару матриц выигрыша игроков. Согласно концепции нормальной формы биматричных игр, стратегии первого игрока соответствуют строкам матриц выигрыша, стратегии второго – столбцам. Таким образом, для поиска наилучшего ответа первого игрока на фиксированную стратегию второго нам необходимо зафиксировать номер столбца, соответствующий этой стратегии игрока 2, и найти наибольшее значение среди элементов этого столбца в первой матрице. Номера строк, в которых стоит это максимальное значение, и сформируют множество наилучшего ответа первого игрока на стратегию второго. Аналогично, для поиска наилучшего ответа второго игрока на фиксированную стратегию первого необходимо в соответствующей строке матрицы выигрыша второго игрока найти все максимальные значения (выбор строки соответствует фиксированной стратегии первого игрока).

Снова рассмотрим пару матриц из предыдущего примера. Отметим в матрице A наибольшие элементы в каждом из столбцов, а в матрице B – наибольшие элементы в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Как мы видим, в первой матрице номера строк, где находятся выделенные элементы, составляют множества наилучшего ответа первого игрока на стратегии, соответствующие номерам столбцов этих элементов: $s_1(1) = 3$, $s_1(2) = 3$, $s_1(3) = 1$ и $s_1(4) = 4$. Аналогично и для второго игрока – с учетом замены строк на столбцы и наоборот: номера столбцов, где находятся выделенные элементы – это множества наилучшего ответа второго игрока на стратегии, соответствующие номерам строк этих элементов ($s_2(1) = 4$, $s_2(2) = \{1; 3\}$, $s_2(3) = 2$ и $s_2(4) = 3$). А тот элемент, который оказался выделенным в обеих матрицах, соответствует равновесию Нэша – это элемент во второй строке и третьем столбце (ситуация $\{3; 2\}$).

Пример 3.1. «Обман на рынке» (Васин, 2005). Покупатель (игрок 2) приходит на рынок за яблоками. Продавец, торгующий яблоками (игрок 1), использует пружинные весы. У него есть две стратегии:

1) честно взвесить 1 кг яблок;

2) подкрутить пружинку и обвесить покупателя на 200 грамм.

Назовем эти стратегии "честность" и "обман" соответственно. Покупатель также имеет две стратегии:

1) поверив продавцу, заплатить деньги и уйти;

2) взвесить купленные яблоки на контрольных весах и в случае обнаружения обмана звать кого-то и доказывать, что его обвесили.

Назовем эти стратегии "поверить" и "проверить" соответственно. Определим выигрыши продавца и покупателя в каждой ситуации:

а) Продавец честно взвесил, а покупатель ему поверил. Соответствующие выигрыши обоих, равные 0, выберем в качестве начала отсчета

б) Продавец обманул, а покупатель ему поверил. Выигрыш продавца равен 1, так как он получил дополнительную прибыль. Выигрыш покупателя равен −1, поскольку он получил меньше яблок.

в) Продавец честно взвесил, а покупатель его проверил. Выигрыш продавца равен 0 (он выручил ровно столько, сколько и должен был). Выигрыш покупателя равен −1/2: он, во-первых, зря потратил время, а, во-вторых, глупо себя чувствует.

г) Продавец обманул, а покупатель его проверил. Выигрыш продавца равен −1, так как обнаружение обмана грозит ему определенными неприятностями (например, его могут прогнать с рынка). Выигрыш покупателя равен 1/2, так как, во-первых, ему возместили обвес, а, во-вторых, он испытывает моральное удовлетворение от разоблачения негодяя.

После того, как мы сведем все вышеописанное в единую таблицу, сразу же получаем биматричную игру с матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Отметим наилучшие ответы игроков в матрицах выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Легко заметить, что в этом случае у нас нет таких элементов, которые были бы выделены в обеих матрицах. Это означает, что в рассматриваемой игре равновесий Нэша нет. ■

Игры, где равновесий Нэша нет, встречаются весьма часто. Пример: «камень-ножницы-бумага», «покупатель и продавец». Что нам делать? Можем ли мы как-то прогнозировать действия игроков?

Для анализа таких игр необходимо расширить само определение игры, введя понятие смешанных стратегий. «Физический смысл» этого понятия следующий. Пусть у каждого игрока есть генератор случайных чисел, определяющий, ему, какую из стратегий ему следует играть. Так, при наличии двух стратегий человек может подбрасывать монетку: вероятность того, что он сыграет каждую стратегию, равна 50%. Если стратегий, например, ровно шесть, то игроку удобно прибегнуть к бросанию костей, и так далее. Другим игрокам известна вероятность выпадения той или иной стратегии, однако наблюдать конкретную реализацию на момент принятия решения они не могут.

В этом случае мы говорим, что игрок i пользуется *смешанной стратегией*. Стратегия игрока - определить, с какой вероятностью он должен играть каждую из своих «исходных» стратегий из множества S_i(«*чистые стратегии*»). Чистая стратегия - частный случай смешанной стратегии, в котором один из элементов S_i играется с вероятностью 100%. При построении смешанного расширения исходной игры предполагается, что игрок имеет возможность предоставить выбор чистой стратегии (или действия) воле случая, но при этом контролировать вероятность, с которой реализуется та или иная чистая стратегия.

Как формально описать множество смешанных стратегий игрока? По сути, смешанная стратегия есть распределение вероятностей на множестве чистых стратегий. В качестве примера вернемся к игре «Камень-ножницы-бумага»: у каждого игрока всего три чистых стратегии. Если p_1 - вероятность, с которой играется «камень», а p_2 и p_3 - вероятности для «ножниц» и «бумаги», соответственно, то $p_i \geq 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Множество всех наборов (p_1, p_2, p_3), удовлетворяющих указанному требованию, называется двумерным симплексом.

Определение 3.3. Пусть N - натуральное число. Тогда симплекс размерностью $N - 1$ есть множество $\Delta^{N-1} \subset R^{N-1}$, такое, что для всех $(p_1, \ldots, p_N) \in \Delta^{N-1}$ выполнено: $\sum_{i=1}^{N-1} p_i = 1,\ p_i \geq 0$.

Обратим внимание, что $(N - 1)$-мерный симплекс описывает все возможные распределения вероятностей на множестве из N элементов. Размерность $N - 1$ на единицу меньше N из-за ограничения $p_1 + \cdots + p_N = 1$. Таким образом, мы можем задать для каждого игрока множество всех его смешанных стратегий.

Определение 3.4. Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ - конечная игра. Назовем $\Sigma_i = \Delta^{|S_i|-1}$ множеством смешанных стратегий игрока i, $\Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i$ - множеством смешанных стратегий в игре. Пусть $\Sigma_{-i} = \prod_{j \neq i} \Sigma_j$. Элементы $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ называются смешанными стратегиями и профилями смешанных стратегий.

Теперь для того, чтобы полностью сформулировать определение смешанного расширения игры, нам осталось определить выигрыши игроков при использовании смешанных стратегий. Так как исходы розыгрыша стратегий носят случайный характер, интуиция подсказывает нам, что необходимо в качестве оценки эффективности смешанной стратегии каждого игрока брать математическое ожидание его выигрыша. Важное допущение здесь заключается в том, что везде, если иное не оговаривается особо, считаем действия любых различных игроков независимыми случайными событиями.

Пусть $s = (s_1, \dots, s_N)$ - профиль чистых стратегий, σ - профиль смешанных стратегий, в котором игрок i играет чистую стратегию s_i с вероятностью $p_{\sigma_i}(s_i)$. Тогда вероятность того, что при профиле смешанных стратегий σ будет сыгран профиль чистых стратегий s будет равна:

$$p_\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} p_{\sigma_i}(s_i)$$

Отсюда получаем выражение для математического ожидания выигрыша игрока в зависимости от профиля смешанных стратегий:

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \prod_{s \in S}^{N} p_\sigma(s) u_i(s)$$

Теперь мы готовы дать формальное определение смешанного расширения игры и смешанного равновесия (равновесия в смешанных стратегиях).

Определение 3.5. Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ - конечная игра в нормальной форме. Назовем игру $G = \langle I, \Sigma, u \rangle$ смешанным расширением игры Г. Равновесием в смешанных стратегиях в игре Г называется равновесие Нэша в ее смешанном расширении.

В этом определении u обозначает как функцию полезности в игре как с чистыми стратегиями, так и со смешанными стратегиями. В этом нет противоречия, так как мы уже выяснили, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной.

Сейчас читатель, вероятно, может задать вопрос – а зачем, собственно, мы проделали всю эту работу по введению и формализации понятия смешанного расширения конечной игры? На самом деле, смешанное расширение играет центральную роль в теории игр. Как мы помним из предыдущих рассуждений и примеров, равновесий Нэша в чистых стратегиях в конечных играх может не существовать – причем даже в таких простых, как модель «покупатель-продавец». А вот смешанное равновесие в конечных играх существует всегда – это нам гарантирует теорема, доказанная Джоном Нэшем в 1950 году и носящая его имя.

Теорема 3.1 (Нэш). Пусть Γ - конечная игра. Тогда в ней существует равновесие в смешанных стратегиях.

Эта теорема - один из наиболее важных результатов в современной науке об обществе. Она означает, что равновесие Нэша является универсальным инструментом, который можно использовать для анализа любого игрового взаимодействия с конечным числом игроков и стратегий.

Пример 3.2. Рассмотрим пример задачи на поиск смешанного равновесия («Теннисисты», Захаров, 2010). В финал крупного турнира вышли два теннисиста – Роджер Федерер и Рафаэль Надаль. В решающем гейме Федерер стоит на задней линии и собирается отбить мяч, посланный ему Надалем. Федереру необходимо принять решение, в какую сторону ему отбить мяч: направо вдоль края корта (DL) или налево наискосок (CC). В свою очередь, Надаль пытается угадать направление, в котором полетит мяч. Он также может побежать отбивать подачу прямо, вдоль края корта (DL) или наискосок налево (CC).

Квалификация обоих игроков примерно одинаковая, они оба являются лучшими в своем деле. Пока Федерер не ударит, Надаль не побежит отбивать, иначе Федерер ударит в другую сторону, и выиграет гейм. Но если Надаль будет ждать, пока Федерер нанесет удар, то он тоже проиграет, так как удары в профессиональном теннисе очень сильные и практически «не берущиеся». Таким образом, оба игрока одновременно решают, что им делать. При этом множества чистых стратегий у обоих игроков состоят из двух элементов - $S_1 = S_2 = \{CC, DL\} \sim \{1; 2\}$.

При игре профессионалов столь высокого и при этом почти равного уровня многое решается волею случая. В качестве оценки выигрыша каждого из игроков можно взять вероятность его выигрыша в случае использования ими фиксированных стратегий удара: выигрыш Федерера равен вероятности того, что он выиграет розыгрыш, выигрыш Надаля равен вероятности того, что этого не случится. Сумма выигрышей обоих игроков равна единице при любом профиле стратегий. Обратите внимание, что эта игра формально не является антагонистической, однако записывая матрицы выигрышей в такой игре, для каждого профиля стратегий достаточно указать только полезность первого игрока. Такие игры называются ***играми с постоянной суммой***, для случая двух игроков их свойства почти полностью аналогичны свойствам антагонистических игр. Эти классы игровых моделей эквивалентны с точностью до добавления константы, равной половине суммы игры.

Действительно, если из обеих матриц вычесть сумму игры, деленную на два, преобразованная игра будет антагонистической (проверьте это самостоятельно!).

Вернемся к теннисистам. Условно запишем их матрицы выигрышей в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Если Надаль правильно угадывает направление удара, то он имеет хорошие шансы отбить мяч, и очень хорошие, если Федерер бьет наискосок. Но если Надаль не угадывает, то вероятность того, что он сумеет «догнать» мяч и спасти игру, невелика.

Наша задача – найти все смешанные равновесия в этой игре. Как нам уже известно, равновесия в чистых стратегиях являются частным случаем равновесий в смешанных стратегиях, поэтому начнем решение задачи с их поиска. Отметим в первой матрице наибольшие элементы в каждом столбце, а во второй – наибольшие в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & \boxed{0{,}8} \\ \boxed{0{,}9} & 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{0{,}5} & 0{,}2 \\ 0{,}1 & \boxed{0{,}8} \end{pmatrix}$$

Как видим, совпадающих элементов нет – значит, в чистых стратегиях равновесий нет. Найдем равновесия в смешанных стратегиях, используя метод функций наилучших ответов. Для этого найдем функции ожидаемого выигрыша для каждого из игроков:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$u_A(p,q) = 0{,}5pq + 0{,}9(1-p)q + 0{,}8p(1-q) + 0{,}2(1-p)(1-q)$$

$$u_B(p,q) = 0{,}5pq + 0{,}1(1-p)q + 0{,}2p(1-q) + 0{,}8(1-p)(1-q)$$

Чтобы построить функции наилучшего ответа, найдем производную каждой из этих функций по «своей» переменной:

$$\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) = 0{,}5q - 0{,}9q + 0{,}8(1-q) - 0{,}2(1-q) = 0{,}6 - q$$

$$\frac{\partial}{\partial q}u_B(p,q) = 0{,}5p + 0{,}1(1-p) - 0{,}2p - 0{,}8(1-p) = -0{,}7 + p$$

Так как функция $u_A(p,q)$ является линейной по каждой из переменных, то наилучший ответ первого игрока (Надаля) на смешанную стратегию q второго игрока (Федерера) – это либо 0 (если $\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) < 0$), либо 1 (если $\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) > 0$), либо весь отрезок $[0,1]$ – так как если $\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) = 0$, то функция ожидаемого выигрыша первого игрока является константой и любая смешанная стратегия дает ему один и тот же выигрыш (он же и максимальный). Таким образом,

$$p^*(q) = \begin{cases} 0; \text{если } q > 0{,}6 \\ [0{,}1]; \text{если } q = 0.6 \\ 1; \text{если } q < 0{,}6 \end{cases}$$

Аналогично получаем функцию наилучших ответов для второго игрока:

$$q^*(p) = \begin{cases} 0; \text{если } p < 0{,}7 \\ [0{,}1]; \text{если } p = 0{,}7 \\ 1; \text{если } p > 0{,}7 \end{cases}$$

Изобразим эти функции на одной координатной плоскости:

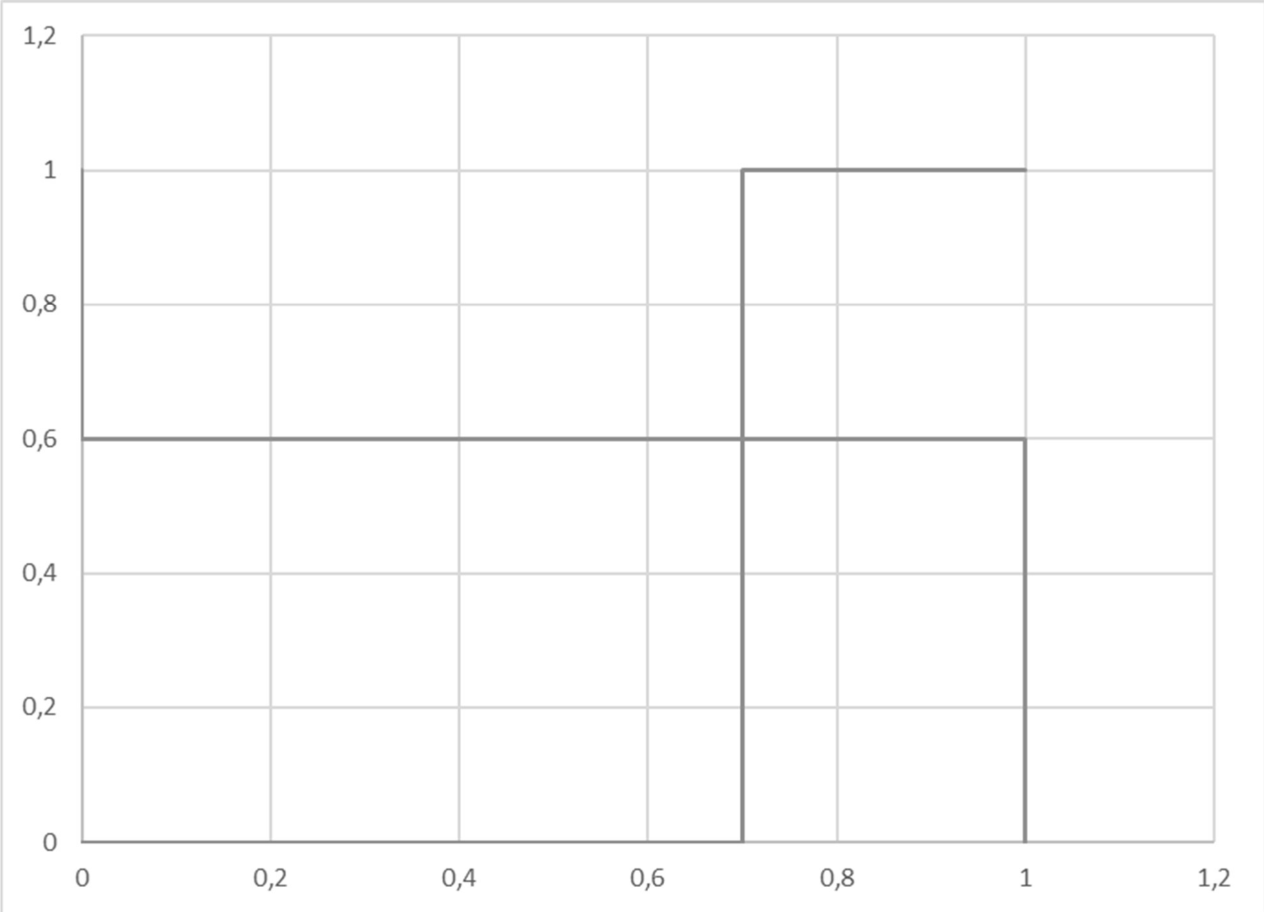


Рисунок 3.1. Графики наилучших ответов игроков в задаче «Теннисисты».

Графики функций наилучшего ответа имеют лишь одну общую точку - $(p, q) = (0{,}6; 0{,}7)$. Эта точка и дает нам равновесие в смешанных стратегиях в исследуемой игре. В итоге смешанное равновесие в рассматриваемой игре - $(p^0, q^0) = \big((0{,}6; 0{,}4); (0{,}7; 0{,}3)\big)$.

■

3.2. Свойства смешанных равновесий, связь с доминированием

Исследуем свойство смешанных расширений биматричных игр, задаваемых матрицами $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Смешанные стратегии игроков здесь такие же, как и раньше: $p \in P$; $q \in Q$, где P и

Q – симплексы размерностей $m-1$ и $n-1$ соответственно. Ожидаемые выигрыши игроков имеют вид:

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

$$B(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$$

По теореме Нэша в игре существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях (p^0, q^0). Для этого равновесия по определению выполнены неравенства:

$$A(p,q^0) \le A(p^0,q^0) \forall p \in P$$

$$B(p^0,q) \le B(p^0,q^0) \forall q \in Q$$

Лемма 3.1. Для того чтобы ситуация $(\boldsymbol{p^0}, \boldsymbol{q^0})$ была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры $\boldsymbol{\Gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие:

$$\begin{cases} A(i,q^0) \le A(p^0,q^0),\ i = 1,\dots,m \\ B(p^0,j) \le B(p^0,q^0),\ j = 1,\dots,n \end{cases}$$

Доказательство Леммы.

$\rightarrow$ Пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия. Тогда $A(p,q^0) \le A(p^0,q^0)$. Полагая $p = (0,\ \dots 0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0)$, получим неравенства условия Леммы для матрицы А. Аналогично выводятся неравенства для матрицы В.

$\leftarrow$ Пусть ситуация (p^0, q^0) удовлетворяет условию Леммы. Возьмем произвольную смешанную стратегию р первого игрока, домножим неравенства $A(i,q^0) \le A(p^0,q^0)$ на p_i и сложим их. В результате получим неравенство $A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0)$. Для второй матрицы – аналогично. ■

Из доказанной леммы следует одно из важнейших свойств смешанных равновесий – *Условие дополняющей нежесткости*[9].

Теорема 3.2. Пусть (p^0, q^0) − ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда:

1. Если $p_i^0 > 0$, то $A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$
2. Если $q_j^0 > 0$, то $B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$.

Следствие. Пусть (p^0, q^0) − ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда:

1. Если $A(i, q^0) < A(p^0, q^0)$, то $p_i^0 = 0$
2. Если $B(p^0, j) < B(p^0, q^0)$, то $q_j^0 = 0$

Поясним выражение "дополняющая нежесткость", заимствованное из теории линейного программирования. Поставим в соответствие неравенству $A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0)$ из условия Леммы неравенство $p_i^0 > 0$ с тем же номером. Тогда если одно из этих неравенств выполнено строго ("нежестко"), то по Теореме соответствующее неравенство выполнено как равенство ("жестко").

Все это можно записать в следующей краткой форме: для решения (p^0, q^0) в смешанных стратегиях игры с матрицами A и B справедливы равенства:

$$p_i^0\big(A(i, q^0) - A(p^0, q^0)\big) = q_j^0\big(B(p^0, j) - B(p^0, q^0)\big) = 0$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

[9] «Complementary slackness condition»

Для матричных игр (т.е. конечных антагонистических) взаимосвязь задачи поиска смешанного равновесия с линейным программированием еще более тесная: поиск смешанных стратегий игроков можно свести к решению пары двойственных задач ЛП! Опишем кратко алгоритм подобного сведения. Для этого нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.3. Для игры с матрицей A справедливы следующие равенства: $\min_{q\in Q} A(p,q) = \min_{1\le j\le n} A(p,j)\ \forall p \in P$; $\max_{p\in P} A(p,q) = \max_{1\le i\le m} A(i,q)\ \forall q \in Q$. При этом значение v этой игры может быть представлено в следующем виде: $v = \max_{p\in P}\min_{1\le j\le n} A(p,j) = \min_{q\in Q}\max_{1\le i\le m} A(i,q)$.

Доказательство этой теоремы опирается на **Теорема 3.2** и ее следствие и предоставляется читателю. Не ограничивая общности, предположим, что значение v игры строго положительно. Введем вспомогательную переменную u, после чего запишем следующую задачу линейного программирования, эквивалентную задаче поиска значения игры:

$$u \to \max_{(u,p)}, s.t. \qquad 3.1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \ge u, j = 1, \dots, n \qquad 3.2$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \ge 0, i = 1, \dots, m \qquad 3.3$$

Действительно, при фиксированной смешанной стратегии $p \in P$ максимальное значение u при указанных ограничениях равно

$\min\limits_{1 \le j \le n} A(p, j)$. В силу сделанного предположения о положительности v также положительные значения принимает и переменная u. Произведем замену, введя вектор переменных $z = (z_1, \dots, z_m)$ таких, что $z_i = p_i / u$. Тогда ограничения 3.2 и 3.3 можно переписать относительно новых переменных в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 1/u, z_i \ge 0, i = 1, \dots, m \qquad 3.4$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge 1, j = 1, \dots, n \qquad 3.5$$

Значение v рассматриваемой матричной игры можно записать в виде $v = \left(\sum_{i=1}^{m} z_i^0\right)^{-1}$, где $z^0 = (z_1^0, \dots, z_m^0)$ – решение задачи линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge 1, j = 1, \dots, n, \qquad 3.6$$

$$z_i \ge 0, i = 1, \dots, m$$

Зная z^0, мы можем найти не только значение игры, но и оптимальную смешанную стратегию первого игрока: $p^0 = v \cdot z^0$.

С другой стороны, используя вторую часть тождества из **Теорема 3.3** ($v = \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q)$), можно получить, что $v = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j^0\right)^{-1}$, где $w^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0)$ – решение задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \to \max, \qquad 3.7$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leq 1, i = 1, \dots, m,$$

$$w_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Оптимальная смешанная стратегия второго игрока определяется из решения задачи 3.7 аналогичным образом: $q^0 = v \cdot w^0$.

Построенные нами задачи линейного программирования 3.6 и 3.7 взаимно двойственны. Из раздела теории оптимизации, посвященных задачам линейного программирования, мы можем получить новое обоснование для доказанных нами свойств смешанных равновесий. Например, свойство дополняющей нежесткости для решений z^0 и w^0 пары двойственных задач имеет вид:

1. $z_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = 1$;
2. $w_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i = 1$.

После обратной замены переменных $p^0 = v \cdot z^0$ и $q^0 = v \cdot w^0$ эти условия превращаются в матричный («антагонистический») аналог **Теорема 3.2**.

Полученные задачи линейного программирования можно решать богатым арсеналом методов, например, симплекс-методом или полным перебором вершин. Тем не менее, для решения биматричных задач более общего вида, где интересы игроков не противоположны, необходимы иные методы решения. Для таких игр фундаментальную роль играет следующее утверждение.

Теорема 3.4. Для того чтобы ситуация (p^0, q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры

Γ необходимо и достаточно, чтобы нашлись множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и числа v_1, v_2, для которых выполнены условия:

$$\begin{cases} \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1 \ \forall i \in X^0 \\ \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 \le v_1 \ \forall i \notin X^0 \\ \sum_{j \in Y^0} q_j^0 = 1, q_j^0 \ge 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2 \ \forall j \in Y^0 \\ \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} \le v_2 \ \forall j \notin Y^0 \\ \sum_{i \in X^0} p_i^0 = 1\,, p_i^0 \ge 0 \end{cases}$$

В чем смысл **Теорема 3.4**? Она позволяет (в перспективе) свести поиск равновесий в смешанных стратегиях к решению систем линейных уравнений и неравенств. Проблема в том, что множества X^0, Y^0 заранее не известны. В общем случае необходим перебор всевозможных подмножеств множеств X, Y. Однако в случае небольшой размерности игры (т.е. малого количества стратегий у игроков) это может быть действенным методом решения игры.

Теорема 3.5. В любой биматричной игре для некоторой ситуации равновесия (p^0, q^0) в смешанных стратегиях найдутся такие множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и числа v_1, v_2, для которых выполнены условия Теорема 3.4 и $|X^0| = |Y^0|$.

Эта теорема позволяет свести поиск равновесий к перебору квадратных подматриц $\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0; j \in Y^0}$ и $\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0; j \in Y^0}$ и решению соответствующих систем из условий **Теорема 3.4**. К сожалению, если стратегий у каждого из игроков три и более, то процесс перебора подматриц, основанный на теоремах 3.2 - 3.4, становится очень утомительным. Тем не менее, в ряде случаев оказывается возможным уменьшить мощность множеств стратегий игроков, тем самым значительно упростив задачу поиска смешанных равновесий. Это становится возможным, если у кого-либо из игроков есть доминирующие стратегии.

Исследуем особенности доминирования в смешанных расширениях биматричных игр. Мы уже убедились в том, что все свойства чистых стратегий могут быть обобщены на случай смешанных стратегий. Мы точно так же можем обобщить и понятие доминирования для смешанного расширения биматричной игры. Однако для этого нам потребуется сначала уточнить само понятие доминирования, так как теперь мы имеем дело с «расширенным» множеством стратегий. Приведем ряд таких «уточняющих» определений.

Определение 3.6. Стратегия первого игрока i строго доминирует стратегию g $(i \succ g)$ на множестве $Q^2 \subseteq S^2$, если $a_{ij} > a_{gj}$ для $\forall j \in Q^2$

Определение 3.7. Стратегия первого игрока i слабо доминирует стратегию g $(i \succcurlyeq g)$ на множестве $Q^2 \subseteq S^2$, если $a_{ij} \geq a_{gj}$ для $\forall j \in Q^2$

Определение 3.8. Стратегия второго игрока j строго доминирует стратегию g $(j \succ g)$ на множестве $Q^1 \subseteq S^1$, если $b_{ij} > b_{ig}$ для $\forall i \in Q^1$

Определение 3.9. Стратегия второго игрока j слабо доминирует стратегию g $(j \succcurlyeq g)$ на множестве $Q^1 \subseteq S^1$, если $b_{ij} \geq b_{ig}$ для $\forall i \in Q^1$

Определим ***процедуру последовательного исключения строго доминируемых стратегий.*** Эта процедура состоит в построении последовательности вложенных множеств $Q_l^a, l = 1, \dots, k$, где $S^a = Q_1^a \supseteq Q_2^a \supseteq \dots \supseteq Q_k^a = \bar{S}^a$, причем для любого $l = 1, \dots, k$: $\forall g \in Q_l^1 \backslash Q_{l+1}^1 \exists i \in Q_{l+1}^1 : i \succ g$ на множестве Q_l^2, и $\forall g \in Q_l^2 \backslash Q_{l+1}^2 \exists j \in Q_{l+1}^2 : j \succ g$ на множестве Q_l^2.

<u>Шаг 1.</u> Ищем пары стратегий $i,\ g$, такие что $a_{ij} > a_{gj}$ для $\forall j \in Q^2$. Вычеркиваем все такие g в обеих матрицах. Аналогично ищем столбцы в матрице второго игрока, где $b_{ij} > b_{ig}$ для $\forall i \in Q^1$. Вычеркиваем все такие столбцы из обеих матриц.

<u>Шаг 2.</u> Мы получили редуцированные матрицы. Новое множество строк – Q_1^2, новое множество столбцов – Q_2^2. Может получиться так, что в редуцированных матрицах окажутся новые доминируемые строки и столбцы. Вычеркиваем их и переходим к следующему шагу.

Пусть $\bar{S}^a$ - пределы последовательностей $Q_1^a \supseteq Q_2^a \supseteq \cdots$, $a = 1{,}2$. Тогда игра разрешима по доминированию, если каждое множество $\bar{S}^a$ состоит из одного элемента $\bar{s}^a$, а профиль стратегий $(\bar{s}^1,\ \bar{s}^2)$ называется решением игры по доминированию (равновесие в доминирующих стратегиях).

Определение 3.10. Множество $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ строго доминирует множество S $(\bar{S} \succ S)$, если оно получено из множества S последовательным исключением строго доминируемых стратегий.

Определение 3.11. Множество $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ слабо доминирует множество S $(\bar{S} \succ S)$, если оно получено из множества S последовательным исключением строго доминируемых стратегий.

Если на каждом следующем этапе мы удаляем сильно доминируемые стратегии, то порядок их удаления не влияет на итоговый результат. Например, если на первом шаге мы удалим доминируемые стратегии игрока 1, а на втором шаге - доминируемые стратегии игрока 2, то от перемены порядка, в котором удаляются доминируемые стратегии игроков, результат не изменится. Мы также получим тот же результат, если на одном шаге удалим доминируемые стратегии сразу нескольких (или даже всех) игроков. Однако, если мы удаляем не только сильно доминируемые, но и слабо доминируемые стратегии, то порядок удаления может быть важен.

Теперь определим понятие доминирования в смешанных стратегиях. Обозначим $f_p^1(j) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ – ожидаемый выигрыш игрока 1, если он использует смешанную стратегию p, а второй игрок – чистую стратегию j.

Определение 3.12. Смешанная стратегия p строго доминирует чистую стратегию i на множестве $\bar{S}^2 \subset S^2$, если $f_p^1(j) > a_{ij}\ \forall j \in \bar{S}^2$.

Определение 3.13. Смешанная стратегия p слабо доминирует чистую стратегию i на множестве $\bar{S}^2 \subset S^2$, если $f_p^1(j) \geq a_{ij}\ \forall j \in \bar{S}^2$

Пример 3.3. Рассмотрим пример. Пусть выигрыши игроков задаются следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём в каждом столбце первой матрицы максимальный элемент. Если максимум единственный и стоит в некоторой строке, то она не может быть доминируемой. Следовательно, доминируемой может быть только первая строка. Возьмём вторую и третью строки с коэффициентами ½ - такая комбинация доминирует первую строку! Это означает, что смешанная стратегия вида $p = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ строго доминирует чистую стратегию 1. Это означает, что, скорее всего, в смешанном равновесии первому игроку будет невыгодно играть с любой ненулевой вероятностью его первую стратегию. Такие рассуждения приводят нас к необходимости построения для смешанных стратегий процедуры, аналогичной процедуре последовательного исключения доминируемых стратегий.

Определение 3.14. Множество ситуаций $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ строго доминирует другое множество ситуаций $S = S^1 \times S^2$ в смешанных стратегиях, если возможно с помощью процедуры последовательного исключения строго доминируемых стратегий построить систему последовательных вложений $\bar{S} = S_k \subset S_{k-1} \subset \cdots \subset S_1 = S$, где: $S_l = S_l^1 \times S_l^2$, и $\forall i \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1 \; \exists p \colon p \succ i$ на S_l^2, $\forall j \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1 \; \exists q \colon q \succ j$ на S_l^2.

Определение 3.15. Множество ситуаций $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ слабо доминирует другое множество ситуаций $S = S^1 \times S^2$ в смешанных стратегиях, если возможно с помощью процедуры последовательного исключения слабо доминируемых стратегий построить систему последовательных вложений $\bar{S} = S_k \subset S_{k-1} \subset \cdots \subset S_1 = S$, где: $S_l = S_l^1 \times S_l^2$ и $\forall i \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1 \; \exists p \colon p \succcurlyeq i$ на S_l^2, $\forall j \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1 \; \exists q \colon q \succcurlyeq j$ на S_l^2, кроме того, $p_s = 0 \; \forall s \notin S_{l+1}^1$, $q_k = 0 \; \forall k \notin S_{l+1}^2$.

Вернемся к рассмотренному примеру, в нем $\{2{,}3\} \times \{2{,}3\} \succ S$. Следующая теорема позволяет нам связывать свойства смешанных равновесий в исходной игре и в редуцированной, полученной в результате последовательного исключения доминируемых стратегий.

Теорема 3.6. 1) Пусть множество $\tilde{S} = \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \succ S$ (строго доминирует) в смешанных стратегиях. Тогда для любого равновесия Нэша (p, q) выполнено:$\forall i \notin \tilde{S}^1 \; p_i = 0, \forall j \notin \tilde{S}^2 \; q_j = 0$.

2) Пусть $\tilde{S} = \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \succcurlyeq S$ (слабо доминирует) в смешанных стратегиях и $(\bar{p}, \bar{q})$ – равновесие Нэша в игре $\bar{\Gamma}$ с

матрицами $\{(a_{ij}),(b_{ij}); i \in \tilde{S}^1, j \in \tilde{S}^2\}$. Пусть в исходной игре смешанные стратегии игроков p и q определены следующим образом:

$$p_i = \begin{cases} \bar{p}_i, & i \in \tilde{S}^1 \\ 0, & i \notin \tilde{S}^1 \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \bar{q}_j, & j \in \tilde{S}^2 \\ 0, & j \notin \tilde{S}^2 \end{cases}$$

Тогда (p,q) – равновесие Нэша в исходной игре Г.

Эта теорема позволяет нам использовать процесс последовательного исключения доминируемых стратегий и для смешанного доминирования. Действительно, из нее следует, что любая строго доминируемая стратегия используется в смешанном равновесии с нулевой вероятностью. Это значит, что мы можем «выбросить» соответствующую строку (если речь идет о первом игроке) или столбец (если о втором) из обеих матриц выигрыша – и подобный «вандализм» никак не скажется на равновесии, так что мы можем перейти от поиска равновесий в исходной игре к «редуцированной», размерность которой будет меньше. Более того, после такого исключения стратегий уже в редуцированной игре могут оказаться доминируемые стратегии (которые в исходной, вообще говоря, могли таковыми и не быть!). Их также можно будет исключить, что дополнительно может снизить размерность задачи.

Пример 3.4. Проиллюстрируем описанный процесс на примере задачи о студенте и преподавателе. Перед началом занятия преподаватель может проверять (или не проверять) выполнение домашнего задания. У него есть три стратегии: S_1 – проверить выполнение внимательно; S_2 – проверить лишь наличие выполненной домашней работы; S_3 – не проверять ничего. Студент также имеет три стратегии:

- домашнее задание не выполнять;
- домашнее задание списать у соседа перед парой;
- разобраться с задачей и выполнить задание самому.

Выигрыш студента определяется как разность поощрения преподавателя и своих временных затрат. Если студент не делает домашнее задание, то его временные затраты нулевые; если списывает – то затраты 1 единица, если делает сам – затраты 4 единицы. В случае внимательной проверки за невыполненное задание студент получает штраф в 5 единиц; за списанное – штраф в 10 единиц; а за выполненное самостоятельно – бонус в 10 ед. При невнимательной проверке штраф в 5 единиц, и бонусы по 2 единицы в каждом из оставшихся случаев. Выпишем матрицу выигрыша студента:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Выигрыш преподавателя задается следующей матрицей:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Попробуем найти равновесия в чистых стратегиях. Для этого в матрице студента находим максимальные элементы в каждом столбце, а в матрице преподавателя – в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Как видим, совпадающих элементов нет – значит, в чистых стратегиях равновесий нет. Попробуем исключить какие-либо стратегии по строгому доминированию. В матрице студента этого сделать нельзя – в каждой строке стоит элемент, являющийся максимальным в своем столбце. Однако в матрице преподавателя второй столбец строго доминируется первым, значит, мы можем в обеих матрицах удалить второй столбец.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -11 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь в уже сокращенной матрице $\hat{A}$ вторая строка строго доминируемая – первая строка поэлементно больше ее. Следовательно, теперь мы вычеркиваем в обеих матрицах вторую строку.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На этом процесс последовательного исключения доминируемых стратегиях завершен. Теперь найдем равновесия в смешанных стратегиях, используя метод функций наилучших ответов. Для этого найдем функции ожидаемого выигрыша для каждого из игроков

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$u_A(p,q) = -5pq + 6(1-p)q - 4(1-p)(1-q)$$

$$u_B(p,q) = 8pq + (1-p)(1-q)$$

Чтобы построить функции наилучшего ответа, найдем производную каждой из этих функций по «своей» переменной:

$$\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) = -5q - 6q + 4(1-q) = -15q + 4$$

$$\frac{\partial}{\partial q}u_B(p,q) = 8p - (1-p) = 9p - 1$$

Так как функция $u_A(p,q)$ является линейной по каждой из переменных, то наилучший ответ первого игрока (студента) на смешанную стратегию q второго игрока (преподавателя) – это либо 0 (если $\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) < 0$), либо 1 (если $\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) > 0$), либо весь отрезок $[0,1]$ – так как если $\frac{\partial}{\partial p}u_A(p,q) = 0$, то функция ожидаемого выигрыша первого игрока является константой и любая смешанная стратегия дает ему один и тот же выигрыш (он же и максимальный). Таким образом,

$$\tilde{p}(q) = \begin{cases} 0;\text{если } q > {}^4\!/_{15} \\ [0,1];\text{если } q = {}^4\!/_{15} \\ 1;\text{если } q < {}^4\!/_{15} \end{cases}$$

Аналогично получаем функцию наилучших ответов для второго игрока:

$$\tilde{q}(p) = \begin{cases} 0;\text{если } p < {}^1\!/_9 \\ [0,1];\text{если } p = {}^1\!/_9 \\ 1;\text{если } p > {}^1\!/_9 \end{cases}$$

Изобразим эти функции на одной координатной плоскости:

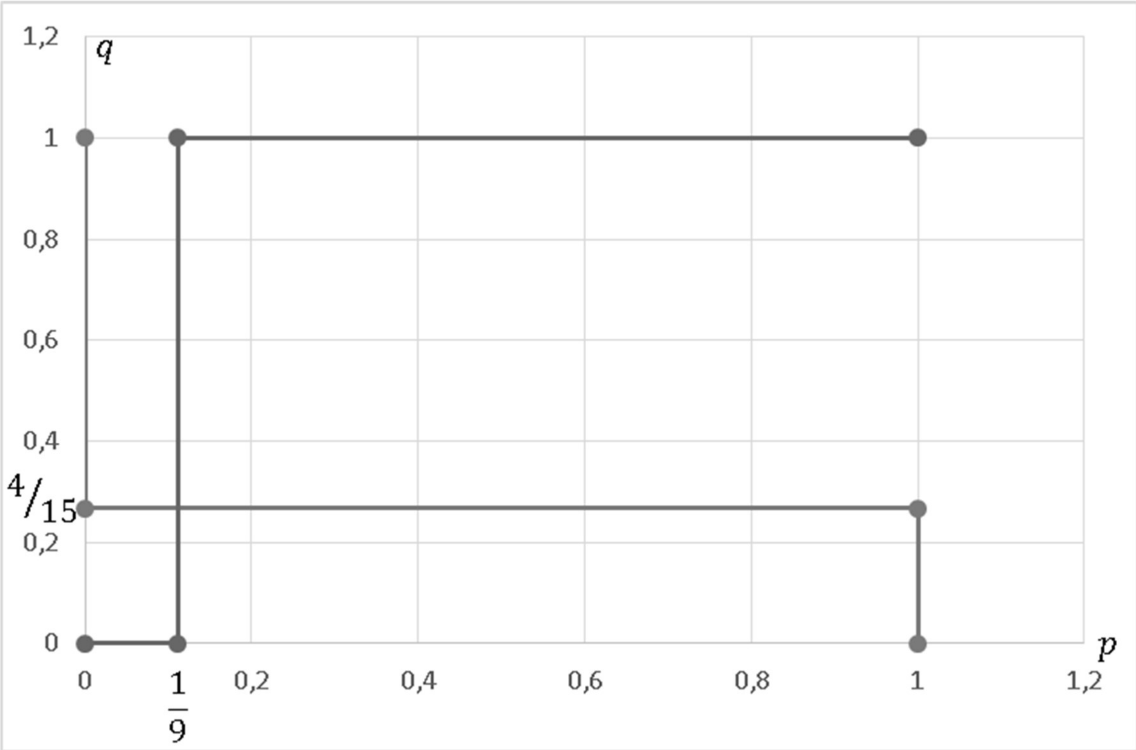


Рисунок 3.2. Функции наилучшего ответа студента и преподавателя

Графики функций наилучшего ответа имеют лишь одну общую точку - $(p, q) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{15}\right)$. Эта точка и дает нам равновесие в смешанных стратегиях в исходной игре. Осталось лишь вспомнить, что у каждого из игроков вторая стратегия является доминируемой и в равновесии используется с нулевой вероятностью. Таким образом, ответ в задаче следующий: в исследуемой игре есть единственное равновесие в смешанных стратегиях: $p_0 = \left(\frac{1}{9}, 0, \frac{8}{9}\right)$, $q_0 = \left(\frac{4}{15}, 0, \frac{11}{15}\right)$. ■

3.3. Численные методы поиска смешанного равновесия: графический метод для случая двух стратегий и итерационный процесс удаления доминируемых стратегий.

Рассмотрим метод решения простейших игр, в которых каждый игрок имеет только две стратегии. Это так называемые 2х2-игры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Для первого игрока система из Теорема 3.4 примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v^1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v^1 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 1 - q_1 \\ a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = a_{21}q_1 + a_{22}(1 - q_1) \\ 0 \leq q_1 \leq 1 \end{cases}$$

Получив из третьего уравнения выражение для q_2 в зависимости от q_1 и исключив из системы v_1, можно перейти к единственному уравнению от одной переменной q_1. Ему можно без труда придать графическую интерпретацию.

Рисунок 3.3. Графическая интерпретация метода поиска смешанных равновесий для 2х2-биматричных игр

Решение этого уравнения (и, соответственно, всей исходной системы) существует, когда $sign(a_{22} - a_{12}) = sign(a_{11} - a_{21})$. При выполнении этого условия решение можно выписать в виде:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}, \qquad 3.8$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}}$$

Для второго игрока проводятся аналогичные расчеты, откуда получаются его стратегии в равновесии:

$$p_1 = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}}$$

$$p_2 = \frac{b_{11} - b_{12}}{b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}} \qquad 3.9$$

Проиллюстрируем работу алгоритма для игр с матрицами размеров 2xn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ a_{21} & \dots & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{12} \\ b_{21} & \dots & b_{22} \end{pmatrix}$$

В данном случае смешанная стратегия первого игрока имеет вид $p = (p_1,\ 1 - p_1)$, где $p_1 \in [0,1]$. Перебирать нужно 2x2-подматрицы. Каждая из них задается номерами двух столбцов j_1, j_2. Для выбранных j_1, j_2 запишем систему из **Теорема 3.4**.

$$p_1^0 b_{1j_1} + (1 - p_1^0) b_{2j_1} = v_2$$

$$p_1^0 b_{1j_2} + (1 - p_1^0) b_{2j_2} = v_2 \qquad 3.10$$

$$p_1^0 b_{1j} + (1 - p_1^0) b_{2j} \le v_2 \forall j \ne j_1, j_2; p_1^0 \in [0,1]$$

Если эта система несовместна, то перейдем к другой паре j_1, j_2. Если решение системы существует, то рассмотрим систему

$$q^* a_{1j_1} + (1 - q^*) a_{2j_2} = v_1$$

$$q^* a_{2j_1} + (1 - q^*) a_{2j_2} = v_1; q^* \in [0,1] \qquad 3.11$$

Пусть у системы 3.11 также существует решение (в ином случае переходим к другой паре). Определим стратегию:

$$q^0 : q_j^0 = \begin{cases} q^*, \; j = j_1 \\ 1 - q^*, \; j = j_2 \\ 0, j \neq j_1, j_2 \end{cases}$$

Тогда ситуация (p^0, q^0) будет смешанным равновесием Нэша в исходной игре.

Предлагаемому алгоритму можно дать геометрическую интерпретацию. На отрезке $p_1 \in [0,1]$ строим прямые $l_j(p_1) = p_1^0 b_{1j} + (1 - p_1^0) b_{2j}$, $j = 1, \ldots, n$. Точки излома верхней огибающей семейства прямых l_j соответствуют парам j_1, j_2, для которых существует решение системы 3.10. Последовательно перебираем точки верхней огибающей и решаем систему уравнений из 3.11 с проверкой неравенств на q.

Пример 3.5. Рассмотрим модель игры в теннис (**Пример 3.2**), и найдем решение с помощью графического метода. Пусть в арсенале у Федерера есть еще один удар: Lob («свеча»). Матрица его выигрыша теперь имеет следующий вид:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} CC & DL \end{array} \\ \begin{array}{c} CC \\ DL \\ Lob \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

На рисунке показано, как выигрыш Федерера зависит от смешанной стратегии Надаля q для каждой из трех чистых стратегий Федерера, где q, как и раньше, есть вероятность того, что Надаль сыграет DL. Жирная ломаная линия – верхняя огибающая - показывает максимальную полезность, которую может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля.

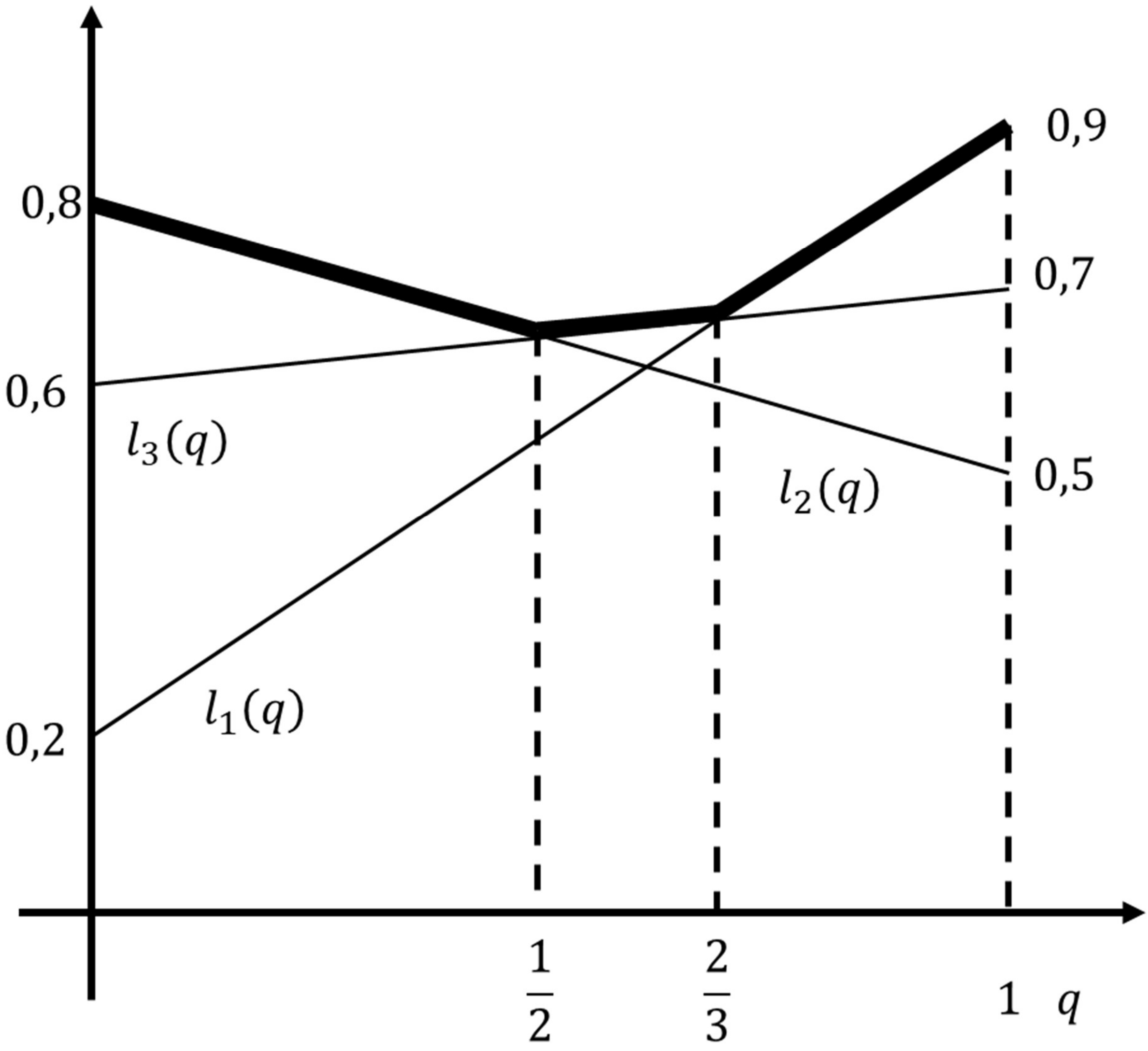


Рисунок 3.4. Максимальная полезность, которую может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля

На рисунке показано, как выигрыш Надаля зависит от смешанной стратегии Федерера p для каждой из трех чистых стратегий Надаля. Жирная ломаная линия – нижняя огибающая - показывает минимальные потери, которые может понести Надаль в зависимости от стратегии Федерера. По этому графику можно построить функцию наилучшего ответа Федерера: если $q < 0{,}5$, то Федерер играет DL, если $q = 0{,}5$ – то смешанную стратегию, в которой используются с любыми ненулевыми вероятностями DL и

Lob, если $q \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, то Lob, если $q = \frac{2}{3}$ – то смешанную стратегию, в которой используются с любыми ненулевыми вероятностями Lob и CC, если $q > \frac{2}{3}$ – то CC.

Так как эта игра является антагонистической, то в равновесии стратегия Надаля должна минимизировать максимальную полезность Федерера. Действительно, предположим, что в равновесии $q \neq 0{,}5$. Тогда (предполагая равновесие) выигрыш Федерера будет максимальным для данного q. Но это означает, что Надаль может увеличить свой выигрыш, выбрав стратегию $q^* = 0{,}5$. Таким образом, $q^* = 0{,}5$. Нам остается найти вероятности, с которыми Федерер играет DL и Lob. Рисунок 3.5 показывает выигрыш Федерера и Надаля в зависимости от вероятности p, с которой Федерер играет Lob, при разных чистых стратегиях Надаля. Жирная линия показывает минимальный выигрыш Федерера (и, соответственно, максимальный выигрыш Надаля) в зависимости от p. Из графика видно, что $p = \frac{3}{4}$. ■

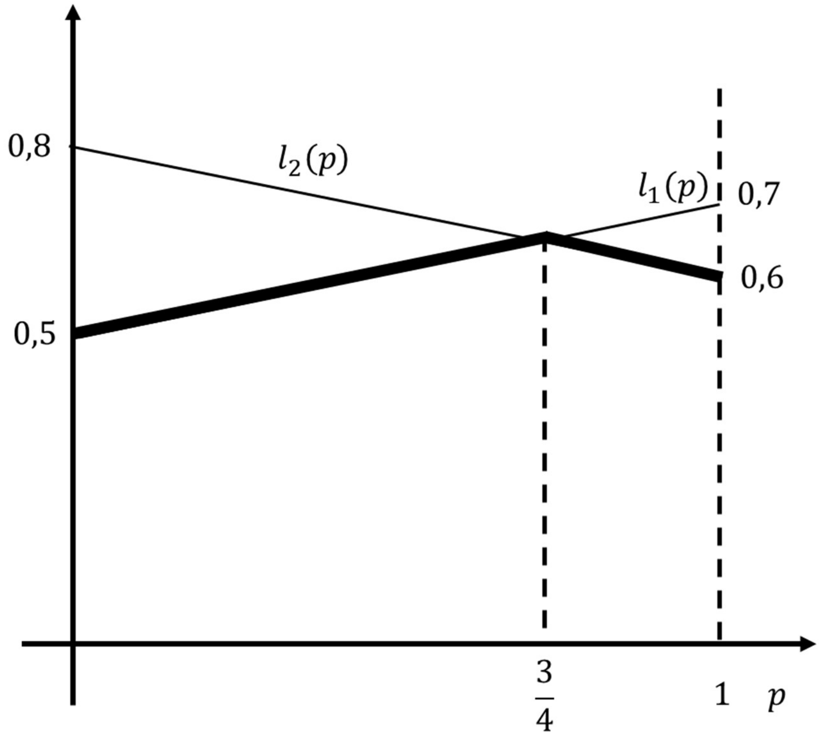


Рисунок 3.5. Минимальные потери, которые может понести Надаль в зависимости от стратегии Федерера

К сожалению, рассматриваемый алгоритм не всегда приводит к нахождению всех ситуаций равновесия.

Пример 3.6. Рассмотрим биматричную игру с матрицами выигрыша игроков

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Из графика ожидаемого выигрыша второго игрока видно, что пересечение прямых l_1 и l_2 дает стратегию $p_0 = (1,0)$ с нулевой компонентой (вырожденный случай). Решая систему уравнений из **Теорема 3.4**, находим $q_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Однако найденная ситуация равновесия не единственна! Действительно, запишем условие **Теорема 3.4** для стратегии $(q^*, 1 - q^*)$ второго игрока с учетом свойства дополняющей нежесткости

$$\begin{cases} 1 - q^* = v_1 \\ q^* \leq v_1 \\ 0 \leq q^* \leq 1 \end{cases}$$

В решение этой системы входит любое $q^* \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Таким образом, в данном примере имеется целый отрезок ситуаций равновесия: $\left\{\left((1,0), (q^*, 1 - q^*)\right) \mid 0 \leq q \leq \frac{1}{2}\right\}$. ■

Для игры с матрицами размера 3×3 в случае отсутствия доминирования любых возможных типов поиск смешанных равновесий по Нэшу требует достаточно большого перебора всевозможных подматриц исходных матриц A и B. Тем не менее, если задача формулируется не в виде «Найти **все** равновесия в смешанных стратегиях», а «Найти хотя бы одно равновесие», то можно сосредоточиться на поиске **вполне смешанных** равновесий.

Определение 3.16. Вполне смешанным равновесием Нэша называется такое равновесие в смешанных стратегиях биматричной игры, что оба игрока используют все свои чистые стратегии со строго положительными вероятностями.

В общих предположениях вполне смешанное равновесие может существовать, только если $m = n$. Это интуитивно понятно: для нахождения смешанной стратегии второго игрока, в которой все компоненты отличны от нуля, требуется решить систему уравнений из **Теорема 3.4**, содержащую $m + 1$ уравнение с $n + 1$ неизвестным (число элементов множества Y и v_1). Следовательно, для существования решения должно выполняться условие $m = n$. Аналогично, смешанная стратегия первого игрока удовлетворяет системе $n + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестным, и для существования решения также необходимо, чтобы m было равно n. Таким образом, если обе матрицы выигрыша невырожденные, то для существования решения обеих систем должно быть $m = n$.

Вполне смешанное равновесие (p_0, q_0) удовлетворяет двум системам линейных уравнений ($e = (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^m$ – m-мерный вектор из единиц, $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение):

$$Aq_0 = v_1 \cdot e \qquad\qquad p_0 B = v_2 \cdot e$$
$$(q_0, e) = 1 \qquad\qquad (p_0, e) = 1$$

Если матрицы выигрыша невырождены у обоих игроков, то можно записать решения этих систем в векторном виде через обратные к A и B матрицы:

$$q_0 = \frac{A^{-1}e}{(A^{-1}e, e)} \qquad\qquad p_0 = \frac{eB^{-1}}{(eB^{-1}, e)}$$
$$v_1 = \frac{1}{(A^{-1}e, e)} \qquad\qquad v_2 = \frac{1}{(eB^{-1}, e)} \qquad 3.12$$

В простейшем случае ($m = n = 2$) формулы 3.12 обращаются в уже знакомые нам формулы 3.8 и 3.9.

3.4. Некоторые модели конечных игр: игры на координацию, игра полковника Блотто.

Следующий пример представляет собой так называемую игру на координацию (координационную игру) – в нем есть два равновесия Нэша, при этом одно из них предпочтительно для одного игрока, а второе - для другого.

Пример 3.7 («семейный спор»[10]). Муж и жена решают, как им провести вечер. На повестке дня стоят два варианта: пойти на футбол (Ф) или в театр (Т). Муж предпочитает футбол, жена предпочитает театр, однако при этом главным фактором является желание провести этот вечер вместе. Если супруги идут на футбол, то жена получает 1 единицу, а муж − 2 единицы полезности. Если же они идут в театр, то выигрыш жены − 2, а мужа − 1. Если оба идут в разные места, то выигрыши игроков отрицательные: в одиночестве муж получает -1 единицу от посещения футбола (любимый спорт не компенсирует страдания от ссоры с супругой) и -2 единицы от театра (мало того, что поссорились, так еще и зрелище неинтересное). У жены выигрыш в одиночестве рассчитывается по той же схеме: -2 единицы от одиночного посещения футбола и -1 от театра в одиночестве. Выигрыши игроков, таким образом, задаются матрицами (H = husband – Муж, W=wife – Жена):

$$H = \begin{array}{c} \\ \text{Т} \\ \text{Ф} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Т} & \text{Ф} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad W = \begin{array}{c} \\ \text{Т} \\ \text{Ф} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Т} & \text{Ф} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

В игре существует две ситуации чистого равновесия: (1,1) и (2,2). Первая из них предпочтительней второму игроку, а вторая−первому. Если муж с женой будут принимать решение независимо (например, мобильный телефон у кого-то не работает), то при выборе своей оптимальной равновесной стратегии они оба вместо хорошо проведенного вечера получат скандал и массу негативных эмоций. Данный пример показывает, что при наличии нескольких равновесий Нэша, в разной степени выгодных игрокам, необходим какой-то

[10] В некоторой литературе эта игра называется «битва полов» (“battle of sexes”)

механизм координации при выборе стратегии. Именно этим объясняется название класса игровых моделей, подобных **Пример 3.7**, "играми на координацию".

Найдем смешанное равновесие в игре «Семейный спор», пользуясь результатами 3.8 и 3.9: $q_1^0 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}} = \frac{2-(-2)}{1-(-1)+2-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, q_2^0 = \frac{1}{3}$; $p_1^0 = \frac{1}{3}; p_2^0 = \frac{2}{3}$. Таким образом, в условиях отсутствия координации, но при использовании смешанных стратегий каждый из супругов с вероятностью в 2/3 выбирает «свое» развлечение, а с вероятностью 1/3 – развлечение, предпочитаемое другим супругом. К сожалению, даже при таком поведении вероятность того, что супруги встретятся, составляет лишь 4/9, что меньше 50%. Таким образом, даже использование рандомизированного поведения, соответствующего смешанным равновесным стратегиям, не может заменить наличия полноценной координации между игроками. ■

Еще одним примером игры на координацию является игра «Перекресток».

Пример 3.8. Игроками являются два водителя, которым надо проехать через перекресток, к которому они подъехали одновременно (Рисунок 3.6). Возможны две стратегии пересечения перекрестка: использовать "правило правой руки" (right hand rule, RH), согласно которому водитель должен пропустить помеху справа (стратегия 1), или "правило левой руки" (left hand rule, LH), согласно которому водитель должен пропустить помеху слева (стратегия 2).

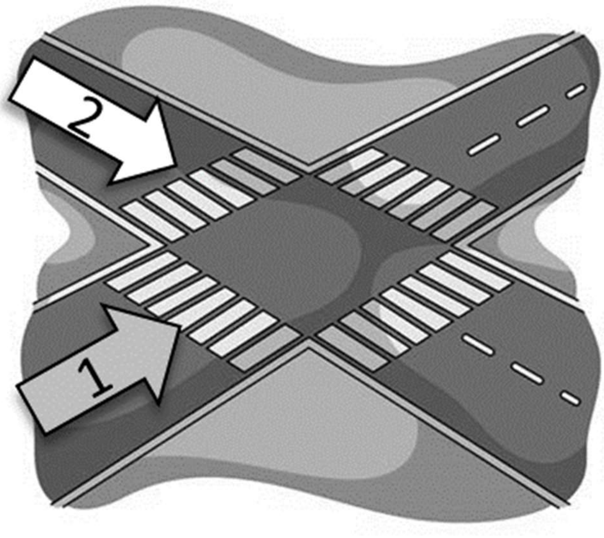


Рисунок 3.6. Схема движения игроков-водителей в игре «Перекресток» (Пример 3.8**)**

Выигрыши игроков-водителей можно записать в виде следующей пары матриц:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} RH & LH \end{array} \\ \begin{array}{c} RH \\ LH \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} RH & LH \end{array} \\ \begin{array}{c} RH \\ LH \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Если оба водителя придерживаются правила «уступить помехе справа», то первый водитель проезжает незамедлительно, получая 1 единицы выигрыша, а второй - ждет завершения маневра первого, теряя немного времени, и тоже без инцидентов проезжает перекресток (нулевой выигрыш). Если оба водителя уступают помехе слева, то ситуация оказывается диаметрально противоположной (первый ждет и получает ноль, второй проезжает и получает 1). Если первый водитель предпочтет уступать помехе слева, а второй - помехе справа, то они оба потеряют время, пропуская друг друга и не двигаясь с места (-1 единица выигрыша каждому). Наконец, если первый игрок пропускает только помехе справа, а второй - только помехе слева, то они оба на полной скорости въедут на перекресток и устроят аварию (-10 единиц выигрыша каждому).

Исследуем равновесия в возникшей игре, начав, естественно, с чистых равновесий. Как и в модели семейного спора, их здесь два - $(RH; RH)$ и $(LH; LH)$. Если оба водителя придерживаются одного правила, то они успешно разъедутся, но если один из них использует "правило правой руки", а другой "правило левой руки", то может возникнуть авария. Следовательно, для благоприятного исхода в таких играх у всех игроков должен быть одинаковый подход к выбору правил поведения. Тем не менее, как и в «Семейном споре», каждый игрок предпочел бы для себя «свое» чистое равновесие. Смешанное же равновесие имеет вид $(p^0, q^0) = \left(\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right); \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\right)$. Это означает, что с вероятностью $\frac{35}{36} \approx 97{,}22\%$ аварии не произойдет, если оба участника используют равновесные смешанные стратегии.

В общем виде матрицы игр на координацию удовлетворяют следующему свойству:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vee & \wedge \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ b_{21} & < & b_{22} \end{pmatrix} \qquad 3.13$$

В подобной биматричной игре очевидно наличие двух чистых равновесий $(1; 1)$ и $(2; 2)$. Поскольку равновесий Нэша в играх на координацию существует несколько, при этом разным игрокам «выгодны» различные равновесия, использование чистого равновесия Нэша на практике часто связывается со следующим сценарием поведения игроков. Они сначала должны договориться о ситуации равновесия, затем всякие переговоры запрещаются, и игроки независимо выбирают свои стратегии, возможно нарушая принятое соглашение. ■

Важнейшим фактором, оказывающим влияние на то, какое из нескольких равновесий, возникающих в координационной игре, в итоге имеет больше шансов реализоваться, оказывают принятые в обществе представления о правильном и неправильном поведении. В реальной жизни все люди стараются следовать определенным нормам поведения — негласным правилам, нарушение которых несет внутренний дискомфорт. Например, в реальных ситуациях, аналогичных игре «Перекресток», водители придерживаются того правила поведения, которое подсказывает им их «культура вождения», что позволяет облегчать жизнь и самим водителям, и другим участникам движения, и делать вождение более безопасным.

В целом же успех координации в ситуациях реального выбора зависит от развитости подобных негласных правил и от степени доверия участников взаимодействий друг другу. Если уровень доверия высок, а среди участников не принято друг друга обманывать, то транзакционные издержки при ведении совместных проектов ниже за счет экономии на мероприятиях по контролю принимаемых решений и отслеживанию их внедрения в жизнь. Из этого можно сделать достаточно важный вывод: так как при низких транзакционных издержках проблема коллективных действий решается проще, общества с высоким уровнем доверия и наличием единых негласных правил, координирующих поведение людей, в среднем имеют более высокий уровень благосостояния, чем общества других типов.

Еще одна классическая модель взаимодействия, представимая в виде биматричной игры, - дилемма заключенного. Если игры на координацию показывают, что чистых равновесий может быть больше одного, то дилемма заключенного иллюстрирует Парето-неэффективность таких равновесий в общем случае.

Пример 3.9 («дилемма заключенного»). Алекс и Брюс (игроки 1 и 2), подозреваемые в совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Ввиду отсутствия прямых улик успех или неуспех обвинения зависит от признания (стратегия 1) или непризнания (стратегия 2) самих бандитов. Если оба бандита признаются (ситуация (1,1)), то они будут признаны виновными и приговорены к 8 годам тюрьмы. Если ни один из них не признается (ситуация (2,2)), то по обвинению в главном преступлении они будут оправданы, но обвинителю все-таки удастся доказать их виновность в некотором сопутствующем менее тяжком преступлении, например, в ношении оружия, в результате чего они будут приговорены к 1 году тюрьмы. Если, наконец, признается только один из них (ситуации (2,1) и (1,2)), то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а непризнавшийся будет приговорен к отбытию максимального срока − 10 лет.

Матрицы выигрышей игроков примут вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{П} \\ \text{Н} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{П} & \text{Н} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{П} \\ \text{Н} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{П} & \text{Н} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

В этой игре имеется единственная ситуация равновесия (1,1): обоим бандитам необходимо признаться. Однако есть Парето-оптимальная ситуация (2,2), более выгодная обоим игрокам, но не являющаяся ситуацией равновесия. Данный пример показывает, что равновесия Нэша могут быть неэффективны в Парето-смысле, то есть за счет отклонения обоих игроков от ситуации равновесия можно улучшить выигрыши всех участников. Общий вид игр, подобных Дилемме заключенного, записанный по аналогии с 3.13, следующий:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vee & \vee \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ b_{21} & > & b_{22} \end{pmatrix} \qquad 3.14$$

При этом неэффективность по Парето равновесия Нэша возникает, например, если $a_{22} > a_{11}$ и $b_{22} > b_{11}$.■

Важным классом конечных игр являются пришедшие из военного дела «игры Полковника Блотто». Это антагонистические игры, которых цель игроков – в распределении ограниченных ресурсов по нескольким объектам (полям битв). В классической версии игры игрок, выставивший больше ресурсов на поле, выигрывает битву на этом поле, а суммарный выигрыш равен сумме выигранных битв.

Полковник Блотто – анекдотический персонаж теоретико-игровых моделей боевых действий, впервые появившийся в работе Гросса и Вагнера (Gross, Wagner, 1950). В их постановке полковник был обязан найти оптимальное распределение своих солдат по N полям сражений, зная что на каждом поле сторона, выставившая больше солдат, выигрывает, но ни одна сторона не знает, какое число солдат выставит противоположная сторона на каждом поле, и обе стороны стремятся максимизировать число полей, на которых битва будет выиграна. В качестве противника Блотто, как правило, выступают аналогичные выдуманные личности – генерал Лотто, граф Балони и т.д.

Пусть у военачальников имеется шесть полков, а сражаются они за три высоты. В подобной постановке игра Блотто эквивалентна игре, в которой два игрока записывают три неотрицательных целых числа ($N = 3$ полка у каждого военачальника) в неубывающем порядке, сумма которых равна 6 (эта сумма есть аналог количества полков). Затем игроки сравнивают числа (по порядку). Игрок, у которого в двух позициях числа больше, выигрывает. Обратите внимание, что для определения выигрыша оказываются несущественными номера конкретных высот, важно лишь соотношение сил. В такой игре найти равновесие достаточно просто. Во-первых, стратегии вида «Послать все войска на одну высоту» заведомо доминируемые, так как ни при каком поведении соперника не приведут к победе, максимум – к ничьей. Во-вторых, оставшиеся стратегии можно записать в виде троек $(2;2;2)$; $(1;2;3)$ и $(1;1;4)$. Использование любой стратегии против самой себя приводит к ничьей, стратегия $(2;2;2)$ «бьёт» $(1;1;4)$, $(2;2;2)$ против $(1;2;3)$ приводит к ничейному исходу, как и $(1;2;3)$ против $(2;2;2)$. Оптимальной стратегией выглядит $(2;2;2)$, потому что позволяет выбравшему ее игроку в худшем случае свести игру к ничьей, а при выборе соперником стратегии $(1;1;4)$ - поскольку выигрывает в одном случае, и не проигрывает во всех остальных. Однако, если оба игрока выберут стратегию (2, 2, 2) или (1, 2, 3), то ни один из игроков не сможет выиграть у другого меняя стратегию, так что каждая такая пара представляет собой Равновесие Нэша. Матрица такой игры имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ (2;2;2) \\ (1;2;3) \\ (1;1;4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (2;2;2) & (1;2;3) & (1;1;4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

В работе Мероллы и соавторов (Merolla et al., 2004) подобная Блотто-модель применялась для дескриптивного анализа выборов 200 года в США. В частности, если бы Альберт Гор действовал как предписывает оптимальная чистая стратегия Блотто, то, согласно результату Мероллы, он мог бы выиграть у Джорджа Буша те выборы.

Рассмотрим еще одну модификацию игры Блотто, представляющую собой дискретный аналог моделей «Оборона-Нападение» (см. далее).

Пример 3.10. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним две высоты. Он должен решить, как распределить отряды между высотами, чтобы захватить их. Его противник, генерал Лотто, имеет в подчинении два отряда и может принимать аналогичные решения, однако его цель – охранять высоты. Если на одной из высот у какой-то из сторон конфликта есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Каждый отряд, оказавшийся на высоте, уничтожает ровно один отряд соперника, так что «выживает» разность между количеством отрядов военачальника-победителя и военачальника-проигравшего. Если на высоте оказывается равное количество сил, то высота она остается нейтральной территорией.

Выигрышем полковника является общее количество его полков, занявших обе высоты.

Определим нормальную форму игры. Стратегии Блотто – это пары вида (x_1, x_2), где x_i – количество полков, отправляемых на высоту номер i. Так как у полковника в распоряжении три полка, которые он обязан бросить в бой, то $x_1 + x_2 = 3$, при этом $x_1 \in \{0,1,2,3\}$. Для сокращения записи мы можем пользоваться только одним числом – количеством x_1 войск, отправляемых на первую высоту (тогда $x_2 = 3 - x_1$). Аналогично строится множество стратегий генерала Лотто, оно состоит из трех пар $(y_1, y_2) = (y_1, 2 - y_1)$, где $y_1 \in \{0,1,2\}$ – количество полков, охраняющих первую высоту.

Тогда функция выигрыша полковника примет вид $u(x_1, y_1) = \max\{0, x_1 - y_1\} + \max\{0, x_2 - y_2\} = \max\{0, x_1 - y_1\} + \max\{0,3 - x_1 - (2 - y_1)\} = \max\{0, x_1 - y_1\} + \max\{0, y_1 - x_1 + 1\}$, и матрица игры примет следующий вид:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} y_1 \rightarrow \\ x_1 \downarrow \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Найдем равновесие в чистых стратегиях. В матричной антагонистической игре оно находится в седловой точке матрицы – том ее элементе, который является максимальным в своем столбце и минимальным в строке (это аналог правила поиска чистого равновесия в биматричной игре с учетом того, что матрица B выигрыша второго игрока есть минус матрица A выигрыша первого).

К сожалению, в рассматриваемой игре нет седловой точки. Действительно, если обозначить максимумы в столбцах подчеркиванием, а минимумы в строке обвести, то мы не обнаружим ни одного совпадения:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 2 \\ 2 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \underline{3} & \underline{2} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Будем искать равновесия в смешанных стратегиях. Попробуем снизить размерность задачи, удалив доминируемые стратегии. Строгого доминирования в чистых стратегиях здесь нет, однако вторую и третью стратегии Блотто можно удалить как строго доминируемые в смешанных стратегиях. Действительно, рассмотрим класс смешанных стратегий вида $p_\lambda = \left(\frac{1}{2} - \lambda, 0, 0, \frac{1}{2} + \lambda\right)$, где $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. При строго положительных λ любая стратегия из этого класса строго доминирует чистую стратегию 3 полковника, а при отрицательных – его чистую стратегию 2. Таким образом, можно редуцировать матрицу игры до вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Воспользоваться аналогичным приемом, «играя» за генерала Лотто, мы не можем: у генерала нет **строго** доминируемых стратегий – ни чистых, ни в смешанном расширении. Однако мы можем решить данную игру, используя графический метод для игр $2 \times n$. Читателю предоставляется проделать это самостоятельно и прийти в итоге к тому, что смешанное равновесие в игре будет иметь вид $(p^0, q^0) =$

$\left(\left(\frac{1}{2}, 0{,}0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right)$. И полковник, и генерал будут с вероятностью 50% каждый «бросать» все свои отряды на одну из двух высот, оставляя вторую без внимания. ■

Часто приходится сталкиваться с конечными играми более чем двух лиц. Методы их решения аналогичны методам поиска равновесий в матричных и биматричных играх, однако само решение увеличивается в объеме и становится более громоздким.

Пример 3.11. («Экопреступники», Васин, 2005) Каждое из трех предприятий, использующих воду из природного водоема, располагают двумя стратегиями: строить сооружения для полной очистки отработанной воды (стратегия 1) или же сбрасывать ее через имеющиеся очистные сооружения без биологической очистки (стратегия 2). Предполагается, что особенности водоема и технологических процессов таковы, что в случае, когда не полностью очищенную воду сбрасывает не более одного предприятия, вода в водоеме остается пригодной для использования и предприятия убытка не несут. Если же не полностью очищенную воду сбрасывают не менее двух предприятий, то каждый пользователь воды несет убытки в размере трех единиц. Найдем все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях описанной игры трех лиц.

Запишем функции выигрыша всех трех участников. Игра, с которой мы имеем дело, является конечной, однако биматричной она не является - игроков трое. В силу того, что лист, на котором напечатана книга, представляет собой двумерное пространство, изобразить на нем трехмерную таблицу чисел без искажений довольно затруднительно. Поэтому используем для записи функций выигрыша форму, приведенную в **Таблица 3.1.**

s_1	s_2	s_3	$u_1(s_1,s_2,s_3)$	$u_1(s_1,s_2,s_3)$	$u_1(s_1,s_2,s_3)$
1	1	1	-1	-1	-1
1	**1**	**2**	**-1**	**-1**	**0**
1	**2**	**1**	**-1**	**0**	**-1**
1	2	2	-4	-3	-3
2	**1**	**1**	**0**	**-1**	**-1**
2	1	2	-3	-4	-3
2	2	1	-3	-3	-4
2	**2**	**2**	**-3**	**-3**	**-3**

Таблица 3.1. Выигрыши игроков-фирм в зависимости от профиля стратегий

Сначала найдем равновесия в чистых стратегиях. Для этого построим наилучшие ответы $BR_1(s_2,s_3), BR_2(s_1,s_3), BR_3(s_1,s_2)$ каждого из игроков на стратегии его соперников (соответствующие элементы выделены в Таблица 3.1 полужирным шрифтом и серым фоном):

$$BR_3(1,1) = 2; BR_3(1,2) = 1; BR_3(2,1) = 1; BR_3(2,2) = 2$$

$$BR_2(1,1) = 2; BR_2(1,2) = 1; BR_2(2,1) = 1; BR_2(2,2) = 2$$

$$BR_1(1,1) = 2; BR_1(1,2) = 1; BR_1(2,1) = 1; BR_1(2,2) = 2$$

В биматричных играх точки равновесия находились с помощью функций наилучших ответов и матриц выигрыша как элементы, отмеченные в обеих матрицах. В случае трех игроков и записи функций выигрыша можно применить аналогичный подход. Мы отметили наилучшие ответы всех игроков в таблице выигрышей, и те строки таблицы, в которых оказались отмечены все элементы, и есть чистые равновесия, так как именно в этих ситуациях все игроки отвечают на стратегии соперников наилучшим образом. Таким образом, в игре существует четыре чистых равновесия: $(1,1,2); (1,2,1); (2,1,1)$ и $(2,2,2)$. К расстройству местных жителей, как минимум одно из предприятий в равновесии не будет очищать сточные воды.

Теперь построим смешанное расширение $\overline{\Gamma}$ исходной игры и найдем смешанные равновесия. Пусть $p^a \in [0, 1], a = 1,2,3$ - вероятность, с которой предприятие а выбирает стратегию 1. Возможные ситуации в игре $\overline{\Gamma}$ составляют множество $\Pi = \{\pi = (p^1, p^2, p^3) | p^a \in [0,1], a = 1,2,3\}$. Функция выигрыша первого предприятия в игре $\overline{\Gamma}$ имеет вид, линейный по его стратегии p^1:

$u_1(\pi) = p^1[-p^2p^3 - p^2(1 - p^3) - (1 - p^2)p^3 - 4 \cdot (1 - p^2)(1 - p^3)] + (1 - p^1) \cdot [-3p^2(1 - p^3) - 3(1 - p^2)p^3 - 3(1 - p^2)(1 - p^3)] = (-6p^2p^3 + 3p^2 + 3p^3 - 1)p^1 + 3p^2p^3 - 3 = k_1(p^2, p^3)p^1 + l_1(p^2, p^3)$. Аналогично, $u_2(\pi) = k_2(p^1, p^3)p^2 + l_2(p^1, p^3)$ для второго предприятия и $u_3(\pi) = k_3(p^1, p^2)p^3 + l_3(p^1, p^2)$ для третьего, где $l_1(p^2, p^3) = 3p^2p^3 - 3$, $l_2(p^1, p^3) = 3p^1p^3 - 3, l_3(p^1, p^2) = 3p^1p^2 - 3$, а коэффициенты при p_i имеют вид:

$k_1(p^2, p^3) = -6p^2p^3 + 3p^2 + 3p^3 - 1$, $k_2(p^1, p^3) = -6p^1p^3 + 3p^1 + 3p^3 - 1$ и $k_3(p^1, p^2) = -6p^1p^2 + 3p^1 + 3p^2 - 1$ соответственно.

Пусть $\overline{\pi} = (\overline{p}^a, a = 1,2,3)$ − произвольная ситуация равновесия. Обозначим $\overline{k}_1 = k_1(\overline{p}^2, \overline{p}^3)$, $\overline{k}_2 = k_2(\overline{p}^1, \overline{p}^3)$, $\overline{k}_3 = k_1(\overline{p}^1, \overline{p}^2)$

равновесные значения коэффициентов k_i. Очевидно, что при $\overline{k}_a > 0$ функция ожидаемого выигрыша игрока а при равновесном поведении соперников возрастает по значению его стратегии p^a, следовательно, $\overline{p}^a = 1$. Аналогично, если $\overline{k}_a < 0$, то $\overline{p}^a = 0$.

Рассмотрим все возможные варианты того, какие знаки могут принимать величины $\overline{k}_a, a = 1,2,3$. Пусть все $\overline{k}_a > 0$, тогда и все $\overline{p}^a = 1$, что приводит к противоречию ($\overline{k}_a = -1$). Пусть $\overline{k}_a > 0$ для $a = 1,2$, а $\overline{k}_3 < 0$. В этом случае ситуация равновесия (1,1,0) соответствует уже найденному чистому равновесию (1,1,2). Аналогично, (1,0,1) и (0,1,1) − также ситуации равновесия, соответствующие чистым равновесиям (1,2,1) и (2,1,1).

Ситуаций равновесия, соответствующих случаям ровно одной положительной и двух отрицательных $\overline{k}_a$, нет. Действительно, пусть $\overline{k}_1 > 0$, но $\overline{k}_2 < 0$ и $\overline{k}_3 < 0$. Тогда $\overline{p}^1 = 0$, $\overline{p}^2 = \overline{p}^3 = 1$, что после подстановки в выражение для $\overline{k}^1$ дает $\overline{k}^1 = -1$ – противоречие! Для двух других случаев доказывается аналогично.

Случай всех отрицательных $\overline{k}_a$ дает $\overline{p}^1 = \overline{p}^2 = \overline{p}^3 = 0$ - уже полученное ранее чистое равновесие (2,2,2). Случай всех $\overline{k}_a = 0$ дает систему уравнений:

$$\begin{cases} -6p^2p^3 + 3p^2 + 3p^3 - 1 = 0 \\ -6p^1p^3 + 3p^1 + 3p^3 - 1 = 0 \\ -6p^1p^2 + 3p^1 + 3p^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad 3.15$$

У нее есть два решения, дающие два симметричных вполне смешанных равновесия: $\overline{p}^1 = \overline{p}^2 = \overline{p}^3 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ и $\overline{p}^1 = \overline{p}^2 = \overline{p}^3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

Пусть $\overline{k}_1 = \overline{k}_2 = 0$, $\overline{k}_3 > 0$. Тогда $\overline{p}_3 = 1$, и система 3.15 имеет вид

$$\begin{cases} -6p^2 + 3p^2 + 2 = 0 \\ -6p^1 + 3p^1 + 2 = 0 \end{cases}.$$

Ее решение дает смешанное равновесие $(2/3, 2/3, 1)$. Если же $\overline{k}_1 = \overline{k}_2 = 0$, но $\overline{k}_3 < 0$, то $\overline{p}_3 = 0$, и из системы 3.15 следует, что $\overline{p}^1 = \overline{p}^2 = 1/3$. Но если стратегии предприятий таковы, то $\overline{k}_3 = 1/3$ – противоречие! Следовательно, данный случай не дает равновесий. Аналогично показывается, что $(1, 2/3, 2/3)$ и $(2/3, 1, 2/3)$ – тоже смешанные равновесия.

Наконец, рассуждая аналогично, убеждаемся, что нет ситуаций равновесия, соответствующих одной из величин $\overline{k}_a$, равной нулю, и двум, отличным от нуля.

Итак, мы нашли все ситуации равновесия в исходной игре Γ. Их ровно девять, из которых четыре представляют собой ситуации равновесия в чистых стратегиях, а пять – ситуации равновесия в смешанном расширении $\overline{\Gamma}$ исходной игры. ■

4. Задачи и упражнения для самостоятельного решения (тематический блок «Конечные игры»).

1. Докажите, что в антагонистической игре любая ситуация оптимальна по Парето.

2. Докажите **Теорема 3.3**.

3. Найдите все чистые равновесия в антагонистической игре с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Решите антагонистическую игру с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Рассмотрим антагонистическую игру с циклической матрицей выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_3 & c_4 & \cdots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & & c_n & c_1 \end{pmatrix}$$

Покажите, что в такой игре существует симметричное вполне смешанное равновесие: $(p^0, q^0) = (1/n, \dots, 1/n)$.

6. Стрелок (первый игрок) ведет стрельбу по цели (второй игрок), которая может находиться в одной из трех точек: либо в концах отрезка $[B, C]$ длины 2, либо в его середине D. Первый игрок выбирает точку прицела: B, C или D. Пусть d − расстояние от точки прицела до положения цели, а вероятности ее поражения равны $1, a, 0$ для расстояний $d = 0,1,2$ соответственно. Выигрыш первого игрока −

вероятность поражения цели, выигрыш второго – вероятность промаха по цели. Запишите эту игру в нормальной форме и определите оптимальную стратегию стрельбы в зависимости от значения параметра $a \in (0,1)$.

7. Решить игру с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Решить игру с матрицей A графическим методом и методом сведения к паре двойственных задач линейного программирования:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Существует ли равновесие в такой игре 2x2, где для матриц выигрыша выполнено условие:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vee & \vee \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ b_{21} & > & b_{22} \end{pmatrix}$$

10. В биматричной игре, матрицы выигрышей игроков которой имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -6 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -9 & 3 \\ 7 & 4 & -8 & 2 \\ -4 & 6 & -8 & 5 \\ -9 & -9 & 6 & 3 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти

a. Парето-оптимальные ситуации;

b. Равновесия Нэша в чистых стратегиях.

c. Наилучшие гарантированные результаты игроков и стратегии, их реализующие.

11. В биматричной игре, матрицы выигрышей игроков которой имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 & 0 \\ -7 & 9 & 9 & 1 \\ -8 & -6 & 7 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -8 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -6 & 9 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти

a. Парето-оптимальные ситуации;

b. Равновесия Нэша в чистых стратегиях.

c. Наилучшие гарантированные результаты игроков и стратегии, их реализующие.

12. Рассмотрим следующую игру двух лиц:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Существуют ли у какого-либо из игроков доминирующие стратегии? Если да, то укажите их. Существует ли в приведенной игре:

a. равновесие в доминирующих стратегиях?

b. равновесие, получаемое исключением доминируемых стратегий?

13. Завод выпускает автомобили партиями по 100 штук. За каждую автомашину завод получает от концерна 1,3 ед. оплаты, из которых 1 ед. составляют премиальные, а 0,3 ед. предназначены для операций технического контроля (ОТК). Завод (игрок 1) может выпускать партию автомобилей либо с ОТК (стратегия 1), либо без ОТК (стратегия 2), увеличивая сумму премиальных. При

использовании первой стратегии итоговая сумма премиальных, полученная заводом за партию, составляет 100 ед., при использовании второй стратегии − 130 ед. С целью уменьшения производственного брака концерн решил привлечь независимую автомастерскую, осуществляющую технический контроль за качеством продукции. Стоимость проверки автомобиля для фирмы составляет 0.12 ед. Если ОТК заводом не проводится, то автомобиль неисправен с вероятностью 4/5. В случае обнаружения неисправностей завод обязан их устранить, затратив 0.3 ед., и заплатить дополнительно фирме 0.2 ед. из своих премиальных. Сторонняя автомастерская (игрок 2) может либо проверить партию (стратегия 1), либо отказаться от ее проверки (стратегия 2). Выигрышем первого игрока является ожидаемая сумма премиальных, полученная заводом от концерна за партию автомобилей с учетом издержек на ОТК и возможных выплат фирме. Выигрышем второго игрока является ожидаемая сумма выплат, полученных от завода при проверке партии автомобилей с учетом затрат на эту проверку. Найдите смешанное равновесие в получающейся игре.

14. Используя графический метод решения, найдите равновесие в биматричной игре со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

15. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 6 \\ 4 & 12 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 9 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 8 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

18. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

19. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

20. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 15 \\ 15 & 5 & 7 & 4 \\ 10 & 10 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

22. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -7 & 5 \\ 17 & 5 & -7 & 11 \\ 5 & 5 & 11 & -1 \\ 11 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 9 & 5 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 16 & 7 \\ 1 & 7 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 19 & 19 & 13 & 13 \\ -3 & -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

24. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

26. Всемирно известный университет планирует запуск новой учебной программы. Для этого ему следует провести адаптацию читаемых в настоящее время учебных курсов к современным требованиям и прохождение сертификации в государственной сертификационной комиссии. При этом у университета есть три стратегии поведения: глубокая переработка дисциплин, расходы на которую составят 1000 единиц; среднетрудоёмкая адаптация дисциплин (расходы 500 единиц); адаптация минимальными усилиями (трудоёмкость 100 единиц). Сотрудники сертификационной комиссии могут избрать два способа проверки: дотошный (с затратами комиссии в 200 единиц) и снисходительный (с затратами в 100 единиц). В первом случае они с единичной вероятностью отказывают в сертификации минимально адаптированной и среднеадаптированной программам и с вероятностью 0,5 отказывают программе со с глубокой адаптацией. В случае снисходительной проверки комиссия с вероятностью 0,5 отказывает минимально адаптированной программе и успешно сертифицирует программы иной адаптации. Известно, что в случае отказа в сертификации

репутационные убытки университета составят 10000 единиц, а сотрудники комиссии получают премию в 500 единиц. Сформулируйте вышеуказанную ситуацию как игру в нормальной форме, укажите матрицы выигрышей, удалите доминируемые стратегии и найдите равновесие Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

27. В городе М имеется два конкурирующих автосалона. Каждый из них имеет три стратегии продажи автомобилей: по цене, рекомендованной производителем; по более высокой цене; со скидкой от рекомендованной цены. При этом, если оба производителя продают авто со скидкой, то выигрыш каждого оценивается в 3 единицы, если оба продают по рекомендованной цене, то в 7 единиц, а если по завышенной цене, то выигрыш каждого оценивается в 10 единиц. Однако, если один из автосалонов продаёт авто дороже, чем другой, то его выигрыш равен -1, т.к. покупатели совершают покупку у конкурента. При этом выигрыш автосалона с более низкими ценами ровно в два раза выше, чем выигрыш этого салона в случае, если бы у конкурента была такая же цена. Описать ситуацию как биматричную игру, найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях

28. На берегу водоема расположены две фабрики. Каждая из фабрик может либо полностью перерабатывать свои отходы (затраты 15 млн. руб.), либо перерабатывать их частично и сбрасывать в реку 5 тонн отходов (затраты 10 млн.руб.), либо не перерабатывать и сбрасывать в реку 10 тонн отходов (нет затрат). Если в реку будет сбрасываться меньше 12 тонн отходов, никто ничего не заметит. Если

от 12 до 19 тонн, то обе компании будут оштрафованы на 20 миллионов за загрязнение окружающей среды. Если же в реку будет сбрасываться 19 и более тонн отходов, то компании будут оштрафованы на 40 миллионов каждая. Найдите все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях в возникающей игре.

29. Всемирно известный производитель автомобилей планирует выход на новый рынок. Для этого ему следует провести адаптацию производимых автомобилей к национальным требованиям и прохождение сертификации в государственной сертификационной комиссии. При этом у автопроизводителя есть три стратегии поведения: глубокая переработка моделей, расходы на которую составят 1000 единиц; среднетрудоёмкая адаптация автомобилей (расходы 100 единиц); адаптация минимальными усилиями (трудоёмкость 10 единиц). Сотрудники сертификационной комиссии могут избрать два способа проверки: дотошный (с затратами комиссии в 1000 единиц) и снисходительный (с затратами в 100 единиц). В первом случае они с единичной вероятностью отказывают в сертификации минимально адаптированному автомобилю; с вероятностью 0,5 отказывают модели со средней адаптацией и успешно сертифицируют глубокоадаптированную модель. В случае снисходительной проверки комиссия с вероятностью 0,5 отказывает минимально адаптированной модели и успешно сертифицирует автомобили иной адаптации. Известно, что в случае отказа в сертификации репутационные убытки производителя составят 10000 единиц, а сотрудники комиссии получают премию в 500 единиц. Сформулируйте вышеуказанную ситуацию как игру в нормальной

форме, укажите матрицы выигрышей, удалите доминируемые стратегии и найдите равновесие Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

30. На станции электрички в двух разных концах перрона стоят два ларька. Торговцы ларьков выбирают, какой товар им реализовывать – пиво, воблу, или же оба товара сразу. Из прибывшего поезда выходят два пассажира, каждому нужно по стакану пива и порции рыбы. За стакан пива пассажир готов заплатить 10 рублей, за порцию рыбы – 5 рублей, а если кто-то предложить им набор «Пиво+рыба», то пассажир готов заплатить 20 рублей (так как он покупает все в одном месте и ему не придется бегать по перрону между ларьками). Если в обоих ларьках продается одно и то же, то первый пассажир идет покупать в первый ларек, а второй – во второй. Если в каком-то из ларьков продается сразу набор «Пиво+рыба», то оба покупателя берут его в этом ларьке, даже не заглядывая в другой. Выигрыш торговцев при этом взаимодействии равен их выручке. Описать эту ситуацию как биматричную игру, найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

31. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник также имеет в подчинении три отряда и может принимать такие же решения. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником.

a. Запишите игру в нормальной форме, соответствующую данному конфликту. Найдите в ней равновесия Нэша.

b. Пусть теперь у Блотто в распоряжении четыре отряда, в то время как у его соперника – три. Как изменится нормальная форма игры и равновесия?

c. Пусть сопернику полковника пришло подкрепление и теперь он также располагает четырьмя отрядами. Как изменится равновесный исход их конфликта?

32. Анна и Борис (игроки А и В) играют в следующую игру. Сначала каждый из них кладет в банк 100 долларов. Затем оба одновременно называют число: 1,2 или 3. Если сумма делится на 3, то побеждает Анна, в противном случае выигрывает Борис. Победитель забирает весь банк. Есть ли у игроков доминирующие стратегии? Найдите все равновесия Нэша и выигрыши игроков в равновесии.

33. Близится развязка игры в «Мафию». Осталось три игрока: 1 мирный житель, 1 мафия и 1 маньяк. Всем уже стало понятно, кто есть кто. Каждый хочет победить, в том числе и маньяк, который считается самостоятельным игроком (не мирным жителем и не мафией). Наступила ночь. Маньяк и мафия независимо друг от друга решают, кого этой ночью убить. Чем завершится игра в равновесии Нэша?

34. Четыре парламентские партии работают над необходимым, но крайне непопулярным у населения законом. Все партии одновременно и независимо друг от друга решают, выдвигать ли данный закон от своего имени. Если n партий выдвинут данный закон от своего имени, где $1 \leq n \leq 4$, то каждая партия понесет

репутационные издержки в размере 12 единиц. Партии, не выдвинувшие данный закон, за него проголосуют, но репутационных издержек не понесут. Однако если ни одна партия закон не выдвинет, то все закончится плохо: из-за отсутствия необходимого закона каждая партия понесет издержки в размере 15. Найти все равновесия Нэша в этой игре.

35. На железнодорожной платформе в электричку заходят безбилетник и контролер. Если они заходят в один и тот же вагон, то контролер ловит безбилетника и штрафует его на 100 руб. Если они садятся в разные вагоны, то безбилетник выходит на следующей станции, ничего не заплатив. Свое моральное удовлетворение от поимки безбилетника контролер оценивает в 50 руб. Исследовать равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях в возникающей игре в различных случаях:

a. В электричке всего два вагона;

b. В электричке три вагона;

c. Количество вагонов в электричке - $N \geq 4$.

36. В стране N приходят президентские выборы. В них участвуют два кандидата — сильный (S=strong) и слабый (W=weak). Стратегией кандидата является его предвыборная программа — левая L, центристская C, или правая R. Матрицы выигрышей таковы:

$$S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ C \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ C \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пусть $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Если слабый кандидат выберет ту же стратегию, что и сильный, то проиграет вчистую; если выберет другую, то проиграет с меньшим отрывом (что лучше), или даже выиграет. Найдите равновесие.

37. Нефтяная компания X имеет монополию на поставку бензина в трех регионах. Компания Y собирается построить сеть своих заправок в одном из этих регионов; компания X намерена ей помешать. Компания Y выбирает, в каком из регионов строить заправки; X выбирает, в каком из регионов бороться с Y путем административного ресурса. Если компания Y выбрала регион i, а компания X — другой регион, то Y выигрывает v_i, X проигрывает ту же величину. Если обе компании выбрали один и тот же регион, то каждая получает нулевой выигрыш. Найдите равновесие в смешанных стратегиях, при условии, что $v_1 > v_2 > v_3 > 0$.

38. Три избирателя, 1-й, 2-й и 3-й, решают, за кого из трех кандидатов, A, B или C, следует проголосовать. Для победы кандидату необходимо получить минимум 2 голоса. Если все кандидаты набирают поровну голосов, то побеждает кандидат A (например, он занимает выборную должность и остается исполнять обязанности до следующих выборов). Предпочтения избирателей следующие. Для первого избирателя наилучшим вариантом является кандидат A, чуть хуже – кандидат B, и хуже всего – кандидат C. Для второго избирателя порядок предпочтений – B предпочтительней, чем C, который, в свою очередь, предпочтительней A, а для третьего – B лучше A, который лучше C. Функции выигрыша избирателей - u_{ij}, где $i = 1,2,3$ – номер избирателя, $j = A, B, C$ – выигрывающая альтернатива ($u_{1A} > u_{1B} > u_{1C}; u_{2B} > u_{2C} > u_{2A}; u_{3B} > u_{3C} > u_{3A}$).

a. Найдите все равновесия Нэша.

b. Найдите все равновесия Нэша, в которых избиратели не голосуют за свои наихудшие альтернативы.

c. Существуют ли сильные равновесия Нэша?

39. (Вартанов, 2012) В финальный тур голосования в некотором государстве вышли два кандидата (обозначим их условно Биллари и Рональд). Среди избирателей ровно N_B поддерживают Биллари и ровно N_R – Рональда. Стратегия каждого избирателя – принять участие в выборах, голосуя за своего кандидата либо воздержаться от участия. Участие в выборах для избирателя обходится в величину c (например, если выборы проходят в воскресенье, то придется отменить поездку на дачу и т. п.) В то же время победа на выборах поддерживаемого им кандидата приносит каждому избирателю выгоду в размере $a > c$, а его поражение – потери в том же объеме. Побеждает тот кандидат, за которого будет отдано строго больше голосов, чем за его соперника. Исследуйте равновесия в возникающей игре $N_R + N_B$ лиц в различных предположениях:

a. $N_B = 3, N_R = 2$;

b. $N_B = N_R > 3$;

c. $N_R > N_B > 3$.

Для случая a найдите все равновесия в чистых и смешанных стратегиях. Для случаев b и c найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях (либо докажите их отсутствие) и изучите симметричные вполне смешанные равновесия. Возможен ли при использовании равновесных стратегий всеми избирателями выборный парадокс – победа кандидата, поддерживаемого меньшинством?

40. (Palfrey, Rosenthal, 1984; Захаров, 2015) N человек решают, стоит ли им производить общественное благо. Решение каждого человека i есть $d_i \in \{0,1\}$ — стоит ли участвовать в производстве блага или нет. Выигрыш каждого человека в том случае, когда благо произведено, равен 1, а в том случае, когда благо не произведено — 0. Дополнительно к этому человек, участвующий в производстве блага, несет издержки $c < 1$. Пусть для производства блага необходимо, чтобы $1 \leq K < N$ человек участвовало в производстве. Найдите все равновесия в чистых стратегиях. Найдите симметричное равновесие в смешанных стратегиях. Почему равновесия в смешанных стратегиях могут выглядеть предпочтительней? Есть ли еще равновесия в этой игре?

5. Статические игры общего вида.

5.1. Теоремы об условиях существования равновесия в играх в нормальной форме.

Как нам с вами уже известно, основной моделью конфликтной ситуации в теории игр является игра в нормальной форме. Игра в нормальной форме является формализацией описываемого конфликта, на математическом языке описывающей все аспекты исследуемого взаимодействия: участников, их возможные действия и последствия этих действий для каждого из них. В случае биматричных игр равновесие Нэша искалось на основе матриц выигрышей. При этом его поиск был основан на методе, почти идентичном полному перебору всех возможных ситуаций в игре. Разумеется, совокупность возможных действий всех участников игры редко может быть представимо в виде множеств с конечным числом элементов. Во многих играх, соответствующих реальным конфликтным ситуациям, напротив, удобно считать, что множество стратегий не является конечным или даже счетным. Например, в дуополии Курно стратегия каждой из двух фирм – это объем выпуска их продукции, то есть неотрицательное действительное число. Для таких игр разработанный для биматричных игр аппарат поиска стратегий является неприменимым. Поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим более общий класс игровых моделей – непрерывные игры.

Непрерывные игры – это такие игры, в которых множества стратегий всех игроков предполагаются континуальными, а функции выигрыша непрерывно зависят от профиля выбираемых стратегий. Это могут быть отрезки числовой прямой, интервалы, полуинтервалы или даже вся числовая прямая, а также многомерные множества более сложной природы. Необходимо отметить, что мы сосредоточим наш анализ, в первую очередь, на одномерных множествах, то есть на таких играх, где стратегией каждого игрока является одно число. В случае, если стратегия игрока включает более одного компонента, анализ стратегического поведения заметно усложняется, выкладки удлиняются и становятся менее понятными, однако принцип поиска равновесий Нэша и их свойства остаются в целом аналогичными таковым для одномерного случая. Предполагая множество стратегий игроков континуальным, а их функции выигрыша дифференцируемыми, мы можем находить равновесия и исследовать их свойства, анализируя локальные максимумы функций выигрыша игроков.

Заметим, что нам уже приходилось сталкиваться с непрерывными играми в рамках настоящего курса. Речь идет о смешанных расширениях биматричных игр. Действительно, рассмотрим смешанное расширение биматричной игры Γ с матрицами выигрыша A и B размерностей $m \times n$. Стратегии игроков в нем – это вероятностные распределения на множестве чистых стратегий, то есть векторы $p \in P$; $q \in Q$, где P и Q – симплексы размерностей $m-1$ и $n-1$ соответственно. Симплекс есть множество векторов из неотрицательных элементов, в сумме дающих единицу – а это и есть континуальное множество! А в качестве оценки выигрыша игроков выступали математические ожидания их выигрыша $A(p,q) =$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ и $B(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$, которые являются непрерывными функциями от аргументов p и q. Таким образом, при анализе смешанных равновесий биматричной игры мы изучали равновесия в непрерывной игре, хотя само это понятие и особенности решения таких игр нам были еще неизвестны.

Для биматричной игры была доказана замечательная Теорема Нэша, согласно которой в любой биматричной игре существует равновесие Нэша. На самом деле, эта теорема не является каким-то «отдельным» утверждением, касающимся только смешанных расширений биматричных игр. Теорема Нэша представляет собой следствие более общей теоремы о существовании равновесий Нэша в непрерывных играх. Эта теорема описывает условия, при которых в непрерывной игре существует равновесие, однако перед тем, как сформулировать и доказать её, нам потребуется ввести (или вспомнить – для тех, кто более подкован в математическом анализе и теории оптимизации) ряд понятий, связанных с ***выпуклостью*** множеств и отображений.

Те из читателей, кто сталкивался с теорией оптимизации, могут помнить, что для поиска локальных экстремумов (а равновесие Нэша, с точки зрения игрока, является локальным максимумом его функции выигрыша при фиксированных стратегиях его соперников) наиболее «приятными» являются вогнутые (или выпуклые – зависит от типа экстремума) функции, экстремум которых ищется на выпуклом и замкнутом множестве. Для остальных приведем определения этих понятий.

Определение 5.1. Подмножество X линейного пространства называется выпуклым, если для любых $x_1, x_2 \in X$ отрезок $[x_1, x_2]$ также принадлежит X.

Определение 5.2. Подмножество X Евклидова пространства размерности n – компакт тогда и только тогда, когда X замкнуто и ограничено.

Определение 5.3. Функция $f(x)$ называется выпуклой, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

Определение 5.4. Функция $f(x)$ называется вогнутой, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

Понятия выпуклости и вогнутости функций являются в определенном смысле обратными: выпуклость функции – это ее вогнутость «наоборот». Более того, в ряде учебников и научных работ (особенно выпущенных в советское время – чем раньше, тем чаще) встречаются термины «выпуклая вверх» (это, в нашем понимании, вогнутая) и «выпуклая вниз» (это просто выпуклая) функция. Примеры вогнутых функций:

- линейная функция $f(x) = (a, x) + b$,
- квадратичная функция $f(x) = (x, Ax) + (a, x) + b$, где $(x, Ax) \leq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Приятной (для нас) особенностью вогнутых функций является теорема о глобальном максимуме: вогнутая функция имеет на выпуклом множестве единственный локальный максимум, который одновременно является и глобальным. С точки зрения теории игр, это означает, что в случае выигрышей, вогнутых по «своим» аргументам, и выпуклых множеств стратегий, мы можем ожидать, что в рассматриваемой игре существует равновесие Нэша. Однако на самом деле мы можем накладывать на функции выигрыша даже более слабые условия. Речь идет о таком свойстве функций, как квазивогнутость.

Определение 5.5. Функция $f(x)$ называется *квазивогнутой*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq min\{f(x_1), f(x_2)\}$

Очевидно, что любая вогнутая функция является квазивогнутой. Примером квазивогнутой функции на прямой может служить любая монотонная функция – возрастающая или убывающая.

Необходимое и достаточное условие квазивогнутости функций можно получить, используя понятие множеств Лебега этой функции.

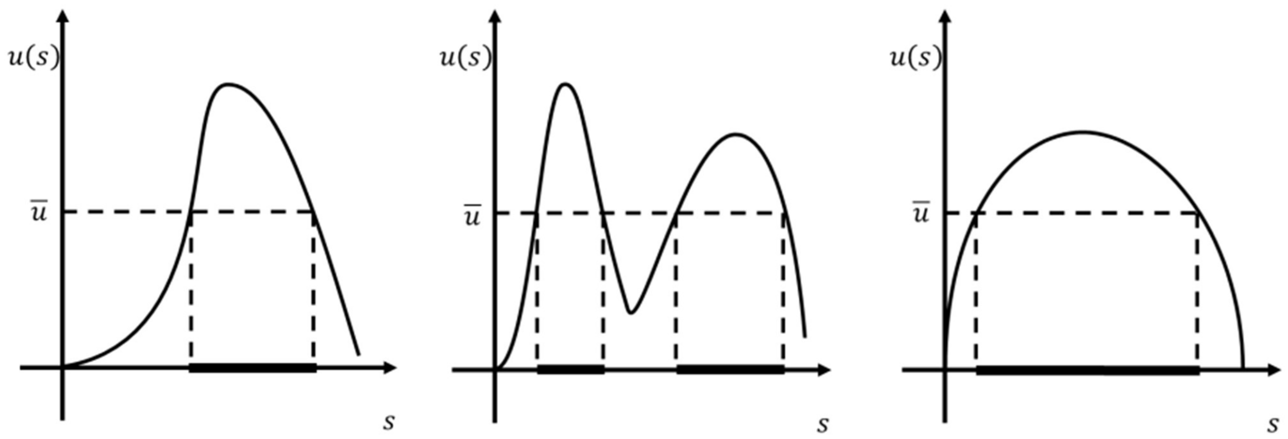
Определение 5.6. Пусть $z_0 \in Z$. Множеством Лебега функции $h(z)$ (верхним), определенной на каком-либо выпуклом множестве Z, называется множество $L_h^+(z_0) = \{z \in Z | h(z) \geq h(z_0)\}$.

Иными словами, верхнее множество Лебега функции, соответствующее точке z_0, — это совокупность таких точек исходной области определения этой функции, значения в которых больше, чем в точке z_0.

Утверждение 5.1. Для того, чтобы функция $h(z)$ была квазивогнутой на выпуклом множестве Z, необходимо и достаточно, чтобы ее верхние множества Лебега $L_h^+(z_0)$ были выпуклыми при любых $z_0 \in Z$.

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю в качестве упражнения**.**

Примеры графиков квазивогнутых, вогнутых и выпуклых функций одной переменной приведены на **Рисунок 5.1**. На нем наглядно показан смысл доказанного утверждения: у квазивогнутых функций одной переменной верхние множества Лебега представляют собой отрезки (они выделены полужирной линией) – выпуклые одномерные множества. У не квазивогнутых функций эти множества могут быть устроены более причудливо.



a. Квазивогнутая функция

b. Функция с переменным направлением выпуклости

c. Строго вогнутая функция

Рисунок 5.1. Наглядное сравнение графиков квазивогнутых, не квазивогнутых и вогнутых функций.

Обсужденное свойство квазивогнутых функций оказывается краеугольным камнем для всей теории непрерывных игр. С ним связана основная Теорема существования равновесий.

Теорема 5.1 (о существовании равновесия). Пусть S^i – выпуклый компакт, φ^i непрерывна по s и квазивогнута по s^i для любого $i \in I$. Тогда существует равновесие по Нэшу в игре Γ.

Доказательство этой теоремы опирается на одну из теорем о неподвижных точках – теорему Какутани. Для того, чтобы продолжить дальнейшее обсуждение, нам понадобятся дополнительные понятия, обобщающие знакомые нам концепции отображения и непрерывности. Рассмотрим некоторые множества-компакты Z_1 и Z_2 – подмножества евклидовых пространств (размерность не важна). Зададим на множестве Z_1 точечно-множественное отображение $\Phi(z)$, которое каждому элементу z из этого множества ставит в соответствие сразу несколько элементов из Z_2. Таким образом, образ этого элемента представляет собой подмножество Z_2.

Теорема 5.2 (Какутани). Пусть Z **-** выпуклый компакт линейного метрического пространства конечной размерности, Φ – замкнутое выпуклозначное точечно-множественное отображение из Z в себя. Тогда существует неподвижная точка $\boldsymbol{z}^*$**,** такая что $z \in \Phi(z^*)$.

Доказательство. Введем ряд необходимых для доказательства определений и обозначений. Так как Φ – замкнутое выпуклозначное точечно-множественное отображение из Z в себя, то для любого $z \in Z$ $\Phi(z)$ – подмножество Z.

Определение 5.7. Отображение $\Phi(z)$– *замкнутое, если его график* $\{(z,y)|z \in Z, y \in \Phi(z)\}$ *–замкнутое множество.*

Определение 5.8. Отображение $\Phi(z)$– выпуклозначно, если для любого $z \in Z$ $\Phi(z)$ – выпуклое множество. Если $\Phi(z)$ – это отображение из Z в Z, то $\Phi(z)$ – замкнуто тогда и только тогда, когда оно непрерывно.

Теорема Какутани показывает, что для любого непрерывного отображения выпуклого компакта в самого себя существует неподвижная точка z, такая что $z = \Phi(z)$ (одномерный аналог – теорема Брауэра).

Доказательство Теорема 5.2 *для* $Z \subset \mathbb{R}^1$ *(одномерное множество).*

В одномерном случае Z является просто отрезком: $Z = [a, b]$. Рассмотрим множество $\hat{Z} = \left\{z \in Z \middle| \max \Phi(z) \geq z\right\}$. Оно непусто, так как, по крайней мере, $a \in \hat{Z}$. Действительно, по условию отображение $\Phi(z)$ действует из Z в себя, то есть образом отрезка $[a, b]$ является он сам. Отсюда следует, что для любого $x \in Z$ $\Phi(z) \geq a$, в том числе и для самого значения a $\Phi(a) \geq a$.

Пусть $z^* = \sup \hat{Z}$. Покажем, что $z^* \in \Phi(z^*)$. Предположим обратное – что $z^* \notin \Phi(z^*)$. Это возможно в двух случаях: либо $\max \Phi(z^*) < z^*$ (то есть все множество $\Phi(z^*)$ лежит левее точки z^*), либо $\min \Phi(z^*) > z^*$ (все множество $\Phi(z^*)$ лежит правее точки z^*). Первая ситуация невозможна: $\max \Phi(z^*) \geq z^*$, так как отображение $\Phi(z)$ - замкнутое, а, следовательно, его точная верхняя грань ему принадлежит. Предположим теперь, что $\min \Phi(z^*) > z^*$. В этом случае существует $z' > z^*$, такое что $\max \Phi(z') \geq z'$, так как $\Phi -$

замкнутое. Но это противоречит определению z^* как точной верхней грани! Таким образом, доказано существование неподвижной точки.

Доказательство Теорема 5.1. Определим отображение $U(s) = \otimes_{i \in I} U^i(s)$, где $U^i(s) = \underset{s_i \in S^i}{Argmax}\, u^{\boldsymbol{i}}(s_i | s_{-i})$ - общее отображение наилучших ответов, то есть вектор, в котором элемент под номером i есть наилучший ответ -го игрока на стратегии его соперников, равные элементам, стоящим на других местах. Вектор $U(s)$ имеет размерность, равную количеству игроков, и действует из множества профилей стратегий игроков в него же: $U: S \to S$.

Для того, чтобы продолжить доказательство настоящей теоремы, нам потребуется одно вспомогательное утверждение, которое мы приведем без доказательства (читатель может провести его самостоятельно).

Лемма 5.1. Для любой непрерывной квазивогнутой функции u^i отображение U^i наилучших ответов – замкнуто и выпуклозначно.

Рассмотрим вновь отображение $U(s)$. Как следует из **Лемма 5.1**, оно является замкнутым и выпуклозначным. Это означает, что можно применить Теорему Какутани: существует неподвижная точка s^* отображения U такая, что $U(s^*) = s^*$. Иными словами, для любого i $s_i^* \in \underset{s_i \in S^i}{Argmax}\, u^{\boldsymbol{i}}(s_i | s_{-i}^*)$, то есть s^* – равновесие Нэша игры Г. ■

Обсудим полученные результаты. Квазивогнутость и непрерывность функций полезности является условиями, гарантирующими непрерывность функций реакции игроков.

Пример 5.1. Рассмотрим игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,\ 1]$ (такой тип непрерывных игр называется **играми на**

прямоугольнике). Функции выигрыша игроков: $u_1(s_1, s_2) = max\{s_2 - s_1; s_1 - s_2\}$, $u_2(s_1, s_2) = -(s_2)^2 + \left(\frac{1}{2} + s_1\right) s_2$.

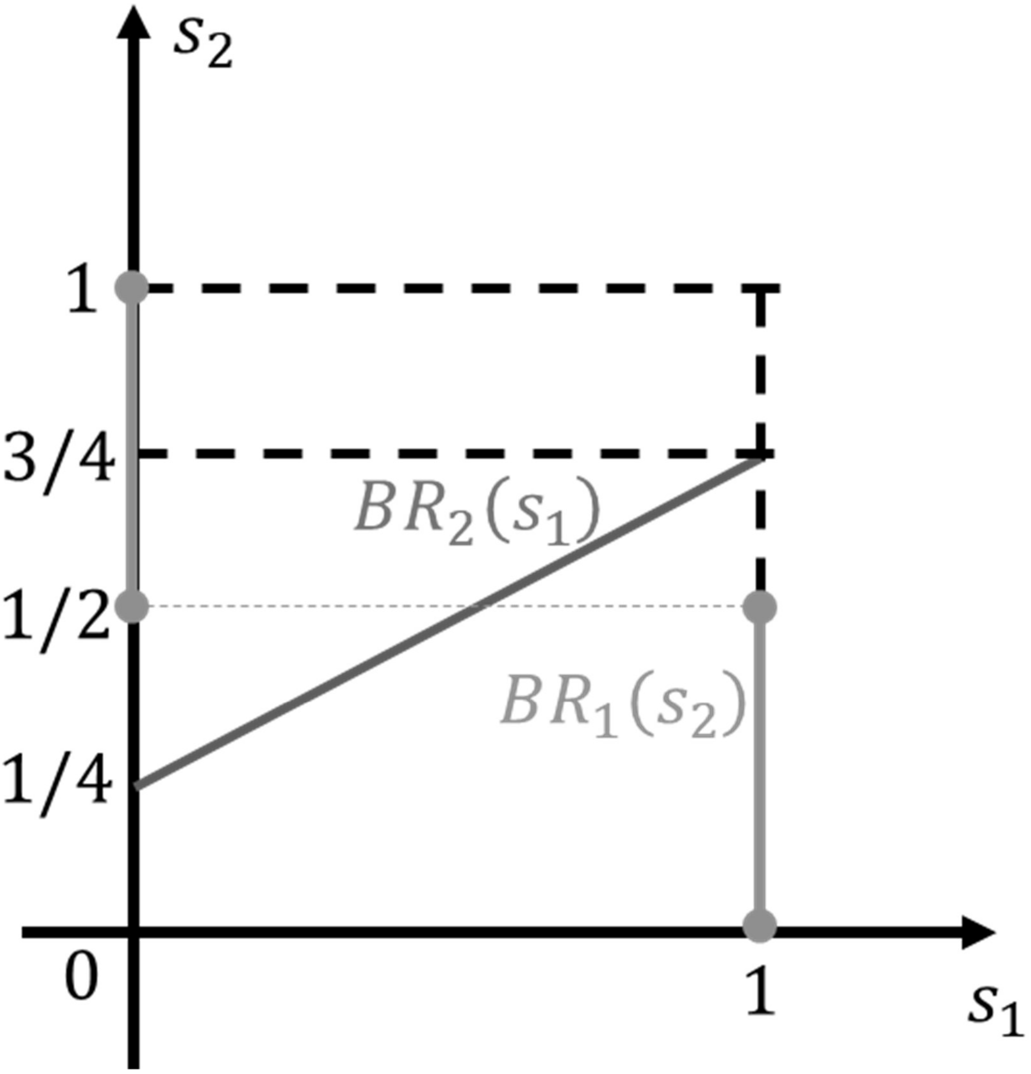


Рисунок 5.2. Иллюстрация к **Пример 5.1**: отсутствие равновесий при не-квазивогнутых функциях выигрыша

Здесь обе функции выигрыша непрерывны, но первая не квазивогнута. Отображение наилучшего ответа первого игрока имеет незамкнутый вид, в то время как отображение наилучшего ответа второго игрока – «хорошее» (это просто линейная функция):

$$BR_1(s_2) = \begin{cases} 1, s_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \{0; 1\}, s_2 = \frac{1}{2} \\ 0, s_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \qquad BR_2(s_1) = \frac{1}{4} + \frac{s_1}{2}$$

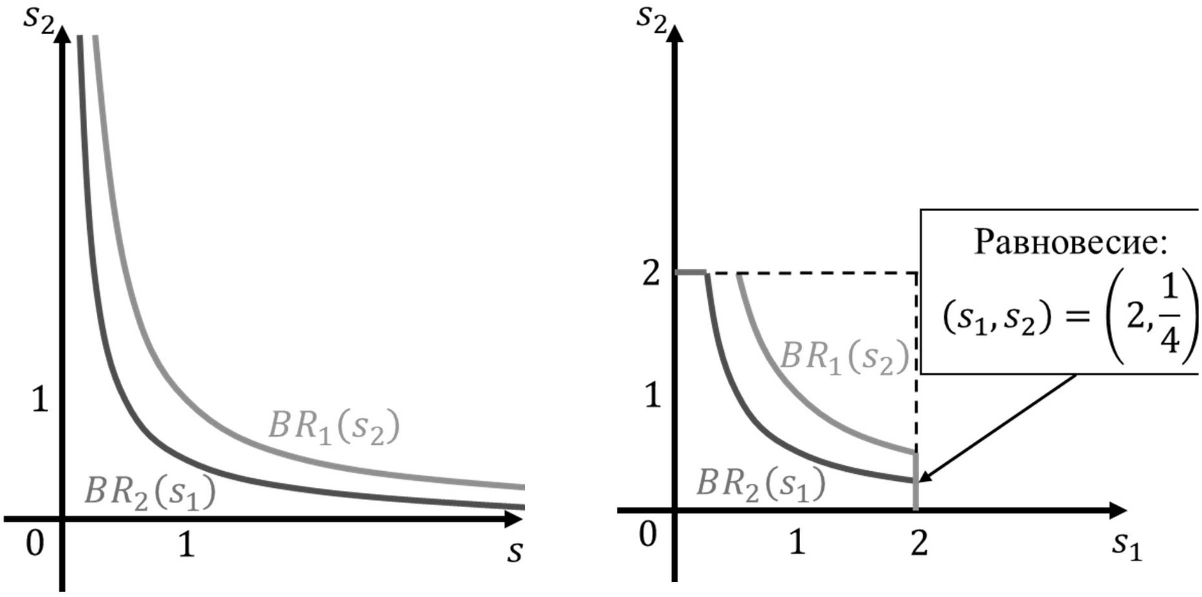
Для того, чтобы найти равновесие, построим графики этих функций. Точки, в которых графики пересекаются, и соответствуют ситуациям равновесия в исследуемой игре. **Рисунок 5.2** иллюстрирует это, из него видно, что график наилучшего ответа второго игрока, хоть и непрерывен, «проходит через разрыв» в графике наилучшего ответа первого игрока. Поэтому равновесия в рассматриваемой игре нет. ■

Другие «проблемы», связанные с несуществованием равновесий Нэша в статических играх общего вида, могут возникать в тех случаях, когда множества стратегий игроков не являются компактами. Например, как показывают два следующих примера, даже при «хорошей» функции выигрыша (строго вогнутой по «нужной» переменной) в игре может не быть ситуации равновесия, если нарушается требование компактности множеств стратегий игроков.

Пример 5.2. Рассмотрим игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0, +\infty)$ и функциями выигрыша $u_1(s_1, s_2) = s_1 \cdot (2 - s_1 s_2)$ и $u_2(s_1, s_2) = s_2 - s_1 \cdot s_2^2$. Обе функции являются строго вогнутыми по «своим» переменным – по ним они квадратичны с отрицательным старшим коэффициентом. Таким образом, условия первого порядка для определения равновесия Нэша можно записать в дифференциальном виде:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial s_1}\right|_{s_2=s_2^0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial s_2}\right|_{s_1=s_1^0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2s_1 s_2 = 0 \\ 1 - 2s_1 s_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система несовместна! Следовательно, и равновесия в рассматриваемой игре нет. Почему это произошло, несмотря на «хорошие» функции выигрыша? Дело в том, что множества стратегий игроков не являются компактами, точнее говоря, в рассматриваемом примере к отсутствию равновесия привела неограниченность множеств. Для иллюстрации этого построим функции наилучшего ответа и изобразим их графики на одной координатной плоскости.



a. $S_1 = S_2 = [0, +\infty)$ b. $S_1 = S_2 = [0,1]$

Рисунок 5.3. Иллюстрация к **Пример 5.2**: отсутствие равновесий при некомпактном множестве стратегий.

Из каждого уравнения можно получить функции наилучшего ответа обоих игроков. Поскольку функции выигрыша строго вогнуты, функции наилучшего ответа непрерывны. Они имеют вид $BR_1(s_2) =$

${}^{1}/_{s_2}$ (из первого уравнения) и $BR_2(s_1) = {}^{1}/_{2s_1}$ (из второго уравнения). Как следует из Рисунок 5.3а, если множества стратегий игроков неограничены, то общих точек у графиков наилучших ответов нет, значит, и ситуаций равновесия в игре нет. Однако, если бы мы ограничили множества стратегий игроков, «сделав» из числовой полуоси отрезки – компактные множества (например, $S_1 = S_2 = [0,2]$), то функции наилучшего ответа примут чуть иной вид:

$$BR_1(s_2) = \begin{cases} 2, s_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ {}^{1}/_{s_2}, s_2 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases} \qquad BR_2(s_1) = \begin{cases} 2, s_1 \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ {}^{1}/_{2s_2}, s_2 \in \left(\frac{1}{4}, 2\right] \end{cases}$$

Для части стратегий игроков наилучшие ответы остались теми же, а для части – «вышли на ограничения». И именно на той части функций наилучшего ответа, где ограничение множества стратегий «активно», и «появилось» равновесие, которого в случае неограниченных множеств стратегий не было (Рисунок 5.3б).

В завершение рассмотрения настоящего примера заметим, что при использовании в качестве множеств стратегий игроков открытых, но ограниченных множеств – интервалов $S_1 = S_2 = (0,2)$ – появившееся равновесие «исчезает». Дело в том, что в «одномерном» случае компактность множества стратегий эквивалентна его одновременной замкнутости и ограниченности. Как мы увидели из настоящего Примера, оба этих требования являются существенными, и отказа от хотя бы одного из них достаточно для того, чтобы ситуации равновесия по Нэшу в игре не существовало, даже несмотря на строгую вогнутость функций выигрыше игроков. ■

Для поиска равновесий в приведенных примерах использовался подход, основанный на построении функций/отображений наилучшего ответа и поиске стационарной точки многомерного отображения наилучшего ответа. Этот метод является основным способом поиска ситуаций равновесия в играх общего вида. Иными словами, в конечном счете поиск равновесия Нэша сводится к решению системы уравнений или, в более общем случае, вложений, получаемых из условий первого порядка максимума для функции выигрыша каждого игрока. При этом функция/отображение наилучшего ответа игрока i является ничем иным, как отображением, ставящим в соответствие каждому возможному набору s_{-i} такое значение s_i, при котором условия первого порядка для максимума выполнены.

Для игрока $i \in I$ отображение наилучших ответов $U^i(s)$, упоминавшееся в доказательстве **Теорема 5.1**, фактически зависит от s_{-i} и определяет множество его наилучших ответов на стратегии партнеров. Поиск равновесий Нэша сводится к решению относительно вектора переменных $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ системы уравнений:

$$s_i = U^i(s_{-i}), i = 1, \dots, N$$

В наиболее простом случае, когда игроков всего двое, в эту систему войдут всего два уравнения:

$$\begin{cases} s_1 = U^1(s_2) = \operatorname*{Argmax}_{x \in S_1} u_1(x, s_2) \\ s_2 = U^2(s_1) = \operatorname*{Argmax}_{y \in S_2} u_2(s_1, y) \end{cases}$$

В силу своей малой размерности эта система может иметь достаточно простое решение для довольно широкого класса функций выигрыша. С другой стороны, решению этой системы можно придать весьма наглядную геометрическую интерпретацию – аналогично тому, как это делалось для поиска смешанных равновесий в биматричных играх 2x2. В частности для класса игр «на прямоугольнике», в которых множества стратегий обоих игроков – отрезки числовой прямой ($S_i = [c_i, d_i] \subset \mathbb{R}, i = \{1,2\}$), то достаточно построить в прямоугольнике $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ графики $U^1(s_2)$ и $U^2(s_1)$ и найти их пересечения.

Как уже говорилось, здесь наблюдается полная аналогия с обсужденным ранее в настоящем пособии методом поиска смешанных равновесий в биматричных играх 2x2. На самом деле, это не только не совпадение, даже само слово «аналогия» здесь не совсем применимо. Это тот же самый метод! В самом деле, в смешанном расширении биматричной игры функции выигрыша игроков $A(p,q), B(p,q)$ представляют собой матожидание выигрыша, а стратегии p и q – это вероятности выбора каждым из игроков первой из двух его чистых стратегий. Имеем:

$$A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q)$$

$$B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q)$$

Эти функции линейны по каждой из переменных – то есть не просто квазивогнуты, но даже вогнуты. Множества стратегий обоих игроков – единичные интервалы: $p, q \in [0,1]$. Следовательно, условия **Теорема 5.1** применимы, а указанный общий метод поиска равновесий Нэша превращается в уже знакомый нам метод поиска смешанных равновесий биматричной игры 2x2.

Пример 5.3. Проиллюстрируем на примере предложенный метод поиска равновесия в непрерывной игре на прямоугольнике. Рассмотрим игру двух лиц $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$. Здесь X, Y - $-$ множества стратегий первого и второго игроков, а $F(x,y)$ и $G(x,y)$ - их функции выигрыша. Пусть множества стратегий игроков одинаковы: $X = Y = [0,1]$, а выигрыши задаются следующими функциями:

$$F(x,y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy$$

$$G(x,y) = -(x + y - 1)^2$$

Начнем решение с проверки условий **Теорема 5.1**. Обе функции вогнуты по «своим» переменным – значит, по крайней мере одно равновесие есть.

Теперь перейдем к поиску равновесий. Найдем функции наилучших ответов игроков на стратегии их соперников. У первого игрока:

$x^*(y) = \begin{cases} \frac{7}{6}y, \text{если } 0 \le y \le \frac{6}{7} \\ 1, \text{если } y > \frac{6}{7} \end{cases}$, у второго игрока $y^*(x) = 1 - x$.

Решая систему $\begin{cases} x^*(y) = x \\ y^*(x) = y \end{cases}$, находим решение – равновесие Нэша. На координатной плоскости это решение является точкой пересечения графиков функций наилучших ответов игроков (см. Рисунок 5.4).

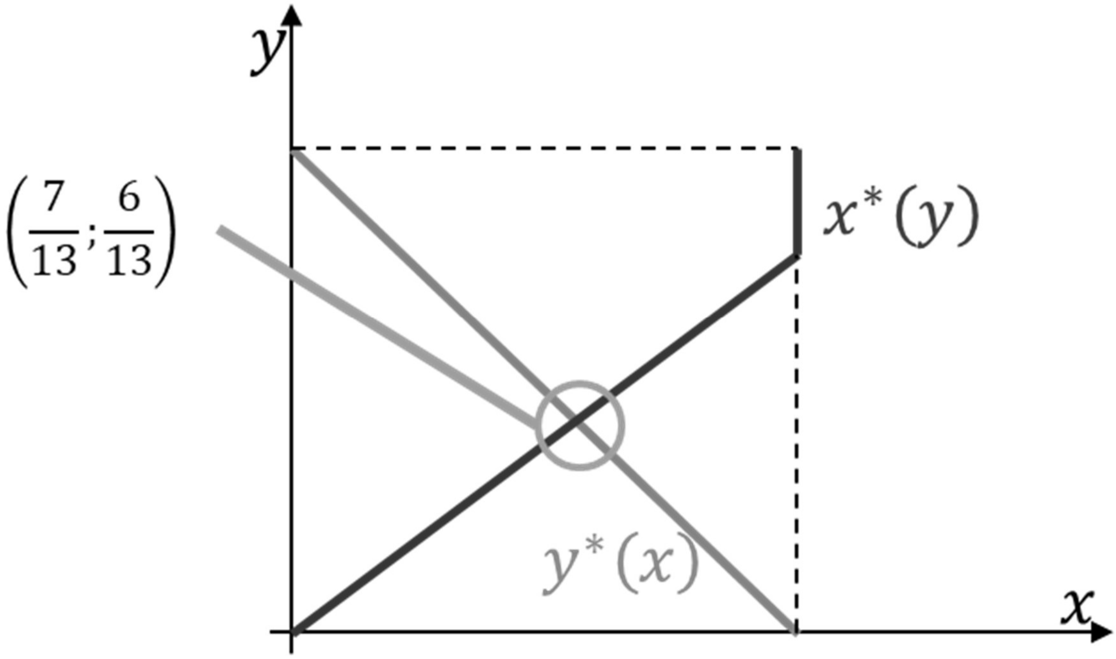


Рисунок 5.4. Иллюстрация равновесия в Пример 5.3

5.2. Смешанное расширение непрерывных игр. Результат для антагонистического случая.

Значимость и мощь **Теорема 5.1** сложно переоценить. Она гарантирует существование чистых равновесий Нэша для широкого класса непрерывных игр. На ней базируется **Теорема 3.1**, которая и вовсе постулирует, что в любой конечной игре заведомо существует равновесие – по крайней мере, смешанное.

Тем не менее, как показывают **Пример 5.1** и **Пример 5.2**, теорема существования равновесий не гарантирует существования решения для громадного класса игровых моделей. Более того, даже при весьма разумном виде множеств стратегий и функций выигрыша равновесие Нэша в смысле **Определение 2.5** не существует вовсе. «Что же делать?» - спросил бы читатель, открывший данную книгу сразу на разделе 5. «Возможно, надо попробовать построить смешанное расширение для игры с континуальными множествами стратегий игроков,» - ответил бы ему другой читатель, помнящий схему исследования равновесий в конечных играх. Действительно, **Определение 3.5** можно переформулировать, исключив из него словосочетание «конечная игра». Понимая под смешанной стратегией игрока в произвольной игре вероятностное распределение на исходном множестве стратегий, получим следующие формулировки.

Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ – игра в нормальной форме, где $I = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков ($n \geq 2$), $S = \otimes_{i=1}^{n} S_i$ – множество ситуаций в игре, S_i – множество чистых стратегий каждого игрока $i \in I$, $u = \big(u_1(s), \dots, u_n(s)\big) \colon S \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция выигрышей всех игроков во всех ситуациях игры.

Определение 5.9. Смешанной стратегией игрока i в игре Γ называется борелевская вероятностная мера σ_i на множестве элементарных событий S_i. Множество всех возможных подобных мер Δ_i есть множество смешанных стратегий игрока i.

Это определение включает в себя и более ранние, «идейные» определения смешанных стратегий. В самом деле, для игрока с m стратегиями множество Δ_i есть симплекс размерности $m - 1$. Для игрока, выбирающего чистые стратегии из отрезка $[a, b]$ смешанная стратегия задается функцией распределения случайной величины, принимающей значения из этого отрезка. Любая неубывающая полунепрерывная справа функция, определенная на числовой прямой и удовлетворяющая условиям: $\sigma(x) = 0$ при $x < a$ и $\sigma(x) = 1$ при $x > b$, является функцией распределения вероятности некоторой случайной величины, принимающей значения из множества чистых стратегий игрока и потому может порождать смешанную стратегию. При использовании смешанной стратегии σ чистая стратегия x выбирается как реализация случайной величины ξ, для которой вероятность наступления события $\{\xi \leq x\}$ равна $\sigma(x)$ при любом x. Поэтому далее будем отождествлять смешанную стратегию игрока и функцию распределения, ее порождающую, и будем писать просто «смешанная стратегия $\sigma(x)$».

Приведем несколько примеров.

Пример 5.4. Пусть $X = [0,1]$ – множество стратегий игрока. Пусть $c(x)$ – неубывающая дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[\lambda, 1]$, где $0 < \lambda < 1$, такая, что $c(1) = 1, c(\lambda) = \alpha + \beta \in [0,1]$, где $\alpha, \beta > 0$. Определим функцию распределения $\varphi_0(x)$ на отрезке $[0,1]$, соответствующую смешанной стратегии игрока, следующим образом:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \beta, & 0 \leq x < \lambda \\ c(x), & \lambda \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Функция распределения $\varphi_0(x)$ имеет два скачка величиной β и α в точках 0 и λ соответственно и плотность распределения $c'(x)$ на отрезке $[\lambda, 1]$.

Пусть η – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$. Тогда случайной величиной, реализующей смешанную стратегию $\varphi_0(x)$, является ξ:

$$\xi = \begin{cases} 0, & 0 \leq \eta \leq \beta \\ \lambda, & \beta < \eta \leq \beta + \alpha \\ c^{-1}(\eta), & \beta + \alpha < \eta \leq 1 \end{cases}$$

Действительно, при любом $x \in [0,1]$ справедливо: $P(\xi \leq x) = \varphi_0(x)$. Интеграл Стилтьеса от любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $h(x)$ по функции распределения $\varphi_0(x)$ вычисляется по формуле:

$$\int_0^1 h(x)d\varphi_0(x) = \beta h(0) + \alpha h(\lambda) + \int_\lambda^1 h(x)c'(x)dx$$

Каждое из первых двух слагаемых представляет собой произведение величины скачка функции распределения $\varphi_0(x)$ на значение интегрируемой функции $h(x)$ в точке скачка, а третье слагаемое – «обычный» интеграл Римана, взятый по отрезку, где плотность распределения $c'(x)$ положительна. ■

Важнейший класс смешанных стратегий связан с вероятностными мерами, сосредоточенными в конечном числе точек. Как мы с вами увидим позднее, именно подобные меры порождают смешанные стратегии, входящие в равновесия Нэша смешанных расширений многих игр, не имеющих решений в чистых стратегиях.

Пример 5.5. Пусть X − выпуклый компакт евклидова пространства. В этом случае вероятностная мера, сосредоточенная в конечном числе точек $x_1, \dots, x_m$ множества X (атомов), имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \mathbb{I}_{x_i}(x), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, x_i \in X, i = 1, \dots, m,$$

где $\mathbb{I}_{x_i}(x)$ – индикаторная функция для точки x_i:

$$\mathbb{I}_{x_i}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}.$$

Для любого борелевского множества $B \subset X$ вероятность реализации чистой стратегии из него есть $\varphi(B) = \sum_{i:x_i \in B} p_i$ – сумма тех p_i, которые соответствуют атомам x_i, лежащим в множестве B. При использовании смешанной стратегии φ с вероятностью p_i выбирается чистая стратегия $x_i, i = 1, \dots, m$, а прочие элементы множества X не выбираются. Интеграл от непрерывной функции $h(x)$ по рассматриваемой мере имеет вид

$$\int_X h(x) d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i h(x_i) . \blacksquare$$

Как и в случае конечных игр, где всякая чистая стратегия рассматривалась как частный случай смешанной, можно и для непрерывных игр общего вида считать, что у любого игрока $S_i \subset \Delta_i$. Действительно, любую чистую стратегию $s_i \in S_i$ можно отождествить с вероятностной мерой $\mathbb{I}_{s_i}(x)$. Если множество S_i конечно, то выбор чистой стратегии k эквивалентен выбору смешанной стратегии $p = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на -м месте, а при $S_i = [a, b]$ стратегию $s_i \in [a, b]$ можно отождествить с функцией распределения, имеющей скачок 1 в точке s_i.

Обсудив, что же можно считать смешанной стратегией игрока в непрерывной игре общего вида, мы наконец можем сформулировать определение смешанного расширения самой игры. Основный принцип здесь тот же, что и при построении смешанного расширения конечной игры – вместо множества чистых стратегий используются множества вероятностных распределений на них, а вместо выигрышей – их математическое ожидание. Формализуем этот принцип.

При заданном профиле смешанных стратегий игроков $\sigma = (\sigma_1(s), \dots, \sigma_n(s))$ математическое ожидание выигрыша игрока i можно определить как

$$\overline{u}_i(\sigma) = \int_{S_1}\int_{S_2} \dots \int_{S_n} u_i(s_1, s_2, \dots, s_n) d\sigma_n(s_n) \dots d\sigma_2(s_2) d\sigma_1(s_1)$$

Определение 5.10. Игра $\overline{\Gamma} = \langle I, \Delta, \overline{u}\rangle$ является смешанным расширением непрерывной игры $\Gamma = \langle I, S, u\rangle$, где $\Delta = \otimes_{i=1}^{n} \Delta_i$ – множество профилей смешанных стратегий, $\overline{u}(\sigma) = (\overline{u}_1(\sigma), \dots, \overline{u}_n(\sigma))$ – вектор-функция ожидаемых выигрышей игроков: $\overline{u}\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$.

Теперь сформулируем определение равновесия Нэша в смешанных стратегиях для непрерывной игры.

Определение 5.11. Профиль смешанных стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ является смешанным равновесием Нэша в игре Γ, если он представляет собой равновесие в игре $\overline{\Gamma}$. Иными словами, если для любого игрока i величина $\overline{u}_i(\sigma^*) = \overline{u}_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) > \overline{u}_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$ для любой борелевской меры σ_i на S_i.

Опираясь на обобщенный вариант теоремы Какутани для Хаусдорфовых пространств, Ирвин Гликсберг доказал в 1952 году замечательную теорему о существовании смешанных равновесий для непрерывных игр. Примем ее без доказательства, так как оно основано на достаточно громоздких и сложных топологических выкладках.

Теорема 5.3 (Гликсберг, 1952). Пусть у всех игроков в игре $\Gamma = \langle I, S, u\rangle$ множества чистых стратегий S_i компактны, а функции выигрыша непрерывны. Тогда в игре Г существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Поиск равновесия Нэша для непрерывных игр общего вида весьма сложен и основан, вообще говоря, на построении функционалов наилучшего ответа методами вариационного исчисления. Тем не менее, в классе антагонистических игр поиск решения в виде седловой точки может быть формализован более просто.

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$, где X, Y – множества стратегий первого и второго игроков соответственно, $F(x, y)$ – функция выигрыша первого игрока (соответственно, выигрыш второго равен $-F(x, y)$). Множество смешанных стратегий первого игрока обозначим $\{\varphi\}$, второго - $\{\psi\}$. При заданных значениях φ и ψ ожидаемый выигрыш первого игрока есть двойной интеграл (при условии, что он существует):

$$F(\varphi, \psi) = \int_X \int_Y F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y). \qquad 5.1$$

Ограничимся игрой на прямоугольнике $X \times Y = [a, b] \times [c, d]$, тогда интеграл 5.1 примет вид:

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y)$$

Этот двойной интеграл от непрерывной функции $F(x, y)$ существует. Согласно теореме Фубини он равен повторному:

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b F(x, \psi) d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi, y) d\psi(y),$$

где

$$F(x,\psi) = \int_c^d F(x,y)d\psi(y)\,;\ F(\varphi,y) = \int_a^b F(x,y)d\varphi(x)$$

В игре $\overline{\Gamma}$ заведомо существует равновесие Нэша. В отличие от общего случая, доказать это для антагонистического случая можно менее громоздко. Нам понадобится вспомнить Первую теорему Хелли из теории вероятностей (“Helly’s selection theorem” в англоязычной литературе). В классической формулировке она звучит так: «Из всякой последовательности функций распределения $\{F_x\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность». Применительно к задаче поиска смешанного равновесия это утверждение понадобится нам в следующей постановке.

Теорема 5.4 (Первая теорема Хелли). Множество смешанных стратегий $\{\varphi\}$ на отрезке $[a,b]$ является слабым компактом. Это означает, что из любой последовательности смешанных стратегий $\{\varphi_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{k_l}\}$, слабо сходящуюся к некоторой стратегии φ_0, т.е. такую, что для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $h(x)$ выполнено:

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^b h(x)d\varphi_{k_l}(x) = \int_a^b h(x)d\varphi_0(x)$$

Доказательство существования смешанного равновесия в непрерывных антагонистических играх на прямоугольнике опирается на Теорему о существовании седловой точки (Теорема 2.1). Для начала докажем пару вспомогательных утверждений.

Лемма 5.2 (о существовании максимина). В непрерывной антагонистической игре Г на прямоугольнике существуют максиминные смешанные стратегии игроков.

Доказательство. Рассмотрим наилучшие гарантированные результаты игроков ($\underline{v}_1 = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) = \underline{v}$ для первого и $\underline{v}_2 = \sup\limits_{\psi\in\{\psi\}} \inf\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \big(-F(\varphi,\psi)\big) = \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi) = \overline{v}$) и докажем, что внешние $\sup$ и $\inf$ в них достигаются.

Так как $\underline{v}$ есть точная верхняя грань, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой ϕ, что $\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\phi,\psi) \geq \underline{v} - \varepsilon$. Следовательно, найдется такая последовательность смешанных стратегий $\{\varphi_k\}$, что $\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi_k,\psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \to 0+$ - некоторая сходящаяся к нулю последовательность положительных величин. Иначе записывая это неравенство, имеем:

$$\int_X F(x,\psi)d\varphi_k(x) \geq \underline{v} - \varepsilon_k\ \forall\psi \in \{\psi\}, k = 0,1,2,\ldots \qquad 5.2$$

В соответствии с Первой теоремой Хелли выделим из $\{\varphi_k\}$ подпоследовательность $\{\varphi_{k_l}\}$, слабо сходящуюся к смешанной стратегии φ_0. Заметим, что при фиксированной стратегии ψ функция $F(x,\psi)$ непрерывна по x. Переходя в 5.2 к пределу по подпоследовательности $\{k_l\}$, получим $F(\varphi_0,\psi) \geq \underline{v}\ \forall\psi \in \{\psi\}$. Отсюда $\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi_0,\psi) \geq \underline{v}$, но $\underline{v} = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$ – точная верхняя грань! Выполнение обоих условий возможно лишь тогда, когда $\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi_0,\psi) = \underline{v}$, и φ_0 – максиминная смешанная стратегия первого игрока. Аналогично доказывается существование максиминной смешанной стратегии второго игрока. ■

Лемма 5.3 (о приближении игры). Рассмотрим две антагонистические игры $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y)\rangle$ и $\Gamma = \langle X, Y, \tilde{F}(x,y)\rangle$, в которых функции $F(x,y)$ и $\tilde{F}(x,y)$ ограничены на $X \times Y$ и при $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\left|F(x,y) - \tilde{F}(x,y)\right| \leq \varepsilon \ \forall (x,y) \in X \times Y$$

Тогда $\left|\underline{v} - \underline{\tilde{v}}\right| < \varepsilon$, $\left|\overline{v} - \overline{\tilde{v}}\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Для всякого $x \in X$ справедливы неравенства

$$\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} \tilde{F}(x,y) \geq \inf_{y \in Y} \left(F(x,y) - \tilde{F}(x,y)\right) \geq -\varepsilon$$

Можно получить аналогичные неравенства, меняя местами функции

$F(x,y)$ и $\tilde{F}(x,y)$. В результате находим, что

$$\left|\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} \tilde{F}(x,y)\right| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in X$$

Далее,

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) - \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \tilde{F}(x,y) \leq \sup_{x \in X} \left(\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} \tilde{F}(x,y)\right) \leq \varepsilon.$$

Как и выше, находим, что $\left|\underline{v} - \underline{\tilde{v}}\right| < \varepsilon$. Аналогично доказывается и неравенство $\left|\overline{v} - \overline{\tilde{v}}\right| < \varepsilon$. ■

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать и доказать основную теорему существования равновесия в непрерывных антагонистических играх.

Теорема 5.5. Всякая непрерывная игра Γ на прямоугольнике имеет решение в смешанных стратегиях**.**

Доказательство. В антагонистической игре, как обсуждалось в разделе 2, аналогом равновесия является седловая точка. Согласно теореме о седловой точке (Теорема 2.1) для доказательства ее наличия достаточно доказать равенство величин $\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi,\psi) =$

$\underline{v}$ и $\min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \overline{v}$. Обратите внимание, что здесь внешние наибольшие значения достижимы (Лемма 5.2 доказывает это), а потому мы имеем право заменить $\sup$ и $\inf$ на $\max$ и $\min$ соответственно. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $F(x, y)$ следует существование такого разбиения отрезка $X = [a, b]$ на непересекающиеся промежутки (отрезок и полуинтервалы) $X_i, i = 1, \ldots, m$ и такого разбиения отрезка $Y = [c, d]$ на аналогичные промежутки $Y_j, j = 1, \ldots, n$, что

$$|F(x, y) - F(x', y')| \le \varepsilon \; \forall (x, y), (x', y') \in X_i \times Y_j \; \forall i, j.$$

Для любых i, j возьмем точки $x_i \in X_i, y_j \in Y_j$ и определим ступенчатую функцию $F_a(x, y) = F(x_i, y_j) \quad \forall (x, y) \in X_i \times Y_j,\ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Эта ступенчатая функция аппроксимирует исходную функцию выигрыша с точностью ε: для любого профиля стратегий $(x, y) \in X \times Y$ $|F(x, y) - F_a(x, y)| \le \varepsilon$. Исходная непрерывная игра Г фактически приближена матричной игрой с матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$, где $a_{ij} = F(x_i, y_j)$.

Всякой смешанной стратегии φ поставим в соответствие вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$:

$$p_i = \int_{X_i} d\varphi(x)\,, i = 1, \ldots, m.$$

Фактически, каждое p_i суть вероятность попадания реализации смешанной стратегии в множество X_i (то есть мера множества X_i). Очевидно, что p является смешанной стратегией первого игрока в матричной игре, т.е. $p \in P$. Построенное отображение $\mathcal{P}: \{\varphi\} \to P$ является отображением **на** P, то есть сюръекцией. Действительно, для любой стратегии $p \in P$ функция распределения φ со скачками p_i в точках x_i является прообразом p при отображении $\mathcal{P}$. Аналогично

определяется отображение $\mathcal{Q}: \{\psi\} \to Q$, где Q − множество смешанных стратегий второго игрока матричной игры. Для любых стратегий φ, ψ и соответствующих стратегий $p = \mathcal{P}(\varphi)$, $q = \mathcal{Q}(\psi)$ справедлива цепочка равенств:

$$F_a(\varphi,\psi) = \int_a^b \int_c^d F_a(\varphi,\psi) d\psi(y) d\varphi(x) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i F(x_i, y_j) q_j = A(p,q) \qquad 5.3$$

Так как по построению разбиения $\forall (x,y) \in X \times Y \;\; |F(x,y) - F_a(x,y)| \leq \varepsilon$, то

$$|F(\varphi,\psi) - F_a(\varphi,\psi)| = \left| \int_a^b \int_c^d \big(F(\varphi,\psi) - F_a(\varphi,\psi)\big) d\psi(y) d\varphi(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \int_c^d |F(\varphi,\psi) - F_a(\varphi,\psi)| d\psi(y) d\varphi(x) \leq \int_a^b \int_c^d \varepsilon d\psi(y) d\varphi(x) = \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что для функций $F(\varphi,\psi)$ и $F_a(\varphi,\psi)$ выполнены условия леммы о приближении игры (Лемма 5.3). Из нее вытекают неравенства:

$$\left| \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi,\psi) - \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{\psi \in \{\psi\}} F_a(\varphi,\psi) \right| \leq \varepsilon \\ \left| \min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi,\psi) - \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F_a(\varphi,\psi) \right| \leq \varepsilon \qquad 5.4$$

Согласно Теореме Нэша – основной теореме конечных игр (Теорема 3.1) – в любой биматричной игре существует смешанное равновесие. Следовательно, в построенной антагонистической матричной игре с матрицей выигрыша A – тоже. Так как смешанным равновесием в ней является седловая точка функции $A(p,q)$, выполнены условия теоремы о седловой точке (Теорема 2.1), и $\max_{p\in P}\min_{q\in Q} A(p,q) = \min_{q\in Q}\max_{p\in P} A(p,q)$. Отсюда с учетом равенства 5.3 следует: $\max_{\varphi\in\{\varphi\}}\min_{\psi\in\{\psi\}} F_a(\varphi,\psi) = \max_{p\in P}\min_{q\in Q} A(p,q) = \min_{q\in Q}\max_{p\in P} A(p,q) = \min_{\psi\in\{\psi\}}\max_{\varphi\in\{\varphi\}} F_a(\varphi,\psi)$. Если учесть результат 5.4, то получаем в итоге, что $|\underline{v}-\overline{v}| \le \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\underline{v} = \overline{v}$, что, в соответствии с результатом Теорема 2.1 и означает наличие равновесия в исходной игре. ■

Так как нам удалось доказать существование смешанного равновесия в непрерывной антагонистической игре, аппроксимируя ее матричной игрой, разумно ожидать, что какие-то свойства смешанных равновесий конечных игр, исследованные в главе 4, окажутся справедливыми и в непрерывном случае. Действительно, «непрерывными аналогами» обладают **Теорема 3.2** и **Теорема 3.3**.

Теорема 3.3’. Для непрерывной игры Г справедливы следующие два утверждения:

1. $\inf_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi) = \min_{y\in Y} F(\varphi,y)\ \forall\varphi\in\{\varphi\}$;
2. $\sup_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) = \max_{x\in X} F(x,\psi)\ \forall\psi\in\{\psi\}$.

Здесь запись $F(\varphi,y)$ $(F(x,\psi))$ используется для математического ожидания выигрыша первого игрока в ситуации, когда он использует смешанную стратегию φ, а второй игрок – чистую стратегию y (соответственно, чистую стратегию x и смешанную стратегию ψ).

Свойство, аналогичное свойству дополняющей нежесткости, также оказывается справедливо для непрерывной игры. Для его формулировки введем понятие спектра $Sp(\varphi) \subset X$ смешанной стратегии.

Определение 5.12. Точка $x' \in X$ ($y' \in Y$) принадлежит спектру смешанной стратегии φ (ψ), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой отрезок $[a', b'] \subset X$ (соответственно, $[c', d'] \subset Y$), содержащий x' (y'), что $b' - a' < \varepsilon$ и $\varphi(b') - \varphi(a') > 0$ (соответственно, $d' - c' < \varepsilon$ и $\psi(d') - \psi(c') > 0$). Множество всех точек спектра обозначается $Sp(\varphi)$ ($Sp(\psi)$).

Теорема 3.2' (Свойство дополняющей нежесткости для непрерывной игры). Пусть (φ_0, ψ_0) – решение непрерывной антагонистической игры в смешанных стратегиях. Тогда:

1. $x \in Sp(\varphi_0) \Rightarrow F(x, \psi_0) = v$;
2. $y \in Sp(\psi_0) \Rightarrow F(\varphi_0, y) = v$.

В завершение настоящего раздела рассмотрим один важный класс антагонистических непрерывных игр, для которых поиск смешанного равновесия является задачей, вычислимой «вручную». Это антагонистические игры с функцией выигрыша постоянного направления выпуклости – «антагонистический вариант» игр с (квази)вогнутыми функциями выигрыша. Так, ключевая Теорема 5.1 касалась неантагонистических игр, в которых функции выигрыша игроков обладали свойством (квази)вогнутости по «своему» аргументу, т.е. по стратегии данного игрока. Далее мы рассматриваем антагонистические игры, обладающие похожим свойством.

Пусть множества стратегий первого и второго игроков есть компактные подмножества евклидовых пространств размерностей m и n соответственно: $X \subset E^m, Y \subset E^n$. Если функция $F(x, y)$ выигрыша первого игрока в непрерывной антагонистической игре $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$ является вогнутой по x при любом $y \in Y$, то ее называют **игрой с вогнутой функцией выигрыша**. Аналогичное свойство для второго игрока – вогнутость его выигрыша по его стратегии – в терминах функции $F(x, y)$ означает ее выпуклость по y при любом $x \in X$. Такие игры называются **играми с выпуклой функцией выигрыша**.

Для таких игр поиск равновесия в смешанных стратегиях оказывается более простым, чем ожидается – вместо оптимизации по множествам функций распределения $\{\varphi\}$ и $\{\psi\}$ он сводится к задаче конечномерной ограниченной оптимизации. Для того, чтобы сформулировать алгоритм решения подобных задач, нам понадобится еще одна теорема, как и Теорема 5.4 носящая имя Эдуарда Хелли. Примем ее без доказательства, найти его можно в большинстве учебников по выпуклому анализу.

Теорема 5.6 (Хелли). Пусть $\{X_\alpha\}$ есть произвольное семейство выпуклых компактных подмножеств евклидова пространства размерности l E^l, такое что пересечение любых $l + 1$ из них непусто. Тогда пересечение всех подмножеств из этого семейства непусто.

Пользуясь данной теоремой, можно доказать следующее важное утверждение о значении игры с вогнутой функцией выигрыша.

Теорема 5.7. Для игры Г с вогнутой функцией выигрыша справедливо равенство:

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y) = \min_{\substack{y^j \in Y \\ j=1,\dots,m+1}} \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m} F\left(x, y^j\right)$$

Доказательство. Обозначим $w = \min_{\substack{y^j \in Y \\ j=1,\dots,m+1}} \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m} F\left(x, y^j\right)$.

Рассмотрим произвольный набор чистых стратегий второго игрока $y^j \in Y, j = 1, \dots, m+1$, для него справедливо: $\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m} F\left(x, y^j\right) \ge w$. Следовательно, найдется такая стратегия $x \in X$ первого игрока, что $F\left(x, y^j\right) \ge w$, $j = 1, \dots, m+1$. Рассмотрим систему множеств $\left\{D_y\right\}$, каждый элемент которой представляет собой множество вида $D_y = \{x \in X \,|F(x,y) \ge w\}$. В силу вогнутости $F(x,y)$ по x все эти множества представляют собой выпуклые компакты в пространстве E^m. Поскольку $F\left(x, y^j\right) \ge w$ для произвольного набора $\left\{y^j\right\}_{j=1,\dots,n}$, то $\bigcap_{j=1}^{m+1} D_{y^j} \ne \emptyset$ для любых $y^1, \dots, y^{m+1} \in Y$. Таким образом, построена система подмножеств евклидова пространства, удовлетворяющая условиям Теоремы Хелли. Следовательно, пересечение сразу всех D_y, $y \in Y$ непусто:

$$\exists x \in \bigcap_{y \in Y} D_y \Longrightarrow F(x,y) \ge w \;\forall y \in Y \;\Longrightarrow \min_{y \in Y} F(x,y) \ge w.$$

Последнее неравенство означает, что и $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y) \ge w$. Но по определению $\underline{v} \le w$, следовательно, $\underline{v} = w$. ■

Обозначим Q^{m+1} m-мерный симплекс вида $Q^{m+1} = \{q \in E^{m+1} | \sum_{j=1}^{m+1} q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, m+1\}$. Следующая теорема говорит о том, что поиск смешанного равновесия в антагонистической игре с вогнутой функцией выигрыша сводится к решению нескольких задач многомерной ограниченной оптимизации – вместо задачи вариационного исчисления.

Теорема 5.8. Игра Г с вогнутой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида $(x_0, \psi_0, \underline{v})$, где x_0 – чистая максиминная стратегия первого игрока, смешанная стратегия второго игрока ψ_0 определяется следующим образом:

$$\psi_0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 \mathbb{I}_{\overline{y}_j}, (q_1^0, \dots, q_{m+1}^0) = q_0 \in Q^{m+1}$$

$$\left(\overline{y}_j, j = 1, \dots, m+1\right) \in \operatorname{Arg} \min_{\substack{y^j \in Y \\ j=1,\dots,m+1}} \max_{x \in X} \min_{1 \leq j \leq m} F\left(x, y^j\right),$$

а q_0 – решение задачи оптимизации

$$\min_{q \in Q^{m+1}} \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{m+1} q_j F\left(x, \overline{y}_j\right).$$

Доказательство опирается на три доказанные выше теоремы (Теорема 5.7, Теорема 5.5 и Теорема 2.1) и предоставляется читателю в качестве самостоятельного упражнения. Важное замечание по поводу Теорема 5.8 заключается в том, что для игр с выпуклой функцией выигрыша справедлив ее аналог, связывающий решение в смешанных стратегиях с максиминной стратегией второго игрока. Аналогично множеству Q^{m+1} введем множество $P^{n+1} = \{p \in E^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1\}$.

Теорема 5.8'. Игра Г с выпуклой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi_0, y_0, \overline{v})$, где y_0 – чистая максиминная стратегия второго игрока, смешанная стратегия первого игрока φ_0 определяется следующим образом:

$$\varphi_0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 \mathbb{I}_{\overline{x}_i}, (p_1^0, \dots, p_{n+1}^0) = p_0 \in P^{n+1}$$

$$(\overline{x}_i, i = 1, \dots, n+1) \in \operatorname{Arg} \max_{\substack{x^i \in X \\ i=1,\dots,n+1}} \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} F(x^i, y),$$

а p_0 – решение задачи оптимизации

$$\max_{p \in P^{n+1}} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{n+1} p_i F(\overline{x}_i, y).$$

Таким образом, сформулированные Теоремы определяют, что решением антагонистических непрерывных игр с постоянным направлением выпуклости является набор из максиминной стратегии одного игрока (по стратегии которого функция вогнута функция его выигрыша) и смешанной стратегии другого игрока вида, аналогичного приведенному в Пример 5.5: он играет с ненулевыми вероятностями лишь конечное число стратегий (на единицу большее размерности его множества стратегий). Рассмотрим на примере, как пользоваться Теорема 5.8.

Пример 5.6. Пусть $X = Y = [0,1]$, а $F(x,y) = -(x-y)^2$. Это игра с вогнутой функцией выигрыша. Ее значение $v = \underline{v} = \max_{0 \le x \le 1} \min_{0 \le y \le 1} [-(x-y)^2]$. Для фиксированного x минимум $\min_{0 \le y \le 1} [-(x - y)^2]$ достигается на наиболее удаленном от x конце интервала $[0,1] \Leftrightarrow y(x) = 0$ при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = 1$ при $x \in [0, 1/2]$. Тогда

Теперь найдем смешанную стратегию ψ_0 второго игрока, которая имеет вид $\psi_0 = q_1^0 \mathbb{I}_{\bar{y}_1} + q_2^0 \mathbb{I}_{\bar{y}_2}$, где $q_1^0 + q_2^0 = 1$, $q_1^0, q_2^0 \geq 0$, $0 \leq \bar{y}_1 \leq \bar{y}_2 \leq 1$. Второй игрок, множество стратегий которого одномерно (просто отрезок, $\dim Y = 1$), выбирает две ($\dim Y + 1$) «опорных» чистых стратегии из этого интервала, которые играет с вероятностями q_1^0 и q_2^0.

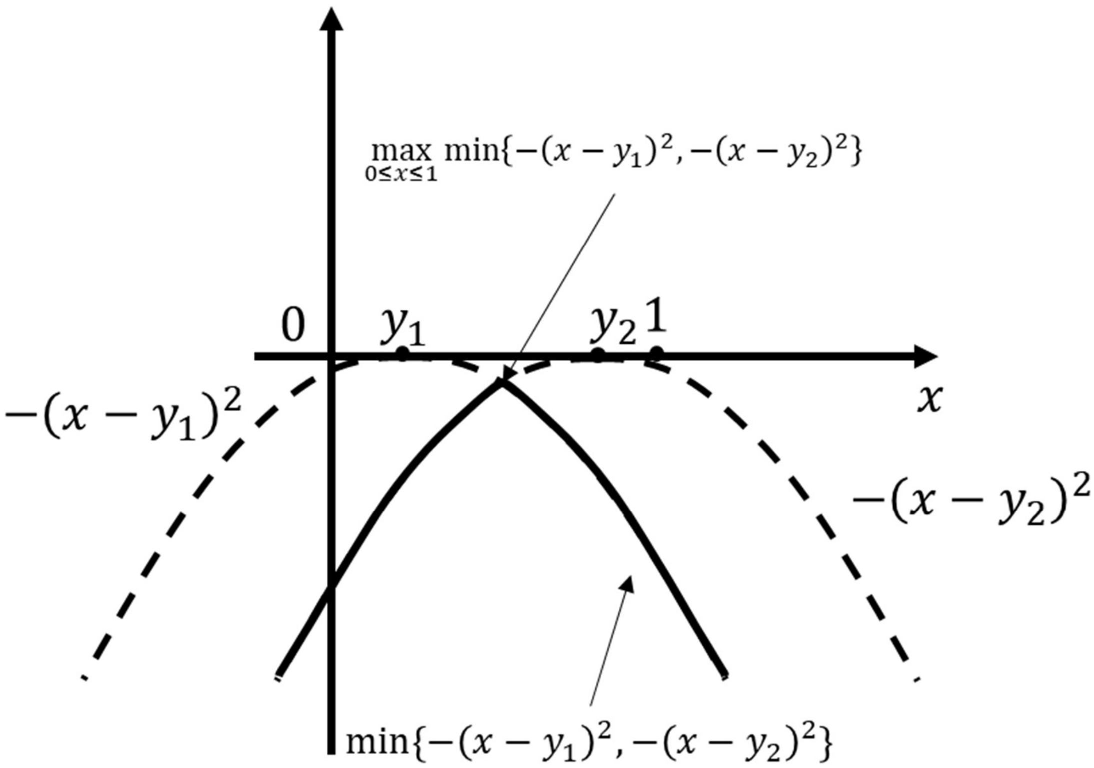


Рисунок 5.5. Иллюстрация к **Пример 5.5**. Вершина графика, изображенного сплошной линией, - искомый максимин.

Чтобы определить «опорные» чистые стратегии $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ найдем величину $w = \min_{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} \min\{F(x, y_1), F(x, y_2)\}$. При фиксированных y_1 и y_2 внутренний максимум имеет вид $\max_{0 \leq x \leq 1} \min\{-(x-y_1)^2, -(x-y_2)^2\}$. Он достигается при том значении x, при котором $(x-y_1)^2 = (x-y_2)^2$ (Рисунок 5.5). Так как $y_2 \geq y_1$, то искомый максимин достигается при $x = (y_2 + y_1)/2$ и равен $-(y_2 - y_1)^2/4$. Тогда:

$$w = \min_{0 \le y_1 \le y_2 \le 1} (-(y_2 - y_1)^2/4) = 3/4\,;\ \overline{y}_1 = 0, \overline{y}_2 = 1.$$

Осталось найти вероятности q_1^0 и q_2^0. Решим для этого задачу:

$$\min_{0 \le q_1 \le 1} \max_{0 \le x \le 1} \Phi(x, q) = \min_{0 \le q_1 \le 1} \max_{0 \le x \le 1} \big(q_1 F(x, 0) + (1 - q_1) F(x, 1)\big) =$$

$$= \min_{0 \le q_1 \le 1} \max_{0 \le x \le 1} (-q_1 x^2 - (1 - q_1)(1 - x)^2).$$

Внутренний максимум при фиксированном q_1 достигается, когда $\Phi'_x(x, q) = -2\big(q_1 x - (1 - q_1)(1 - x)\big) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - q_1$. Значит, $\max\limits_{0 \le x \le 1} \Phi(x, q) = -q_1(1 - q_1)$, а минимум этой функции по $q_1 \in [0,1]$ достигается при $q_1^0 = 1/2$. Таким образом, оптимальная смешанная стратегия второго игрока имеет вид $\psi_0 = \frac{1}{2}\mathbb{I}_0 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_1$: он с равными вероятностями может выбрать в качестве своей чистой стратегии любой из концов своего отрезка-множества чистых стратегий, и не выбирает ни одну из чистых стратегий из внутренних точек Y. ■

5.3. Некоторые известные игровые модели: «оборона-нападение», «дуэль», олигополия.

Рассмотрим еще несколько примеров непрерывных игр – но уже не на прямоугольнике, а с неограниченными множествами стратегий двух игроков. Первый такой пример - модель дуополии Курно, с которой некоторые из читателей наверняка сталкивались в рамках курса Микроэкономики. Более того, первой формальной задачей, исследованной с помощью нахождения равновесия, была именно модель конкуренции двух фирм на рынке бесконечно делимого однородного товара, предложенная французским экономистом и математиком А.А. Курно в XIX веке.

Пример 5.7 (модель олигополии Курно). Рассмотрим некий рынок, на котором работают две фирмы, они выпускают бесконечно делимый товар и продают его покупателям. Пусть x и y − количества товара, выпускаемого первой и второй фирмами, а $c_1, c_2 \geq 0$ − затраты на его производство, т.е. себестоимости единицы товара для обеих фирм. Покупатели предполагаются бесконечно малыми, а цена товара $p(x+y)$ зависит от общего выпуска $x+y$. Объем выпуск товара каждой фирмой есть ее стратегия. В наиболее простой модели предполагается, что у фирм нет производственных или иных ограничений на объем выпуска, так что множества стратегий у них не ограничены: $x, y \in [0, +\infty)$. Функции выигрыша фирм – это прибыль каждой из них от реализации произведенной продукции: $F(x,y) = (p(x+y) - c_1)x$ и $G(x,y) = (p(x+y) - c_2)y$. Пусть цена на продукцию является линейной функцией от общего объема товара, предлагаемого рынку обеими игроками: $p(x+y) = a - b \cdot (x+y)$. Подставив функцию цены (то есть обратную функцию спроса) в выражения для функций выигрыша, получим: $F(x,y) = (a - b \cdot (x+y) - c_1)x$; $G(x,y) = (a - b \cdot (x+y) - c_2)y$.

Мы получили непрерывную игру в нормальной форме с функциями выигрыша игроков, строго вогнутыми по их стратегиям. Однако говорить о заведомом существовании равновесия нельзя без дополнительных предположений об ограниченности производственных возможностей фирм – множества стратегий $x, y \in$

$[0, +\infty)$ не являются компактными. Тем не менее, в построенной модели равновесие Нэша существует, докажем это и изучим свойства получающихся равновесий. Для поиска ситуации равновесия применим не отображение наилучшего ответа, а условия первого порядка максимума вогнутой функции. Для этого потребуется рассмотреть четыре случая.

1. Пусть $x_0 > 0, y_0 > 0$. Тогда условия первого порядка представляют собой просто требования равенства нулю производных обеих функций выигрыша по «своим» аргументам:

$$F'_x(x, y) = a - 2bx_0 - by_0 - c_1 = 0$$

$$G'_y(x, y) = a - 2by_0 - bx_0 - c_2 = 0$$

Это система из двух линейных уравнений, которую можно легко решить. Выразим из первого уравнения y_0 и подставим во второе уравнение, получаем:

$$y_0 = \frac{a - 2bx_0 - c_1}{b} = \frac{a}{b} - 2x_0 - \frac{c_1}{b}$$

$$0 = a - 2by_0 - c_2 - bx_0 = a - 2b\left(\frac{a}{b} - 2x_0 - \frac{c_1}{b}\right) - c_2 - bx_0 =$$

$$= a - 2a + 4bx_0 + 2c_1 - c_2 - bx_0 =$$

$$= -a + 3bx_0 + 2c_1 - c_2$$

Отсюда получаем выражение для x_0: $x_0 = \frac{-2c_1 + c_2 + a}{3b}$. Для того, чтобы получить выражение для y_0 необходимо подставить это выражение в первое уравнение. После того, как мы сделаем это и приведем подобные слагаемые, получим: $y_0 = \frac{-2c_2 + c_1 + a}{3b}$. Для завершения рассмотрения данного случая необходимо проверить исполнение условия $x_0 > 0, y_0 > 0$. Имеем: $2c_1 - c_2 - a < 0$, $2c_2 -$

$c_1 - a < 0$, или, что эквивалентно, $c_1 \in \left(2c_2 - a, \frac{c_2+a}{2}\right)$. Эти условия касаются коэффициентов задачи, если они ему удовлетворяют, то найденное решение системы уравнений дает равновесие Нэша: $\left(\frac{c_2-2c_1+a}{3b}, \frac{c_1-2c_2+a}{3b}\right)$.

2. Пусть $x_0 > 0, y_0 = 0$. В этом случае условия первого порядка примут вид:

$$a - 2bx_0 - by_0 - c_1 = 0$$
$$a - 2by_0 - bx_0 - c_2 \leq 0$$

Подставим сюда $y_0 = 0$:

$$a - 2bx_0 - c_1 = 0$$
$$a - bx_0 - c_2 \leq 0$$

Из первого уравнения получаем: $x_0 = \frac{a-c_1}{2b}$. Второе условие первого порядка – неравенство, необходимо проверить его выполнение для найденного x_0:

$$0 \geq a - b\frac{a-c_1}{2b} - c_2 = \frac{a + c_1 - 2c_2}{2}$$

Отсюда получаем: $c_1 \in (0{,}2c_2 - a)$ – если коэффициенты модели удовлетворяют этому условию, то равновесие имеет вид $\left(\frac{a-c_1}{2b}, 0\right)$.

3. Пусть $x_0 = 0, y_0 > 0$. Здесь рассуждения аналогичны тем, что приведены в предыдущем пункте. Этот случает приводит к равновесию в рассматриваемой модели, если $c_1 \in \left(\frac{c_2+a}{2}, +\infty\right)$,а получающееся равновесие имеет вид: $\left(0, \frac{a-c_2}{2b}\right)$.

4. Пусть $x_0 = 0, y_0 = 0$. Точка $(0,0)$ может быть равновесием Нэша, только в том случае, когда:

$$a - 2bx_0 - by_0 - c_1 \leq 0$$
$$a - 2by_0 - bx_0 - c_2 \leq 0$$

Это приводит нас к паре неравенств: $a - c_1 \leq 0$, $a - c_2 \leq 0$. Иными словами, если предельные издержки обеих фирм относительно высокие ($c_1 \geq a, c_2 \geq a$), то равновесием в модели Курно является ситуация, когда ни одна фирма ничего не производит. ■

Квазивогнутость функций полезности является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия. Она лишь гарантирует, что хотя бы одно равновесие найдется – однако из того, что у какого-либо игрока функция выигрыша не квазивогнута, не следует, что в игре равновесия нет. Существует большое количество примеров непрерывных игровых моделей, в которых функции выигрыша игроков не квазивогнуты, однако равновесие существует. Один из таких примеров – это игра «Лоббирование», приводимая Захаровым.

Пример 5.8 (модель «Лоббирование»). Пусть две фирмы соревнуются за право построить магазин на центральной площади города. Чтобы получить контракт, необходимо потратить некоторую сумму денег на лоббирование своего проекта в органах власти. Успех лоббирования не гарантирован, но чем больше денег будет потрачено каждой из фирм, тем больше вероятность, что именно эта фирма получит контракт.

Пусть прибыль, которую может приносить магазин, фиксирована и равна R. Пусть вероятность того, что фирма i = 1,2 получит контракт, равна: $p_i = \frac{(r_i)^\gamma}{(r_1)^\gamma + (r_2)^\gamma}$, где r_i - стратегия фирмы i -

количество средств, потраченное ей, $\gamma \geq 0$ − параметр, отражающий эффективность лоббирования. Таким образом, функция полезности фирмы $i = 1{,}2$ равна:

$$u_i(r_1, r_2) = R\frac{(r_i)^\gamma}{(r_1)^\gamma + (r_2)^\gamma} - r_i$$

Чтобы найти равновесие, как и в прошлом примере, не будем строить функции наилучших ответов, а воспользуемся условиями первого порядка локального максимума.

Функции полезности являются дифференцируемыми по r_1 и r_2. Соответственно, если точка (r_1, r_2) - равновесие, то в нем должны выполняться необходимые условия первого порядка:

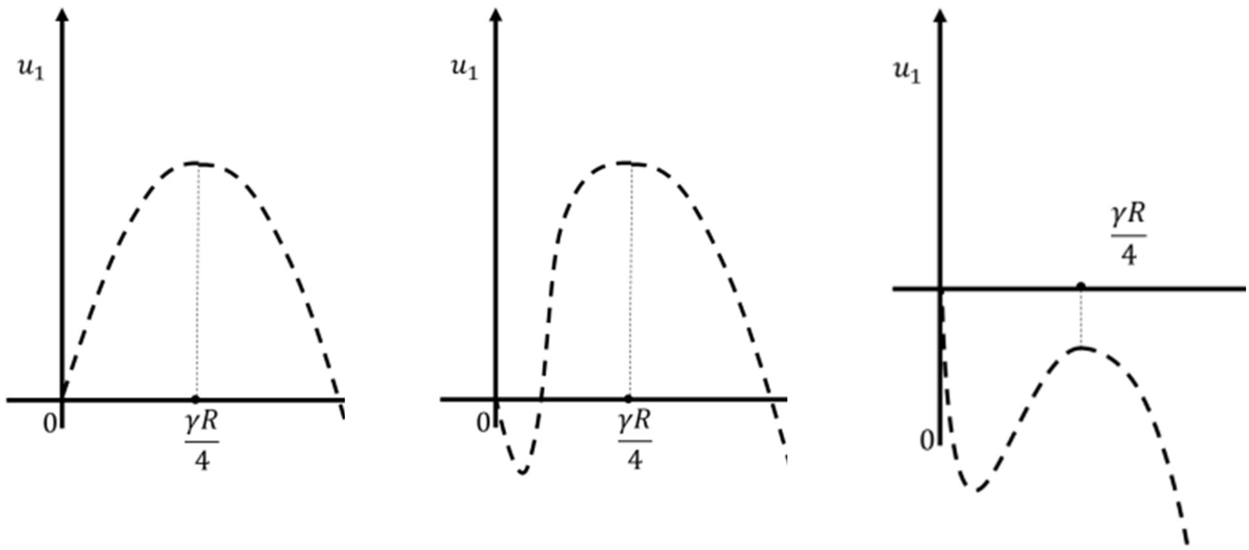
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial r_i} = 0, \text{при } r_i > 0 \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial r_i} < 0, \text{при } r_i = 0 \end{cases}$$

Производная функции выигрыша для игрока $i = 1{,}2$ имеет вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = R\frac{\gamma (r_i)^{\gamma-1}(r_{-i})^\gamma}{(r_1)^\gamma + (r_2)^\gamma} - 1$$

Условия первого порядка дают нам единственное решение (r_1^*, r_2^*), где $r_1^* = r_2^* = \frac{\gamma R}{4}$. Легко проверить, что условия максимума второго порядка в этой точке также будут выполнены. Однако найденная ситуация будет равновесием Нэша только если $\gamma \leq 2$. В обратном случае равновесия не существует: $u_1(r_1^*, r_2^*) = \frac{R}{2} - \frac{\gamma R}{4} < 0 = u_1(0, r_2^*)$, то есть первому игроку выгодно в одностороннем порядке изменить свою стратегию с r_1^* на 0. Если $\gamma > 0$, то (r_1^*, r_2^*) является всего лишь локальным равновесием - то есть в этой точке функция полезности каждого игрока имеет локальный (но не обязательно глобальный) максимум на множестве стратегий этого игрока.

Почему же равновесие есть в рассматриваемой модели не всегда? Потому что функции полезности являются квазивогнутыми только при $\gamma \in [0,1]$, а при $\gamma \in (1,2]$ – нет. Примерный вид графика функций полезности игроков приведен на Рисунок 5.6, наглядно показывающем их качественно различных вид при различных значениях параметра γ.



a. $0 < \gamma \leq 1$ b. $1 < \gamma \leq 2$ c. $\gamma > 2$

Рисунок 5.6. Модель «Лоббирование»: качественный вид графика функции выигрыша в зависимости от параметра γ.

Здесь мы четко видим три области для параметра γ, в которых картина «происходящего» в модели принципиально различная. Так, при $\gamma \in [0, 1]$ функции выигрыша игроков квазивогнуты, точнее, даже строго вогнуты – что дает единственное равновесие в точке $r_1^* =$

$r_2^* = \frac{\gamma R}{4}$. При $\gamma \in (1,\ 2]$ функции выигрыша теряют свойство квазивогнутости, однако локальное равновесие по-прежнему существует. При $\gamma > 2$ в игре не существует равновесия.

Обратим внимание, что найденное равновесие в теоретико-игровой модели дает дам довольно много пищи для размышлений над экономическим смыслом всей модели. Так, при борьбе за благо оба игрока тратят значительные ресурсы. Например, при γ=1, что соответствует обычной лотерее, общий объем затрачиваемых ресурсов будет равен половине от стоимости блага. Кроме того, можно показать, что при увеличении числа игроков общий объем затрат на лоббирование стремится к ценности самого блага, за которое ведется борьба (R в нашей модели), а объем ресурсов, затрачиваемых на состязательную деятельность, возрастает при улучшении технологии лоббирования (величины γ).

Проведенный анализ показывает, что при отсутствии прозрачных механизмов распределения лицензий на ведение многих прибыльных видов экономической деятельности (импортные квоты, строительство в условиях ограниченного предложения земли и т.д.) общество несет значительные (и часто невидимые) потери.

Рассмотрим еще две известные модели, носящие антагонистический характер и пришедшие из военного дела. Речь идет о модели «Оборона-нападение», которую можно условно считать «непрерывным наследником» игр Блотто, а также о моделях дуэлей.

Пример 5.9 («Оборона-Нападение»). На театре военных действий (фронте) имеется n обороняемых пунктов с номерами $i =$

$1,\dots,n$. Пусть A и B − количества средств нападения и обороны. Эти средства предполагаются бесконечно делимыми. Стратегия первого игрока (нападения) состоит в распределении своих сил и средств по пунктам в соответствии с вектором

$$x = (x_1, \dots x_n) \in X = \left\{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\right\}.$$

Стратегия обороны – второго игрока – имеет аналогичный вид:

$$y = (y_1, \dots x_n) \in Y = \left\{y \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = B, y_j \geq 0, j = 1, \dots, n\right\}.$$

Пусть μ_i − количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны на -ом пункте (фактически, это коэффициент эффективности обороны на данном пункте). Если $x_i > \mu_i y_i$, то через i-й пункт прорывается $x_i - \mu_i y_i$ средств нападения. Если $x_i \leq \mu_i y_i$, то через этот пункт нападение не прорвется (хотя в случае равенства и оборона будет уничтожена подчистую). Таким образом, при использовании игроками профиля стратегий (x, y) через -й пункт прорвется $\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$ средств нападения. Определим функцию выигрыша первого игрока как общее количество средств нападения, прорвавшихся по всему фронту (точно так же, как мы определяли выигрыш полковника Блотто в **Пример 3.10**):

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0].$$

Так как задача обороны – минимизировать количество прорывов нападения по всему фронту, выигрышем игрока 2 будем считать

$-F(x, y)$, таким образом, мы имеем дело с антагонистической игрой с непрерывной функцией выигрыша и компактными множествами стратегий (X, Y – ограниченные полиэдры в $\mathbb{R}^n$). Поэтому как минимум смешанное равновесие в ней существует (Теорема 5.3). Выпуклость функции $F(x, y)$ по y дает нам возможность воспользоваться результатом, который дает Теорема 5.8'. Значение игры $v = \overline{v}$, а оптимальной стратегией обороны является максиминная стратегия второго игрока y^0. Исследуем равновесия игры в чистых и смешанных стратегиях, полагая для определенности, что нумерация пунктов на фронте такова, что эффективность их обороны падает: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$, и последний пункт защищен хуже всего. Обозначим величины, обратные к коэффициентам эффективности обороны μ_i через $\nu_i = \mu_i^{-1}$. Физический смысл величины ν_i – коэффициент эффективности нападения, то есть сколько средств обороны может уничтожить одно средство нападения на пункте прорыва i.

Проведем исследование игры в три этапа.

1. Покажем, что $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \max[A - \mu_n B, 0]$, а максиминная стратегия нападения $x^{(n)} = (0, \dots, 0, A)$ состоит в нанесении массированного удара по слабейшему пункту всеми силами и средствами. Для любой стратегии нападения x определим вспомогательную стратегию обороны $\overline{y}$:

$$\overline{y}_i = Bx_i \left(\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \right)^{-1}, i = 1, \dots, n,$$

тогда $\min\limits_{y\in Y} F(x,y) \le F(x,\overline{y}) = \sum_{k=1}^{n} \max\left[x_i - \mu_i \overline{y}_i, 0\right]$. Возможны два варианта. Во-первых, если $B \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k}$, то $\overline{y}_i \ge x_i/\mu_i$ для любого i и $x_i - \mu_i \overline{y}_i \le 0$, значит, $F(x,\overline{y}) = 0$. В противном случае $\overline{y}_i \le x_i/\mu_i$ и

$$F(x,\overline{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_i - \mu_i \overline{y}_i\right) \le A - \mu_n \sum_{k=1}^{n} \overline{y}_i = A - \mu_n B.$$

Это значит, что для любой стратегии нападения x справедливо:

$$\min_{y\in Y} F(x,y) \le \max[A - \mu_n B, 0]$$

$$= \min_{y\in Y} \max[A - \mu_n y_n, 0] = \min_{y\in Y} F\left(x^{(n)}, y\right),$$

а $x^{(n)}$ – максиминная стратегия первого игрока.

2. Покажем, что $\overline{v} = \min\limits_{y\in Y} \max\limits_{x\in X} F(x,y) = \max[A - B(\sum_{k=1}^{n} (\mu_k)^{-1})^{-1}, 0]$, а максиминная стратегия обороны y^0 такова, что

$$y_i^0 = B\left(\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\right)^{-1} = B\frac{\nu_i}{\sum_{k=1}^{n} \nu_k}, i = 1, \dots, n, \qquad 5.5$$

то есть второй игрок распределяет оборонительные силы и средства обратно пропорционально эффективности защиты пунктов (чем ниже эффективность, тем активнее надо прикрывать).

Вначале докажем, что $\max\limits_{x\in X} F(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} F\left(x^{(i)}, y\right)\ \forall y \in Y$, где $x_k^{(i)} = 0$ при $k \ne i$, и $x_i^{(i)} = A$. Иными словами, $x^{(i)}$ – стратегия нападения, состоящая в нанесении концентрированного удара по i-му пункту. Очевидно, что система стратегий $\left\{x^{(i)}\right\}$ образует базис в $\mathbb{R}^n$, а потому любую допустимую стратегию можно представить в виде линейной комбинации $x^{(i)}$. Это разложение имеет вид $x=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{A}x^{(i)}$, откуда, по определению выпуклой функции, получаем:

$$F(x,y)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{A}F\left(x^{(i)},y\right)\leq\max_{1\leq i\leq n}F\left(x^{(i)},y\right)\ \forall(x,y)\in X\times Y,$$

откуда и получаем требуемое к доказательству утверждение: $\max\limits_{x\in X}F(x,y)\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}F\left(x^{(i)},y\right)\leq\max\limits_{x\in X}F(x,y)\Rightarrow\max\limits_{x\in X}F(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}F\left(x^{(i)},y\right)$. Применим полученный результат к определению верхнего значения игры:

$$\overline{v}=\min_{y\in Y}\max_{x\in X}F(x,y)=\min_{y\in Y}\max_{1\leq i\leq n}F\left(x^{(i)},y\right)=$$

$$=\min_{y\in Y}\max_{1\leq i\leq n}\max[A-\mu_i y_i,0]=\min_{y\in Y}\max\left[A-\min_{1\leq i\leq n}\mu_i y_i\,,0\right]=$$

$$=\max\left[A-B\cdot\max_{y\in Y}\min_{1\leq i\leq n}\frac{\mu_i y_i}{B},0\right].$$

Сделаем замену переменных: $p=y/B\in P$, где $P=\{(p_1,\dots,p_n)|p_1+\dots+p_n=1,p_i\geq 0,i=1,\dots,n\}$. Тогда $\overline{v}=\max\left[A-B\cdot\max\limits_{y\in Y}\min\limits_{1\leq i\leq n}\mu_i p_i\,,0\right]$.

Стоящий внутри максимин можно найти, интерпретировав p как смешанную стратегию второго игрока в антагонистической матричной игре с диагональной матрицей $A=diag(\mu_i)$. Рассмотрим эту вспомогательную игру, ее значение по построению есть искомый максимин. Тогда согласно свойству дополняющей нежесткости, для любого $i=1,\dots,n$ в ситуации равновесия $A\left(i,p_i^0\right)=\mu_i p_i^0=w$. Решая получившуюся систему из $n+1$ линейных уравнений относительно $n+1$ переменных (p_i^0,w) получаем, что $w=\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1}\right)^{-1}$, а $p_i^0=\frac{w}{\mu_i}$.

Возвращаясь к исходной задаче, получаем, что $\overline{v} = \max\left[A - B\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1}\right)^{-1}, 0\right]$, а максиминная стратегия второго игрока, реализующая это значение, определяется как

$$y^0 = \left(y_i^0, i = 1, \ldots, n\right): y_i^0 = Bp_i^0 = B\left(\mu_i \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}\right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Решение в чистых стратегиях, впрочем, имеется в игре не всегда, так как верхнее и нижнее значения игры могут не совпадать. Если $\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1} \leq B/A$, то $\overline{v} = 0 \geq \underline{v}$, которое, в свою очередь, также неотрицательно. Следовательно, $\overline{v} = 0 = \underline{v}$, и для нападения любая стратегия оптимальна. В этом случае оборона так может распределить свои силы, чтобы не позволить нападению, использующему концентрированный удар, прорваться на каком-либо пункте.

Если же $\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1} > B/A$, то функция $F(x, y)$ седловой точки не имеет. Действительно, $\overline{v} = A - B/\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{-1} > A - \mu_n B > 0$. Поэтому $\overline{v} > \max[0,\ A - \mu_n B\ ] = \underline{v}$.

3. Покажем, что в игре существует решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \overline{v})$, где y^0 – максиминная чистая стратегия обороны вида **5.5**, а оптимальная смешанная стратегия φ^0 для нападения имеет вид:

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \mathbb{I}_{x^{(i)}}, p_i^0 = \left(\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\right)^{-1}.$$

Поскольку $F(x,y)$ является выпуклой функцией аргумента y, достаточно показать, что для данной смешанной стратегии φ^0 нападения для любой стратегии обороны $F(\varphi^0,y) \geq \overline{v}$. Получаем:

$$F(\varphi^0,y) = \int_X F(x,y)d\varphi^0(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F\left(x^{(i)},y\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max[A - \mu_i y_i, 0] = \sum_{i=1}^{n} \max\left[p_i^0 A - \mu_i p_i^0 y_i, 0\right] \geq$$

$$\left\{\text{т. к.} \; \forall\, a_k, b_k \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{Z}: \sum_{k=1}^{M} \max[a_k, b_k] \geq \max\left[\sum_{k=1}^{M} a_k\,, \sum_{k=1}^{M} b_k\right]\right\}$$

$$\geq \max\left[0, \sum_{i=1}^{n}\left(p_i^0 A - \mu_i p_i^0 y_i\right)\right] = \max\left[0, A - \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \max\left[A - B\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\right)^{-1}\right] = \overline{v}. \blacksquare$$

Таким образом, нам удалось показать, что в модели игры «Оборона-нападение» оптимальные стратегии комбатантов качественно можно описать следующим образом. Обороняющаяся сторона имеет чистую стратегию, состоящую в том, чтобы распределять свои силы и средства по защищаемым пунктам пропорционально эффективности ν_i нападения на них. Так, на пункт i необходимо отправить долю средств, равную вкладу эффективности нападения на данном пункте к суммарной эффективности нападения, т.е. $\frac{\nu_i}{\sum_{k=1}^{n} \nu_k}$ (**5.5**). У нападения же оптимальная стратегия находится в классе смешанных стратегий. Атакующая сторона должна сосредотачивать все свои силы и средства для прорыва фронта ровно на одном пункте, выбирая пункт $i = 1, \dots, n$ с вероятностью, равной той же самой величине $\frac{\nu_i}{\sum_{k=1}^{n} \nu_k}$ вклада эффективности нападения на данном пункте к суммарной эффективности нападения.

Изученную нами модель «Оборона-нападение» можно назвать задачей планирования офицерского уровня, в то время как отдельные боевые столкновения (например, бои истребитель-бомбардировщик, штурмовик-наземный комплекс или даже дуэли солдат один на один) воюющих армий следует моделировать иначе. Один из вариантов – использование моделей дуэли двух типов – шумной и бесшумной. Сформулируем их и изучим вопрос существования равновесий.

Пример 5.10 (модель дуэли). Рассмотрим поединок двух дуэлянтов (первый и второй игроки). В начальный момент времени они находятся на расстоянии $\boldsymbol{d_0}$ друг от друга, после чего начинают сближаться. В распоряжении каждого из них имеется один выстрел, который он может произвести в противника с любого расстояния (конечно, при условии, что этот игрок жив), он даже может подойти к противнику вплотную.

Пусть $p_k(d)$ − функция меткости -го стрелка, равная вероятности поражения противника при условии, что выстрел был произведен с расстояния d. Предположим, что функции $p_k(d)$ непрерывны и убывают на отрезке $[0, d_0]$ (чем больше расстояние, так труднее поразить цель) и без потери общности $p_k(0) = 1$ (выстрел в упор гарантированно убивает соперника), $p_k(d_0) = 0$ (попасть с начального расстояния бойцы не могут), $k = 1,2$. Определим антагонистическую игру. Пусть $x \in X = [0, d_0]$ − расстояние, с которого первый игрок намечает произвести свой выстрел. Аналогично, $y \in Y = [0, d_0]$ − расстояние, с которого намечает свой выстрел второй игрок. Выигрыш каждого игрока представляет собой вероятность его победы. Таким образом, получается, что для любой пары стратегий (x, y) участников поединка $u_1(x, y) + u_2(x, y) = 1$. Игра, описывающая исследуемую дуэль, эквивалентна антагонистической, так как $u_2(x, y) = 1 - u_1(x, y)$ – с точностью до константы 1, не влияющей на оптимальные стратегии, выигрыш второго игрока равен выигрышу первого с противоположным знаком. Поэтому нам достаточно определить функцию выигрыша $F(x, y)$ первого игрока, а в качестве решения игры рассматривать максиминные стратегии игроков.

Рассмотрим сначала **шумную дуэль**, когда противники слышат выстрелы друг друга. Тогда

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \le y \le x \le d_0, \\ 1 - p_2(y), & 0 \le x < y \le d_0. \end{cases}$$

По сути, $F(x, y)$ есть вероятность поражения первым игроком второго. Если $x < y$ и второй игрок промахнется, то первый, услышав выстрел противника, выстрелит в него в упор (с расстояния 0) вместо выбранного заранее x. Фактически, $F(x, y)$ является осреднением функции, принимающей значение 1 или 0 в зависимости от того, убит второй участник схватки или нет. Итак, шумная дуэль определена как игра в нормальной форме $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$.

Покажем, что шумная дуэль имеет решение в чистых стратегиях $\left(d^*, d^*, v = p_1(d^*)\right)$, где d^* – единственный корень уравнения $p_1(d) = 1 - p_2(d)$. Проверим неравенства из определения седловой точки:

$$F(x, d^*) \le p_1(d^*) = F(d^*, d^*) \le F(d^*, y) \ \ \forall x \in X, y \in Y.$$

По определению функции выигрыша $F(x, y)$ получаем:

$$F(x,d^*)=\begin{cases}p_1(x)\le p_1(d^*), & d^*\le x\le d_0,\\ 1-p_2(d^*), & 0\le x<d^*;\end{cases}$$

$$F(d^*,y)=\begin{cases}p_1(d^*), & 0\le y\le d^*,\\ 1-p_2(y)\ge 1-p_2(d^*)=p_1(d^*), & d^*<y\le d_0.\end{cases}$$

Если функции меткости игроков одинаковы, то из уравнения $p_1(d)=1-p_2(d)$ находим, что значение игры равно $1/2$, а d^* является корнем уравнения $p_1(d)=1/2$.

В **бесшумной дуэли** игроки не слышат выстрелы друг друга и потому ни один из них не может быть точно уверен: выстрелил ли его противник, но промахнулся, либо еще не стрелял. Выигрыш первого игрока в бесшумной дуэли представим в виде:

$$F(x,y)=\begin{cases}p_1(x), & 0\le y\le x\le d_0,\\ \big(1-p_2(y)\big)p_1(x), & 0\le x<y\le d_0.\end{cases}$$

Множитель $p_1(x)$ во второй строке как раз и характеризует различие бесшумной и шумной дуэлей. Если $x<y$ и второй игрок промахнется, то первый этого не услышит и все равно будет стрелять с выбранного расстояния x с вероятностью поражения $p_1(x)$ – в отличие от шумной дуэли, где, услышав выстрел промазавшего противника, дуэлянт сможет обеспечить себе стопроцентную вероятность попадания.

Бесшумная дуэль, вообще говоря, «хуже» шумной: в ней нет решения в чистых стратегиях, а оптимальные смешанные стратегии игроков приходится искать с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Докажем, что верхнее и нижнее значение игры для модели бесшумной дуэли не совпадают, после чего для простого примера разберем метод поиска решения игры в смешанных стратегиях.

Найдем нижнее значение игры $\underline{v} = \sup_{0 \le x \le d_0} \inf_{0 \le y \le d_0} F(x, y)$. Для первого игрока стратегия $x = d_0$ (стрелять из исходной позиции) заведомо не является максиминной, так как $F(d_0, y) = p_1(d_0) = 0$ при любом $y \in Y$. Следовательно, $\inf_{0 \le y \le d_0} F(x, y) =$

$\min\left[\inf_{0 \le y \le x} F(x, y), \inf_{x \le y \le d_0} F(x, y) \right] = \min\left[p_1(x), p_1(x) \cdot \left(1 - p_2(x)\right) \right] =$ $p_1(x) \cdot \left(1 - p_2(x)\right)$, и $\underline{v} = \max_{x \in [0, d_0]} p_1(x) \cdot \left(1 - p_2(x)\right)$. С другой стороны, верхнее значение игры $\overline{v} = \inf_{0 \le y \le d_0} \sup_{0 \le x \le d_0} F(x, y) = p_1(d^*)$. Действительно, при фиксированном значении y:

$$\sup_{0 \le x \le d_0} F(x, y) = \max\left[\sup_{0 \le x \le y} F(x, y), \sup_{y \le x \le d_0} F(x, y) \right]. \qquad 5.6$$

Первое выражение под знаком максимума в **5.6** $\sup_{0 \le x \le y} F(x, y) =$

$$\sup_{0 \le x \le y} \left(p_1(x) \cdot \left(1 - p_2(y)\right) \right) = \left(1 - p_2(y)\right) \cdot \max_{0 \le x \le y} p_1(x) = 1 - p_2(y),$$

так как по условиям модели $p_1(x)$ убывает, достигая при $x = 0$ максимума, равного 1. Второе выражение в **5.6** под знаком максимума $\sup_{y \le x \le d_0} F(x, y) = \sup_{y \le x \le d_0} p_1(x) = p_1(y)$. Таким образом, $\sup_{0 \le x \le d_0} F(x, y) = f(y) = \max[1 - p_1(y),\ p_2(y)]$, и верхнее значение игры равно $\overline{v} = \inf_{0 \le y \le d_0} \max[1 - p_1(y),\ p_2(y)] = \inf_{0 \le y \le d_0} f(y)$. Исследуем поведение функции $f(y)$. При $y = 0$: $f(0) = \max[1 - p_1(0), p_2(0)] = \max[0; 1] = 1$, при $y = d_0$: $f(1) = \max[1 - p_1(d_0), p_2(d_0)] = 1$. Если максимум достигается на функции $1 - p_1(y)$, то $f(y)$ возрастает, в противном случае – убывает. При каких значениях y реализуется каждый из случаев? Равенство $1 - p_1(y) = p_2(y)$ достигается при $y = d^*$; $1 - p_1(y) < p_2(y)$ тогда и только тогда, когда $y < d^*$, и в этом случае итоговая $f(y) \equiv p_2(y)$ убывает; наконец, $p_2(y) < 1 - p_1(y)$, то $f(y) \equiv 1 - p_1(y)$ и возрастает. Таким образом, то функция-максимум $f(y)$ унимодальна с минимумом, достигающимся при равенстве $1 - p_1(y) = p_2(y)$, т.е. при $y = d^*$, и $\overline{v} = \min\limits_{0 \le y \le d_0} f(y) = p_1(d^*)$. Отсюда $\underline{v} = \max\limits_{0 \le x \le d_0} p_1(x)\big(1 - p_2(x)\big) < \max\limits_{0 \le x \le d_0} \min[p_1(x), 1 - p_2(x)] = p_1(d^*) = \overline{v}$. Верхнее и нижнее значения игры не совпадают, а это значит, что в чистых стратегиях модель бесшумной дуэли не решить.

К сожалению, решение модели бесшумной дуэли в смешанных стратегиях в общем виде сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, и в общем виде выписать решение не получится. Тем не менее, проиллюстрируем на максимально простом примере, как искомое решение в смешанных стратегиях можно найти. Нормируем расстояние, пусть $d_0 = 1$ – максимальное расстояние, с которого может вестись дуэль. Пусть оба дуэлянта обладают одинаковой квалификацией в стрельбе, их функции меткости совпадают и линейны по расстоянию, с которого делается выстрел: $p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$. Тогда $x, y \in [0,1]$, и выигрыш первого дуэлянта имеет вид:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le y \le x \le 1, \\ (1 - x)y, & 0 \le x < y \le 1. \end{cases}$$

Пусть $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$ – оптимальные смешанные стратегии дуэлянтов. Предположим, что спектры этих смешанных стратегий у обоих игроков совпадают и имеют вид отрезка $Sp(\varphi^0) = Sp(\psi^0) =$

$[0, a]$, $a \geq 0$. В таком виде стратегии полностью определяются значением параметра a, поиском которого мы и займемся. Дополнительно предположим непрерывную дифференцируемость смешанных стратегий, и обозначим их производные (суть плотности распределения случайных величин, характеризующих реализации чистых стратегий дуэлянтов) $f(x)$ и $g(y)$ соответственно.

Свойство дополняющей нежесткости, выполняющееся для любой пары оптимальных смешанных стратегий (Теорема 3.2'), требует, чтобы для $\forall y \in [0, a]$ $F(\varphi^0, y) = v$. Распишем это:

$$v = \int_0^a F(x, y) f(x) dx \; = \int_0^y (1 - x) y f(x) dx \; + \int_y^a (1 - x) f(x) dx.$$

Данное интегральное уравнение можно дважды продифференцировать по y, в результате чего получим дифференциальное уравнение $3f = (1 - f)\dot{f}$. Общий вид его решения: $f(x) = c \cdot (1 - x)^{-3}$. Так как $f(x)$ – плотность, выполнено условие нормировки $\int_0^1 f(x) dx = 1$, следовательно, коэффициент c можно найти из условия:

$$1 = c \int_0^a \frac{dx}{(1 - x)^3} = \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{(1 - a)^2} - 1 \right). \qquad 5.7$$

Кроме того, исходное интегральное уравнение также должно выполняться для $f(x)$ найденного вида:

$$c \cdot \left(\frac{1}{1 - a} - 1 - y \right) = v. \qquad 5.8$$

Однако полученное равенство **5.8** не является тождеством по y! Это означает, что смешанная стратегия φ^0 предложенного вида не существует. Предположим, что у оптимальной смешанной стратегии первого игрока имеется скачок в нуле, обозначим его величину как σ. Тогда уравнения для определения $f(x)$, полученные ранее, трансформируются следующим образом:

$$v = \sigma y + \int_0^y (1-x)yf(x)dx \; + \int_y^a (1-x)f(x)dx,$$

$$\sigma + \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{(1-a)^2} - 1\right) = 1,$$

$$\sigma y + c \cdot \left(\frac{1}{1-a} - 1 - y\right) = v.$$

Последнее уравнение можно превратить в тождество относительно y, взяв $\sigma = c$. Тогда, можно рассматривать два последних уравнения как систему относительно двух переменных (a, c):

$$\begin{cases} \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{(1-a)^2} - 1\right) = 1, \\ c \cdot \left(\frac{1}{1-a} - 1\right) = v. \end{cases} \qquad 5.9$$

Аналогично применяя свойство дополняющей нежесткости ко второму дуэлянту ($\forall x \in [0,1] \;\; F(x, \psi^0) = v$), получаем интегральное уравнение вида:

$$v = \int_0^x (1-x)g(y)dy \; + \int_x^a (1-x)yg(y)dy.$$

Дважды дифференцируя по x, составляем дифференциальное уравнение для поиска $g(y)$, общий вид решения которого: $g(y) = b \cdot (1-y)^{-3}$. Подставляя его в исходное интегральное уравнение и учитывая условие нормировки, получим аналог **5.8**:

$$(1-x)\left(1 - \frac{b}{1-a} + \frac{b}{1-x}\right) = v.$$

Это уравнение превращается в тождество по x, когда $b = v = 1 - a$. Подставив $v = 1 - a$ в систему **5.9**, получаем в итоге систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{1}{(1-a)^2} - 1 \right) = 1, \\ c \cdot \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) = 1 - a. \end{cases}$$

Ее решение: $a = 2 - \sqrt{2}$, $c = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \sigma$, а $b = \sqrt{2} - 1 = v$ – значение игры. В итоге, оптимальные смешанные стратегии игроков имеют вид:

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + 1 \right), 0 \le x \le 2 - \sqrt{2}, \\ 1, \qquad 2 - \sqrt{2} \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\psi^0(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{1}{(1-y)^2} - 1 \right), 0 \le y \le 2 - \sqrt{2}, \\ 1, \qquad 2 - \sqrt{2} \le y \le 1. \end{cases}$$

Особенность найденного в примере равновесия в модели бесшумной дуэли в том, что оба дуэлянта с определенной вероятностью ($\sigma = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$) выбирают стратегию «не стрелять до полного сближения с противником». Кроме того, найденное значение игры $v = \sqrt{2} - 1$ меньше значения игры в модели шумной дуэли, которое равно ${}^1\!/_2$. Оба эти свойства объясняются как раз ключевым различием двух типов дуэлей – уменьшением информированности игроков. Действительно, каждый из дуэлянтов, будучи не пораженным, не может точно понять, почему он не поражен – потому что его соперник еще не сделал выстрела или потому, что он промахнулся. Именно возможность ситуации, когда соперник промахнулся и не попал, приводит к тому, что с определенной вероятностью дуэлянт не стреляет издалека и ждет возможности подойти и сделать выстрел в упор. ■

5.4. Введение в теорию кооперативных игр. Кооперативная игра как математический объект.

Особого подхода к теоретико-игровому моделированию требуют те ситуации, в которых игроки могут объединяться в группы, взяв на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия. Такой тип игр получил название кооперативных или коалиционных. Развлекательные игры редко являются кооперативными, однако такие механизмы нередки в повседневной жизни. В частности, очень распространенным типом конфликтных ситуаций, при моделировании которых используется кооперативный подход, являются ситуации дележа n лицами некоторой фиксированной суммы. Принципы этого деления и являются решениями кооперативной игры, «аналогами» стратегий в этому случае выступают количества блага, получаемые каждым игроком при его разделении в соответствии с указанным правилом.

Пусть, как и ранее, A − множество игроков. Введем основные понятия, которые понадобятся для формализации кооперативной игры.

Определение 5.13. Коалицией называется любое подмножество К множества игроков А ($K \subset A$).

Фактически, коалицией может считаться любая группа игроков. Каждая коалиция может претендовать на определенные выплаты (возможно, из иных источников, а не из подлежащего разделению «фонда»). Так как множество всех игроков (то есть A) является собственным подмножеством, то можно рассматривать его как своего рода «Большую коалицию». Выигрыш ее, очевидно, представляет собой как раз ту сумму, которую по условиям игры предстоит разделить. Каждой возможной коалиции $K \in 2^A$ можно поставить в соответствие ту сумму, на которую она может «претендовать».

Определение 5.14. Функция $v: 2^A \to \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой коалиции K ее доход $v(K)$, называется характеристической. Характеристическая функция v называется супераддитивной, если $v(K \cup T) \geq v(K) + v(T)$ для любых непересекающихся коалиций K и T.

Условие супераддитивности означает, что при $K \cap T = \emptyset$; доход коалиции $K \cup T$ не меньше суммы доходов коалиций K и T по отдельности – иными словами, объединяться в коалиции выгодно в принципе. Если условие супераддитивности нарушается, то делить исходную сумму (то есть $v(A)$) нет смысла – по отдельности игроки смогут получить больше. Таким образом, для не супераддитивных функций построение и исследование кооперативной игры не имеет смысла – в этом случае игрокам нет смысла вступать в коалиции и действовать кооперативно. Поэтому далее везде полагается по умолчанию, что $v(\cdot)$ - супераддитивна. Супераддитивная характеристическая функция представляет собой «квинтэссенцию» кооперативной игры, фактически содержа в себе всю информацию о ней.

Определение 5.15. Кооперативной игрой (игрой в форме характеристической функции) называется пара $\mathcal{K} = \langle A, v\rangle$.

Установим связь между играми в нормальной форме и кооперативными играми. Предположим, что в игре $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A\rangle$ множества стратегий игроков конечны. Кооперативный «аналог» заведомо имеют игры с постоянной суммой, т.е. $\sum_{a\in A} u^a(s) \equiv const$. Именно эту сумму предстоит «делить» в кооперативной игре, соответствующей игре в нормальной форме. Очевидно, что для двух игроков любая игра с постоянной суммой эквивалентна антагонистической. Далее, предположим, что выигрыши игроков – денежные. Точнее говоря, они носят **трансферабельный характер**: игроки могут перераспределять между собой полученные выигрыши (например, осуществлять не опосредованные игрой побочные платежи друг другу). Определим характеристическую функцию для соответствующей кооперативной игры. Для «Большой» коалиции A естественно положить $v(A) = \max\limits_{s\in S} \sum_{a\in A} u^a(s)$ – игроки действуют так, чтобы максимизировать совокупный суммарный выигрыш. Для произвольных коалиции $K \subset A$ и ситуации s обозначим $s^K = (s^a, a \in K) \in S^K = \otimes_{a\in K} S^a$. Тогда ситуацию s можно записать в виде $s = \left(s^K, s^{A\setminus K}\right)$. Для игры с постоянной суммой характеристическую функцию $v(K)$ можно определить как значение антагонистической игры $\Gamma^K =$

$\langle S^K, A^{A\setminus K}, u^K(s^K, s^{A\setminus K})\rangle$ коалиции K (первый игрок) против ее дополнения $A\setminus K$ (второй игрок), где $u^K(s^K, s^{A\setminus K}) = \sum_{a\in K} u^a(s^K, s^{A\setminus K})$. Построенная таким образом характеристическая функция v супераддитивна и $v(K) + v(A\setminus K) = v(A)$ $\forall K \subset A$ (доказательство предоставляется провести самостоятельно заинтересованным читателям).

Таким образом, кооперативные игры представляют собой не отдельный математический объект, «оторванный» от остальных разделов теории игр, а являются неотделимой ее частью. В рамках кооперативного подхода исход игры описывается с помощью дележа – особого распределения исходной суммы между игроками.

Определение 5.16. Дележом называется вектор $y = (y^a, a \in A)$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{a\in A} y^a = v(A); y^a \geq v(a) \quad \forall a \in A.$$

Дележ y задает распределение выигрыша $v(A)$, удовлетворяющее условию индивидуальной разумности (рациональности) $y^a \geq v(a)$, $\forall a \in A$. Фактически, дележ – это такой способ распределения общего выигрыша $v(A)$ всех игроков, при котором каждый из них получит б***о***льшие выплаты, чем мог бы получить «в одиночку» в соответствии с характеристической функцией игры. Если бы условие индивидуальной рациональности не выполнялось для какого-то игрока, то ему было бы невыгодно участвовать в разделе общего выигрыша в составе «большой коалиции». Множество всех дележей обозначается Y.

Для игр с супераддитивной характеристической функцией v из свойства супераддитивности вытекает неравенство $\sum_{a\in A} v(a) \le v(A)$. Если это неравенство выполнено в виде равенства, то кооперативная игра называется **несущественной**. Столь «уничижительное» название класса игра обосновано тем, что в подобных играх существует единственный дележ, в котором игроки получают в точности свой «единоличный» выигрыш:

$$\sum_{a\in A} v(a) = v(A) \Leftrightarrow \exists!\, y = (v(a), a \in A).$$

В дальнейшем сосредоточимся на существенных играх, так как в них могут существовать нетривиальные дележи.

Как и в случае с некооперативными играми, которые оказывались в некотором смысле «инвариантными» относительно аффинных преобразований (умножение на положительное число и прибавление константы), можно разделить на подобные классы эквивалентности и кооперативные игры. Аффинные преобразования характеристической функции не выводят кооперативную игру из ее класса эквивалентности.

Определение 5.17. Две кооперативные игры $\mathcal{K} = \langle A, v\rangle$ и $\mathcal{K}' = \langle A, v'\rangle$ называются эквивалентными, если найдутся такие числа $c > 0$, $d^a, a \in A$, что $v'(K) = c \cdot v(K) + \sum_{a\in K} d^a \ \ \forall K \subseteq A$.

Интерпретация классов эквивалентности кооперативных игр достаточно очевидна. Переход от игры $\mathcal{K}$ к эквивалентной игре $\mathcal{K}'$ можно связать с изменением в c раз денежной единицы. Положительная величина d^a интерпретируется как фиксированная дополнительная выплата игроку a. Если же величина d^a

отрицательна, то ее абсолютную величину можно рассматривать как плату игрока a за участие в игре. Любой дележ y игры K переходит «аффинным образом» в дележ z игры $\mathcal{K}'$: для каждого игрока $a \in A$ $z^a = c \cdot y^a + d^a$.

Определение 5.18. Кооперативная игра $\mathcal{K}'$ имеет (0−1)-редуцированную форму, если $v'(A) = 1$, $v'(a) = 0\ \forall a \in A$.

Любую кооперативную игру K можно привести к указанной форме, подобрав для нее эквивалентную игру $\mathcal{K}'$ по правилу:

$$c = \left(v(A) - \sum_{a \in A} v(a)\right)^{-1}; d^a = -c \cdot v(a)\ \ \forall a \in A.$$

Далее, не ограничивая общности, будем рассматривать только такие игры, для которых значение характеристической функции от пустой коалиции равно нулю: $v(\emptyset) = 0$ (принцип «Нет человека – нет выплат»). Очевидно, что любую кооперативную игру можно «нормировать» подобным образом, рассматривая вместо нее эквивалентную ей игру с характеристической функцией $v'(K) = v(K) - v(\emptyset)\ \ \forall K \subseteq A$.

5.5. Ядро кооперативной игры. Вектор Шепли.

В кооперативной теории нет единого понятия «разумного» дележа – подобно тому, как в некооперативной теории существует несколько подходов к тому, что считать оптимальными стратегиями игроков. Аналогично тому, как рассмотрение Парето-оптимальности, равновесности по Нэшу в чистых или в смешанных стратегиях приводят к различным множествам оптимальных исходов игры, различные соображения «оптимальности» приводят к разным множествам «разумных» дележей. Рассмотрим два базовых подхода, основанных на концепциях ядра и вектора Шепли.

Идейно ядро кооперативной игры строится на принципе, аналогичных выдвинутым в Определение 2.7: это множество таких дележей, которые устойчивы в том смысле, что ни одной нетривиальной коалиции игроков невыгодно отклоняться от участия в «большой коалиции» при разделении совокупного выигрыша. Фактически, некоторый дележ y можно считать неустойчивым к отклонению коалиции K, если $v(K) > \sum_{a \in K} y^a$. В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции меньше того, что коалиция может получить, действуя самостоятельно. Поэтому игроки коалиции K смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа y. Приведем формальное определение ядра кооперативной игры как множества дележей, устойчивых к отклонению любых коалиций.

Определение 5.19. Ядром (C-ядром[11]) кооперативной игры $\mathcal{K} = \langle A, v \rangle$ называется множество дележей

$$C = \left\{ y \in Y \mid \sum_{a \in K} y^a \geq v(K) \ \ \forall K \neq A \right\}$$

Всякий дележ y из ядра, удовлетворяет условию «групповой рациональности»: выигрыш $v(K)$ любой коалиции K не превосходит ее суммарных выплат $\sum_{a \in K} y^a$ в соответствии с дележом y.

Важнейший вопрос, который начинает волновать нас сразу же, как только мы сформулируем любую концепцию оптимальности, это вопрос существования соответствующих решений. Определим

[11] от англ. «core» - ядро. Далее будем называть С-ядро просто «ядром», за исключением тех ситуаций, когда необходимо подчеркнуть его отличие от других концепция ядра (N-ядра, например)

условия, при которых ядро кооперативной игры не пусто: $C \neq \emptyset$. Введем обозначение

$$C' = \left\{ y \in \mathbb{R}^{|A|} \mid \sum_{a \in K} y^a \geq v(K) \;\; \forall K \neq A \right\}.$$

Множество C' – это совокупность векторов размерности, равной количеству игроков, таких, что для любой коалиции игроков K сумма их элементов, стоящих на соответствующих местах, больше значения $v(K)$. Фактически, это своего рода «недо-ядро», составленное не из дележей, а из произвольных векторов.

В кооперативной игре ядро C существует тогда и только тогда, когда

$$\min_{y \in C'} \sum_{a \in A} y^a \leq v(A). \qquad 5.10$$

Очевидно, что любой дележ y из ядра принадлежит и C', а поэтому в случае его непустоты как минимум для одного $y \in C'$ $\sum_{a \in A} y^a \leq v(A)$, так как речь идет о дележе. С другой стороны, если $\min\limits_{y \in C'} \sum_{a \in A} y^a > v(A)$, то для любого $y \in C'$ $\sum_{a \in A} y^a > v(A)$. Следовательно, в множестве C' нет ни одного дележа, значит, не существует такого дележа y, для которого $\sum_{a \in K} y^a \geq v(K) \;\; \forall K \neq A$. Иными словами, в этом случае ядро игры оказывается пустым. Следовательно, выполнение **5.10** эквивалентно непустоте ядра кооперативной игры. Чему же равен минимум, входящий в это неравенство? Для его поиска рассмотрим задачу оптимизации:

$$\sum_{a \in A} y^a \to \min,$$

$$s.t. \sum_{a \in K} y^a \geq v(K) \;\; \forall K \neq A$$

Очевидно, что мы имеем дело с задачей линейного программирования, следовательно, можем искать ее решение через исследование двойственной задачи. Она имеет вид:

$$\sum_{K \neq A} \lambda^K v(K) \to \max,$$

$$s.t. \sum_{K: a \in K} \lambda^K = 1 \quad \forall a \in A, \lambda^K \geq 0 \; \forall K \neq A \qquad 5.11$$

Множество Λ таких λ, которые удовлетворяют ограничениям двойственной задачи **5.11**, называется множеством **сбалансированных покрытий** множества A.

Выведенный нами критерий непустоты ядра был доказан в 60-е годы XX века независимо друг от друга советским математиком О.Н.Бондаревой и будущим лауреатом Нобелевской премии по экономике 2012 года Л.Шепли и потому носит название теоремы Бондаревой-Шепли.

Теорема 5.9 (Бондаревой-Шепли). Кооперативная игра $\mathcal{K} = \langle A, v \rangle$ имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия $\lambda \in \Lambda$ множества A выполняется неравенство

$$\sum_{K \neq A} \lambda^K v(K) \leq v(A).$$

Заметим, что множество Λ сбалансированных покрытий A представляет собой замкнутый и ограниченный многогранник в пространстве, размерность которого равна количеству нетривиальных коалиций для игроков множества A – а таковых существует $2^{|A|}-2$ (все возможные подмножества A за исключением пустого множества и самого A). Как читателю должно быть известно из теории линейного программирования, в этом случае можно сузить поиск максимума по всем точкам многогранника на поиск максимума только его вершинам (крайним точкам). Обозначим их множество как Λ^0, а его элементы – суть вершины множества сбалансированных покрытий A – назовем приведенными (минимальными) сбалансированными покрытиями. Таким образом, необходимое и достаточное условие существования ядра можно записать в виде

$$\sum_{K\neq A}\lambda^K v(K)\leq v(A)\ \ \forall\lambda\in\Lambda^0. \qquad 5.12$$

Для любой коалиции $K\in A$ определим вектор $\chi(K)\in\mathbb{R}^{|A|}$ по следующему правилу:

$$\chi^a(K)=\begin{cases}1, & a\in K;\\ 0, & a\notin K.\end{cases}$$

Эти векторы являются столбцами матрицы системы уравнений, задающей множество Λ. Для того чтобы сбалансированное покрытие λ было приведенным, необходимо и достаточно, чтобы система векторов $\{\chi(K)\mid\lambda^K>0\}$ была линейно независимой.

Определение 5.20. Семейство $\mathcal{B}$ коалиций называется сбалансированным, если найдется такое приведенное сбалансированное покрытие λ, что $\mathcal{B}=\{K\mid\lambda^K>0\}$.

Примером сбалансированного семейства коалиций является разбиение $\mathcal{B}$ множества A на попарно непересекающиеся подмножества. Для соответствующего приведенного сбалансированного покрытия λ компоненты $\lambda^K = 1$, $K \in \mathcal{B}$. Отметим, что для такого покрытия неравенство из Теорема 5.9 заведомо выполнено в силу супераддитивности характеристической функции. Поэтому приведенные сбалансированные покрытия, отвечающие разбиениям множества A на попарно непересекающиеся подмножества, в дальнейшем нет смысла рассматривать – для них заведомо «все в порядке». Справедлив и более общий результат.

Лемма 5.4. Пусть для приведенного сбалансированного покрытия λ найдутся такие коалиции T и L, что $T \backslash L = \emptyset$; $\lambda^T \geq \lambda^L > 0$. Тогда приведенным сбалансированным является покрытие μ с компонентами

$$\mu^K = \begin{cases} \lambda^T - \lambda^L, & K = T \\ 0, & K = L \\ \lambda^L, & K = T \cup L \\ \lambda^K, \text{для прочих } K \end{cases}$$

Более того, справедливо неравенство:

$$\sum_{K \neq A} \lambda^K v(K) \leq \sum_{K \neq A} \mu^K v(K). \qquad 5.13$$

Лемма 5.4 показывает, что неравенства **5.12** достаточно проверять лишь для тех приведенных сбалансированных покрытий, для которых не существует непересекающихся коалиций T и L с положительными λ^T и λ^L.

В качестве важного примера рассмотрим игры трех и четырех лиц. Для них критерий существования непустого ядра можно записать в достаточно простом виде, который впервые был получен также Ольгой Николаевной Бондаревой в 1963 году.

Рассмотрим кооперативную игру трех лиц. Компоненты вектора $\lambda \in \Lambda^0$ упорядочим следующим образом: $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^{23}, \lambda^{13}, \lambda^{12})$. В этому случае существует ровно пять приведенных сбалансированных покрытий множества A:

$\lambda_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0), \lambda_2 = (1, 0, 0, 1, 0, 0), \lambda_3 = (0, 1, 0, 0, 1, 0), \lambda_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 1), \lambda_5 = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. С учетом результата Лемма 5.4 и того, что существенным из них является только λ_5, условие существования ядра записывается в виде одного простого неравенства: $v(23) + v(13) + v(12) \leq 2v(123)$.

Для игры четырех лиц существенных приведенных сбалансированных покрытий уже намного больше. Тем не менее, их достаточно мало, чтобы свести в следующую таблицу (остальные существенные покрытия отличаются от указанных перестановками номеров игроков):

$\mathcal{B}$	$\lambda^K, K \in \mathcal{B}$
$A\backslash\{a\}, a = 1,2,3,4$	$1/3\,, 1/3\,, 1/3\,, 1/3$
$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4\}$	$1/2\,, 1/2\,, 1/2$
$\{1,2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}$	$2/3\,, 1/3\,, 1/3\,, 1/3$
$\{1,2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3\}$	$1/2\,, 1/2\,, 1/2\,, 1/2$

Таблица 5.1. Существенные приведенные сбалансированные покрытия множества A для кооперативной игры четырех лиц.

Ядро и его различные уточнения для кооперативных игр являются таким же центральным понятием, как равновесие Нэша для игр некооперативных. Тем не менее, как и равновесие Нэша, концепция ядра обладает рядом недостатков. Во-первых, как правило, непустое ядро представляет собой континуальное множество, что приводит к необходимости разработки дополнительного механизма выбора какого-то дележа из ядра, который был бы «лучше» остальных элементов ядра. Во-вторых, зачастую ядро кооперативной игры вообще не существует. Например, достаточно легко показать, что пустым оказывается ядро в любых кооперативных играх с постоянной суммой.

Приведенных аргументов уже достаточно для того, чтобы рассмотреть иной подход к определению «справедливого» дележа. Рассмотрим самый известный из таких подходов, носящий имя Ллойда Шепли, нобелевского лауреата по экономике 2012 года. Этот подход идейно основан на том, что выплаты каждому игроку зависят от его «вкладов» во все возможные коалиции с его участием. Определим формально понятие вклада игрока в коалицию.

Определение 5.21. Вкладом игрока $a \in A$ в коалицию $K \subseteq A$ называется величина $v(K) - v(K \backslash A)$.

Иными словами, вклад игрока в коалицию есть та сумма, которую «теряет» коалиция, если из нее данного игрока исключить. Назовем игрока нулевым, если его вклад в любую коалицию равен нулю ($\forall K \subseteq A\,\{a\}: v(K \cup \{a\}) = v(K)$). Определим вектор Шепли – специальный дележ, в котором игроку выплачивается средняя величина его вклада во все коалиции с его участием.

Определение 5.22. Вектором Шепли кооперативной игры $\mathcal{K} = \langle A, v \rangle$ называется вектор $\varphi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_{|A|}\right)$, где φ_a определяется по правилу:

$$\varphi_a = \sum_{K:a\in K} \frac{(|K|-1)!\cdot(|A|-|K|)!}{|A|!}\big(v(K) - v(K\backslash\{a\})\big).$$

Элементы вектора Шепли для каждого игрока представляют собой математическое ожидание вклада игрока в коалиции с его участием, когда произвольная коалиция A образуется в результате следующего случайного процесса. Сначала с вероятностью $1/|A|$ выбирается игрок a_1, затем из оставшихся $|A|-1$ игроков с вероятностью $1/(|A|-1)$ выбирается игрок a_2 и присоединяется к игроку a_1 и т.д. На каждом шаге процесса образуется коалиция вида $\{a_1 a_2 \dots a_l\}$. В результате с вероятностью $1/|A|!$ будет выбрана перестановка игроков $a_1, \dots, a_{|A|}$. При таком процессе образования коалиций вероятность образования коалиции вида $A\backslash\{a\}$ для любого игрока составляет $\frac{(|K|-1)!\cdot(|A|-|K|)!}{|A|!}$, а его вклад в эту коалицию - $v(K) - v(K\backslash\{a\})$. Таким образом, вклад игрока представляет собой случайную величину с указанным законом распределения, а ее математическое ожидание и задает элемент вектора Шепли рассматриваемой игры, соответствующий игроку.

Чем так хорош вектор Шепли? Во-первых, он всегда существует, причем является единственным. Во-вторых, его нахождение проще, чем поиск ядра. В-третьих, элементы вектора Шепли для игроков имеют важный содержательный смысл – они показывают «силу» и «влиятельность» игроков. Наконец, вектор Шепли – это единственный способ распределения общего выигрыша, который:

- симметричен: $\varphi_i = \varphi_j$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции K, не содержащей ни i, ни j, приводит к одинаковому увеличению выигрышу этой коалиции: $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$;

- аддитивен: для любых двух игр $\mathcal{K} = \langle A, v \rangle$, $\mathcal{K}' = \langle A, v' \rangle$ и «суммарной» игры $\widehat{\mathcal{K}} = \langle A, \hat{v} \rangle$ такой, что $\hat{v} = v + v'$, векторы Шепли связаны равенством $\hat{\varphi} = \varphi + \varphi'$, где $\hat{\varphi}$, φ и φ' - векторы Шепли игр $\widehat{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ соответственно;
- приписывает нулевой выигрыш нулевым игрокам.

К сожалению, при всех указанных преимуществах вектор Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому, вообще говоря, не является даже дележом. Кроме того, в общем случае он может не принадлежать ядру и потому быть неустойчивым к отклонениям отдельных коалиций. Подобные рассуждения привели Дэвида Шмайдлера в 1969 году к формулировке понятия N-ядра[12]. Основная идея понятия состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций.

Определение 5.23. Эксцессом (дефицитом) $e(K, y)$ коалиции $K \subseteq A$ относительно дележа y называется величина $v(K) - \sum_{a \in K} y^a$.

Очевидно, что для дележей, принадлежащих -ядру (в исходном смысле, согласно Определение 5.19) эксцессы всех коалиций неположительны (т. е. «дефициты» являются на самом деле излишками). А -ядром (сердцевиной, ядрышком) является такой дележ, в котором нельзя уменьшить эксцесс ни одной коалиции K_1,

[12] от английского «nucleolus» – сердцевина, ядрышко.

не сделав так, чтобы эксцесс какой-либо другой коалиции K_2 не оказался больше эксцесса той коалиции K_1.

Определение 5.24. N-ядром кооперативной игры $\mathcal{K} = \langle A, v \rangle$ называется дележ y, соответствующий минимуму отношения лексикографического порядка на множестве векторов эксцессов всех возможных коалиций относительно всех дележей.

N-ядро, помимо очевидной трактовки и «справедливости» распределения выигрыша с точки зрения здравого смысла, обладает очень важными свойствами, которые доказал Д.Шмайдлер.

Теорема 5.10 (Шмайдлера). N-ядро кооперативной игры существует и единственно. Кроме того, если непусто C-ядро, то N-ядро ему принадлежит.

В завершение настоящего раздела приведем итеративный «наивный» алгоритм поиска $\boldsymbol{N}$-ядра кооперативной игры, основанный на последовательном уменьшении эксцесса коалиций с наибольшим «дефицитом» выигрыша. В качестве первого приближения возьмем любой дележ y_0 (например, пропорциональный «одиночным» выигрышам игроков: $y_0^a = v(A) \cdot v(a) / \sum_{a \in A} v(a)$). Для него рассмотрим коалицию K_0 с наибольшим эксцессом $e(K_0, y_0) = \min\limits_{K \subset A} e(K, y_0)$ и, если это возможно, построим новый дележ y_1 с меньшим эксцессом $e(K_0, y_1)$ для коалиции K_0. Для дележа y_1 находим коалицию K_1 с максимальным эксцессом $e(K_1, y_1) = \min\limits_{K \subset A} e(K, y_1)$, строим дележ y_2, уменьшающий ее эксцесс и т.д. Итеративный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\hat{y}$, для которого невозможно уменьшить максимальный эксцесс. Он и является -ядром кооперативной игры $\mathcal{K} = \langle A, v \rangle$.

К сожалению, и концепция $\boldsymbol{N}$-ядра обладает определенными недостатками. Главной из них является вычислительная сложность его поиска. Нахождение $\boldsymbol{N}$-ядра с помощью определения является весьма трудоемким даже для игр с небольшим числом игроков, так как речь идет о поиске лексикографического минимума на множестве векторов в пространстве размерности $2^{|A|}$.

Пример 5.11 («Джазовый оркестр»; Янг, 1979). Владелец ночного клуба в Париже обещает \$1000 певцу (игрок 1), пианисту (игрок 2) и ударнику (игрок 3) за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в \$800, ударника и пианиста − в \$650 и одного пианиста в \$300. Дуэт певец−ударник зарабатывает \$500 за вечер в одной станции метро, певец зарабатывает \$200 за вечер в открытом кафе. Ударник один ничего не может заработать.

Запишем задачу распределения заработанных оркестром денег как кооперативную игру. Обещанные владельцем клуба деньги суть значение характеристической функции, а варианты состава группы, от которого зависит заработок, есть не что иное как коалиций. Имеем: $v(123) = 1000$, $v(12) = 800$, $v(23) = 650$, $v(2) = 300$. Аналогично, заработки музыкантов «на стороне» также войдут в характеристическую функцию: $v(13) = 500$, $v(1) = 200$, $v(3) = 0$. Таким образом, мы определили полностью $\boldsymbol{v}(\cdot)$, задав ее значения для всех возможных коалиций. Проверим, является ли эта функция супераддитивной:

$$v(12) + v(3) = 800 + 0 = 800 < 1000 = v(123)$$

$$v(13) + v(2) = 500 + 300 = 800 < 1000 = v(123)$$

$$v(23) + v(1) = 650 + 200 = 850 < 1000 = v(123)$$

$$v(1) + v(2) = 200 + 300 = 500 < 800 = v(12)$$

$$v(1) + v(3) = 200 + 0 = 200 < 500 = v(13)$$

$$v(2) + v(3) = 300 + 0 = 300 < 650 = v(23)$$

Характеристическая функция $\boldsymbol{v}$ рассматриваемой задачи является **супераддитивной**. Найдем ядро ($\boldsymbol{C}$-ядро) построенной кооперативной игры. По теореме Бондаревой-Шепли (точнее, по ее следствию, обозначенному как **Лемма 5.4**), ядро кооперативной игры трех лиц непусто тогда и тольео тогда, когда $v(23) + v(13) + v(12) \leq 2v(123)$. В рассматриваемом случае: $650 + 500 + 800 = 1950 < 2000 = 2 \cdot v(123)$. Ядро непусто, оно представляет собой множество всех дележей таких, что для любой нетривиальной коалиции $K \neq A$ $\sum_{a \in K} y^a \geq v(K)$. Имеем:

$$\begin{cases} y^1 + y^2 + y^3 = 1000 \\ y^1 + y^2 \geq v(12) = 800 \\ y^1 + y^3 \geq v(13) = 500 \\ y^2 + y^3 \geq v(23) = 650 \\ y^1 \geq v(1) = 200 \\ y^2 \geq v(2) = 300 \\ y^3 \geq v(3) = 0 \end{cases}$$

Обратим внимание, что из первого условия (равенства) в данной системе можно выразить $y^3 = 1000 - y^1 - y^2$ и перейти к изучению системы неравенств относительно двух переменных:

$$
\begin{cases}
1000 - y^1 - y^2 \geq 0 \\
y^1 + y^2 \geq 800 \\
y^1 + 1000 - y^1 - y^2 \geq 500 \\
y^2 + 1000 - y^1 - y^2 \geq 650 \\
y^1 \geq 200 \\
y^2 \geq 300
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
800 \leq y^1 + y^2 \leq 1000 \\
300 \leq y^2 \leq 500 \\
200 \leq y^1 \leq 350
\end{cases}
$$

Решение этой системы удобно изобразить в виде проекции ядра на координатную плоскость (y^1, y^2). Она приведена на Рисунок 5.7.

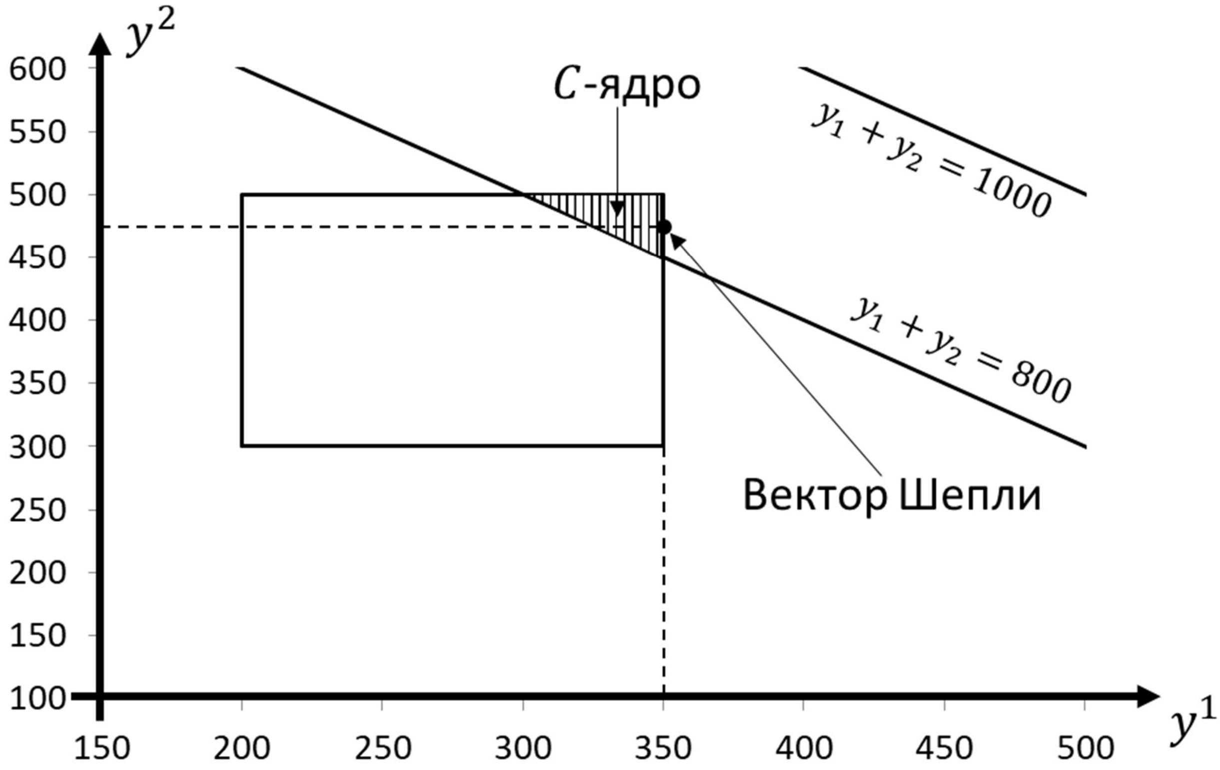


Рисунок 5.7. Проекция $\boldsymbol{C}$-ядра на координатную плоскость в задаче «Джазовый оркестр» (Пример 5.11).

Теперь найдем вектор Шепли игры «Джазовый оркестр». По определению, для каждого игрока $a = 1,2,3$:

$$
\varphi_a = \sum_{K: a \in K} \frac{(|K| - 1)! \cdot (|A| - |K|)!}{|A|!} \big(v(K) - v(K \backslash \{a\})\big).
$$

Для начала определим вклады игроков в каждую из коалиций, куда он может войти. Для первого игрока имеем четыре коалиции, куда он может войти: $\{123\}, \{12\}$, $\{13\}$ и «одиночная» коалиция $\{1\}$. Имеем: $v(123) - v(23) = 1000 - 650 = 350$ (вклад игрока 1 в «большую» коалицию), $v(12) - v(2) = 800 - 300 = 500$, $v(13) - v(3) = 500$ и $v(1) - v(\emptyset) = 200$. Тогда элемент вектора Шепли для первого игрока равен:

$$\varphi^1 = \frac{(3-1)!\,(3-3)!}{3!} \cdot 350 + \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!} \cdot 500 +$$

$$+ \frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!} \cdot 500 + \frac{(1-1)!\,(3-1)!}{3!} \cdot 200 =$$

$$= \frac{2!\,0!}{3!} \cdot 350 + \frac{1!\,1!}{3!} \cdot 1000 + \frac{0!\,2!}{3!} \cdot 200 =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot 350 + \frac{1}{6} \cdot 1000 + \frac{2}{6} \cdot 200 = \frac{700 + 1000 + 400}{6} = \frac{2100}{6} = 350.$$

Аналогичные расчеты можно провести для второго и третьего игроков, что приведет к значениям $\varphi^2 = 475$ и $\varphi^3 = 175$. Проверим, принадлежит ли он найденному ранее ядру игры. Имеем: ядро – множество $C = \{(y^1, y^2, y^3) | y^3 = 1000 - y^1 - y^2; 200 \le y^1 \le 350;\ 300 \le y^2 \le 500; 800 \le y^1 + y^2 \le 1000\}$. Подставим в неравенства элементы вектора Шепли $\varphi = (350, 475, 175)$: $\varphi^3 = 175 = 1000 - 350 - 475$; $\varphi^1 + \varphi^2 = 825 \in [800{,}1000]$; $\varphi^1 = 350 \in [200, 350]$ и $\varphi^2 = 475 \in [300, 500]$. Вектор Шепли принадлежит ядру, находясь на его границе. Рисунок 5.7 также показывает положение проекции вектора Шепли на координатную плоскость (y^1, y^2).

Заметим, что для поиска вектора Шепли можно использовать и иной способ, основанный на использовании перестановок. При случайном процессе образования коалиций, описанном ранее в данном разделе, с вероятностью $1/6$ образуются шесть перестановок вида $\{a_1 a_2 a_3\}$. Для каждой перестановки определяем последовательно вклады игроков – a_1 в коалицию $\{a_1\}$, игрока a_2 в коалицию $\{a_1 a_2\}$ и игрока a_3 в коалицию $\{a_1 a_2 a_3\}$ – и заносим их в таблицу:

Перестановка	Вклад игрока 1	Вклад игрока 2	Вклад игрока 3
$\{123\}$	$v(1) - v(\emptyset)$ $= 200$	$v(12) - v(1)$ $= 800 - 200$ $= 600$	$v(123) - v(12)$ $= 1000 - 800 =$ $= 200$
$\{132\}$	$v(1) - v(\emptyset)$ $= 200$	$v(123) - v(13)$ $= 1000 - 500$ $= 500$	$v(13) - v(1)$ $= 500 - 200 =$ $= 300$
$\{213\}$	$v(12) - v(2)$ $= 800 - 300$ $= 500$	$v(2) - v(\emptyset)$ $= 300$	$v(123) - v(12)$ $= 200$
$\{231\}$	$v(123) - v(23)$ $= 1000 - 650$ $= 350$	$v(2) - v(\emptyset)$ $= 300$	$v(23) - v(2)$ $= 650 - 300$ $= 350$
$\{312\}$	$v(13) - v(3)$ $= 500$	$v(123) - v(13)$ $= 1000 - 500$ $= 500$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
$\{321\}$	$v(123) - v(23)$ $= 350$	$v(23) - v(3)$ $= 650$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
Вектор Шепли	$\varphi^1 = \frac{1}{6} \times$	$\varphi^2 = \frac{1}{6} \times$	$\varphi^3 = \frac{1}{6} \times$

	$\times (200 + 200 + 500 + 350 + 500 + 350) = 350$	$\times (600 + 500 + 300 + 300 + 500 + 650) = 475$	$\times (200 + 300 + 200 + 350) = 175$

Таблица 5.2. Вклады игроков в коалиции и расчет вектора Шепли для игры «Джазовый оркестр» (Пример 5.11).

Как можно видеть из Таблица 5.2, вектор Шепли при таком расчете оказался таким же, как и при «прямом» расчете по определению (значит, он был найден верно). Оба способа поиска равнозначны, можно использовать любой из них (при этом второй можно использовать для самопроверки). ■

6. Задачи и упражнения для самостоятельного решения (тематический блок «Статические игры общего вида»).

1. Докажите, что функция $\sum_{i=1}^{n} z_i^2$ строго выпукла по совокупности переменных $(z_1, \dots, z_n)$.

2. Докажите, что строго выпуклая непрерывная функция на выпуклом компакте евклидова пространства достигает минимума в единственной точке.

3. Найти седловую точку функции $F(x, y) = -x^2 + y^3 + xy^2 - 4y$ на множестве $X \times Y = [0,1] \times [0,1]$.

4. В антагонистической игре выигрыш первого игрока задается функцией $F(x, y) = xy^2 - x^2 - y^2/2$. Стратегии первого игрока принадлежат множеству $X = [0,1]$, второго – множеству $Y = [-1,1]$. Найдите все равновесия в этой игре.

5. Докажите **Утверждение 5.1**.

6. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-2,3], y \in [-3,2]$ задана функциями выигрыша $F(x, y) = -x^2 + 6xy + 12; G(x, y) = 2 + 10xy - 5y^2$. Проверить условия Теоремы о существовании равновесия. Построить функции наилучшего ответа и найти точку (точки) равновесия.

7. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,2], y \in [-2,1]$ задана функциями выигрыша $F(x, y) = -x^2 + 3xy - 8; G(x, y) = \frac{xy}{2} - y^2$. Проверить условия Теоремы о существовании равновесия. Построить функции наилучшего ответа и найти точку (точки) равновесия.

8. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [0,2], y \in [-1,1]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 4xy + 3; G(x,y) = -2y + \frac{xy}{2} - y^2$. Проверить условия Теоремы о существовании равновесия. Построить функции наилучшего ответа и найти точку (точки) равновесия.

9. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [0,2]$, $y \in [0,1]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = 8xy - x^2$, $G(x,y) = (x-y)^2 - x^2 + 3xy - 2y$. Найти равновесия Нэша.

10. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,1], y \in [-2,2]$задана функциями выигрыша $F(x,y) = 2xy - x^2, G(x,y) = 2y^2 + 6xy - 7$. Найти равновесия Нэша.

11. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-3,3], y \in [-2,2]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = -2x^2 + 7xy - 9; G(x,y) = 2 + 6xy - 3y^2$. Проверить условия Теоремы о существовании равновесия. Построить функции наилучшего ответа и найти точку (точки) равновесия.

12. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,3], y \in [-3,5]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = -x^2 + 6xy + 12; G(x,y) = 4 - 10xy + 5y^2$. Проверить условия Теоремы о существовании равновесия. Построить функции наилучшего ответа и найти точку (точки) равновесия, если они есть.

13. В игре двух лиц выигрыш первого игрока задается функцией $F(x,y) = 4xy - 2x^2 + 3x + 5$, а второго – $G(x,y) = y^2/2 - xy^2 + x^2$. Стратегии первого игрока принадлежат множеству $X = [0,1]$, второго – множеству $Y = [-1,1]$. Найдите все равновесия в этой игре.

14. (Захаров, 2010). На необитаемом острове живут два туземца. Их единственное богатство — бананы. У первого туземца в наличии 8 бананов, у второго – 10. Каждый туземец может либо съесть банан, либо принести его в жертву местному божеству, ответственному за хорошую погоду на острове. Пусть x_i — количество съеденных бананов, g_i — количество бананов, принесенных в жертву. Выигрыш каждого туземца равен $U_i = a_i \ln x_i + \ln(g_1 + g_2)$. Сформулируйте конфликт туземцев в виде игры в нормальной форме и найдите получающиеся в ней равновесия Нэша.

15. Рассмотрим игру на плоскости ($X = Y = \mathbb{R}$) со следующими функциями выигрыша игроков:

$$F(x, y) = -x^2 - xy - \beta x$$

$$G(x, y) = -y^2 + \alpha xy + y$$

где $x \in X$ — стратегия первого игрока, $y \in Y$ — стратегия второго. При каких значениях параметров α и β существует равновесие по Нэшу? При каких значениях параметров оно будет единственным? В каком случае в равновесии будет максимизирована суммарная полезность игроков (то есть $\max\limits_{x,y \in \mathbb{R}}\{F(x, y) + G(x, y)\}$)?

16. (модель горизонтальной конкуренции Гарольда Хотеллинга). Между некоторыми городами A и B построена дорога длиной 100 километров. По дороге едет очень большое количество автомобилей. Формально будем полагать, что автомобилей континуум, а их общий «вес» равен единице. Введем на дороге систему координат с началом отсчета в городе А: городу А соответствует координата 0, городу В – 100 км. Будем считать, что автомобили распределены по дороге равномерно: то есть для каждого $x \in [0{,}100]$ доля автомобилей с

координатами $v \leq x$ равна $x\%$. Две фирмы намереваются построить на этой дороге по заправке, их стратегиями является выбор координаты $x_i \in [0,100]$ – то есть на каком километре трассы следует расположить их АЗС. Цена на бензин у обеих фирм одинаковая (не ограничивая общности, положим ее равной единице) и не зависит от их местоположения. Предположим, что каждый автомобилист предъявляет спрос ровно на одну единицу топлива. При этом он купит бензин у той фирмы, чья заправка расположена ближе к его координате. В том случае, если заправки равноудалены от автомобилиста, он с равной вероятностью может выбрать любую из фирм. Пусть выигрыш фирмы равен доле автомобилистов, которые приобрели у нее бензин.

a. Построить игру в нормальной форме для данного взаимодействия и найти равновесные координаты для обеих заправок.

b. Как изменится равновесное расположение заправок, если распределение водителей задается функцией $F(x)$, описывающей долю автомобилей с координатами $v \leq x$?

17. На рынке присутствуют n фирм, которые независимо друг от друга решают, сколько средств следует вложить в некоторую инновационную технологию, которая сможет изменить всю отрасль. Вероятность получения патента первой для фирмы i пропорциональна ее доле в общих затратах отрасли на инновации и равна $p_i = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^{n} c_j}$, где c_i есть затраты на инновации фирмы i. Ценность патента для всех фирм одинакова и равна R.

a. Сформулируйте ситуацию на рынке в виде игры в нормальной форме, если затраты на инновации фирм потенциально не ограничены, а в качестве выигрыша фирмы воспринимают ожидаемую прибыль от получения патента.

b. Докажите, что в получающейся игре существует равновесие Нэша, и найдите его.

c. Исследуйте, как суммарные равновесные затраты всех фирм на инновации зависят от числа фирм в отрасли.

d. Пусть в отрасль могут входить новые фирмы, однако вход сопряжен с постоянными затратами в размере f. Сколько фирм «выдержит» отрасль?

18. Есть покупатель и продавец некого товара. Покупатель оценивает товар в $v \in [0,1]$ единиц, продавец – в $c \in [0,1]$ единиц. Покупатель и продавец одновременно называют цену, по которой они хотят купить/продать товар. Пусть p_1 – цена продавца, p_2 – цена покупателя. Обмен происходит только тогда, когда $p_1 \leq p_2$, и проводится по цене $p = (p_1 + p_2)/2$.

a. Найдите равновесие Нэша.

b. Найдите цены, максимизирующие суммарный выигрыш участников торга.

19. Два охотника ($i = 1, 2$) охотятся в одном лесу. Количество дичи, добываемой i-м охотником ($y_i \geq 0$), зависит от его усилий (x_i) и общего количества дичи в лесу (z) как $y_i = x_i z$. Последнее зависит от их усилий по следующему закону: $z = 6 - x_1 - x_2$. Пусть выигрыш охотников представляет общий объем пойманной ими дичи.

a. Найдите равновесие Нэша.

b. Найдите Парето-оптимальные стратегии охотников.

20. Месторождение нефти расположено под участками, принадлежащими двум различным нефтяным компаниям. Объем добычи компании $(y_i \geq 0)$ зависит от интенсивности добычи, которую она выбирает (x_i), составляя $\frac{x_i}{1+x_1+x_2}$ долю от общих запасов нефти в месторождении (1000 баррелей). Рыночная цена нефти - 15 песо за баррель, издержки на добычу одного барреля равны $(3 + x_i)$ песо. Сформулируйте взаимодействие фирм в виде игры в нормальной форме и найдите для нее равновесия Нэша.

21. Рассмотрим рынок однородного товара. Пусть функция спроса $D(p) = 40 - 2p$, на рынке действуют три производителя, чьи функции издержек равны $c_1(q) = q$, $c_2(q) = q^2$ и $c_3(q) = q + q^2$. Фирмы конкурируют по Курно, выбирая максимальный объем производства. Найдите равновесный исход, возникающий на данном рынке.

22. Рассмотрим рынок однородного товара. Пусть функция спроса $D(p) = 100 - p$, на рынке действуют три производителя, чьи функции издержек равны $c_1(q) = q$, $c_2(q) = q^2$ и $c_3(q) = q + 5q^2$. Фирмы конкурируют по Курно, выбирая максимальный объем производства. Найдите равновесный исход, возникающий на данном рынке.

23. Рассмотрим рынок однородного товара. Пусть функция спроса $D(p) = 15/p^2$, на рынке действуют три производителя, чьи функции издержек равны $c_1(q) = q$, $c_2(q) = q^2$ и $c_3(q) = q + 5q^2$. Фирмы конкурируют по Курно, выбирая максимальный объем

производства. Найдите равновесный исход, возникающий на данном рынке.

24. Пусть на олигополистическом рынке функционируют три олигополиста с функциями издержек $c_1(y_1) = \frac{y_1^2}{2}$, $c_2(y_2) = \frac{y_2^2}{4}$ и $c_3(y_3) = \frac{y_3^2}{10}$. Обратная функция спроса на продукцию олигополистов имеет вид $p(Y) = 1 - Y$.

a. Найдите равновесие Курно.

b. Покажите, что картельное соглашение между этими фирмами неустойчиво, т. е. каждая фирма, нарушив его, может получить б***о***льшую прибыль.

c. Запишите условия для поиска переговорного множества фирм, если объединение в картель невозможно, но фирмы могут вступать в сговор.

25. На длинной улице в 100 километров проживают граждане, плотность распределения которых вдоль улицы равномерна. Две магазинные сети – «Алфавит гурмана» и «Планета вкуса» - хотят разместить свои магазины на данной улице. Для потребителя, живущего от какого-либо магазина на расстоянии y, его посещение сопряжено с транспортными издержками в размере $c(y) = 3y^2$ единиц. Каждый потребитель покупает ровно одну единицу товара в одном из двух магазинов, при этом его «чистая» полезность от потребления этой единицы равна s_1 для «Алфавита гурмана» и s_2 для «Планеты вкуса». Производство одной единицы товара для магазинов составляет c_1 и c_2 соответственно. Пусть «Алфавит гурмана» построил магазин на расстоянии 10 километров от начала улицы, а

«Планета вкуса» - на расстоянии 20 километров – от конца, а единица товара обходится магазинам в $c_1 = 6$ и $c_2 = 3$ рубля соответственно. Пусть резервные цены товаров одинаковы и равны $s_1 = s_2 =300$ рублям. Найдите характеристики равновесные цены на товары обоих магазинов и их прибыли.

26. Пусть две фирмы, выпускающие два разных, но связанных в потреблении товара, выбирают цены $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, которые влияют на объемы спроса. Функции спроса заданы уравнениями $y_1(p_1, p_2) = 6 - 2p_1 + 2p_2$ и $y_2(p_1, p_2) = 10 - 3p_2 + 2\,p_1$, если предельные издержки у обеих фирм постоянны и равны 1.

d. Найти равновесные цены.

e. Рассчитайте, какие бы цены выбрала двухпродуктовая монополия, возникающая при картельном сговоре фирм и максимизирующая их суммарную прибыль.

27. Докажите, что справедлива Теорема 5.8.

28. («Трагедия общин», Бусыгин, 2008) Пусть каждый из m фермеров ($i = 1, \ldots, m$) выбирает размер своего стада коров $y_i > 0$. Для его выпаса используется общественное пастбище со свободным доступом на него коров, принадлежащих данным фермерам. Все коровы одинаковы, и одна корова дает ϕ молока, при чем это количество зависит от размера всего стада, т. е. $\phi = \phi(Y)$. Если фермер имеет y_i коров, то он получает от них $y_i \phi(Y)$ молока.

a. Найдите равновесие Нэша.

b. Найдите Парето-оптимальную ситуацию. Попробуйте объяснить причины различных ответов в пунктах a и b.

29. (Мас-Колелл, Уинстон, Грин, 1995) В группе из m студентов каждый -й студент учится по h_i часов в неделю. Эти усилия уменьшают его уровень полезности на величину $h_i^2/2$. В то же время это дает студенту добавку к стипендии, так что его полезность увеличивается на $\varphi(h_i/\overline{h})$, где $\overline{h}$ – среднее количество часов, которое посвящают учебе студенты данной группы, а $\varphi(\cdot)$ – дифференцируемая функция с положительной убывающей производной. Найдите равновесие Нэша в данной игре.

30. Пусть спрос в отрасли задается обратной функцией спроса $p(y) = a - by$ и имеется n фирм, конкурирующих по Курно. Пусть фирмы имеют постоянные, но, возможно, неодинаковые предельные издержки c_i. Охарактеризуйте равновесие в данной отрасли в зависимости от параметров.

31. Пусть общие издержки каждой из фирм в модели Курно постоянны $c_j(y_j) = f_j$, а обратная функция спроса равна $p(y) = exp(-y)$.

a. Покажите, что у каждой фирмы есть доминирующая стратегия, и найдите ее.

b. Как будет изменяться суммарный выпуск отрасли с увеличением числа фирм?

32. Пусть два друга играют в следующую игру. Каждый из игроков независимо от своего напарника выбрать точку на плоскости из квадрата $[0,1] \times [0,1]$. Первый игрок хочет минимизировать расстояние между точками, второй – напротив, максимизировать. Запишите их взаимодействие в виде антагонистической игры с

вогнутой функцией выигрыша и решите ее (возможно, понадобится смешанное расширение).

33. Поручик Ржевский и корнет Оболенский поспорили за сердце прекрасной Наташи Ростовой и вызвали друг друга на дуэль. Выбор оружия и места проведения дуэли привели к тому, что ни один из ее участников не в состоянии услышать выстрел, сделанный соперником. Дуэль происходит по следующим правилам: дуэлянты расходятся на 100 шагов, решают, с какого расстояния делать выстрел, и идут навстречу друг другу, стреляя с выбранного положения. Если дуэлянт промахивается по сопернику, то тот отказывается от выбранной тактики, подходя и стреляя в него в упор, что приводит к гарантированному убийству. Вероятность поразить соперника зависит от расстояния, с которого делается выстрел. У поручика, как боевого офицера, она линейно зависит от расстояния: $p_1(d) = 1 - d/100$, где d – количество шагов, с которого делается выстрел. У неопытного корнета меткость убывает с расстоянием квадратично: $p_2(d) = 1 - (d/100)^2$. Используя классическую модель бесшумной дуэли, запишите противостояние поручика и корнета в виде антагонистической игры в нормальной форме и найдите ее решение.

34. Докажите, что справедлива Лемма 5.4.

35. Докажите, что для любой симметричной кооперативной игры (т.е. такой, в которой характеристическая функция зависит только от количества участников коалиций, но не от их состава: $v(K) = v_{|K|}$ $\forall K \subset A$) вектор Шепли также симметричен и имеет вид $\varphi = \left(v_{|A|}/|A|, \dots, v_{|A|}/|A|\right)$.

36. Некий гражданин N получил в трех конторах займы, которые вынужден одновременно вернуть. Первой конторе он должен 20 тысяч рублей, второй – 10 тысяч, а третьей – 30 тысяч. Собрав все свои деньги, N понял, что не сможет отдать всем фирмам долг, так как располагает всего лишь 36 тысячами рублей. Рассматривая процесс разделения конторами этих 36 тысяч рублей как кооперативную игру, запишите характеристическую функцию и найдите ее ядра (C и N) и вектор Шепли.

37. Рассмотрим две пары матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Первый игрок выбирает номер строки i, второй − номер столбца j, а третий игрок выбирает номер пары $k \in \{1, 2\}$. Выигрыш первого игрока равен a_{kij}, второго – b_{kij}, а третьего – $c_{kij} = 10 - a_{kij} - b_{kij}$.

a. Рассматривая эту игру как конечную некооперативную игру в нормальной форме, найдите в ней равновесие в чистых стратегиях (или докажите, что его не существует).

b. Запишите взаимодействие игроков как кооперативную игру, определив значение характеристической функции $v(K)$ для всех возможных коалиций K.

c. Найдите C-ядро построенной кооперативной игры. Попадет ли в него вектор выигрышей игроков, соответствующих равновесию Нэша?

38. (Писарук, 2012) Имеется три фирмы. Фирма 1 может выпускать товары типа 1 в кол-ве 900 единиц, фирма 2 — товары

типа 1 в количестве 700 единиц, фирма 3 — товары типа 2 в количестве 1000 единиц. Товары первого и второго типов продаются только комплектами: одна единица товара 1 и одна единица товара 2. Единица обоих товаров стоит \$1. Фирмы ожидают спрос на 1000 комплектов. Предполагается, что все фирмы договариваются о сотрудничестве и совместно выходят на рынок, формируя коалиции, получающие общую прибыль.

a. Запишите взаимодействие фирм в виде кооперативной игры, проверьте супераддитивность получаемой характеристической функции.

b. Найдите C-ядро полученной кооперативной игры.

c. Найти вектор Шепли кооперативной игры, выяснить, принадлежит ли он C-ядру.

39. Найти C-ядро кооперативной игры со следующей характеристической функцией: $v(\emptyset) = v(2) = 0, v(1) = v(3) = 1, v(123) = 8, v(12) = 4, v(13) = 3, v(23) = 5$.

40. (Писарук, 2012) Совет Безопасности ООН состоит из 5 постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию) и 10 непостоянных. Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее 9 членов, включая всех постоянных членов. Пусть выигрыш коалиции, способной принять решение, равен 1, а выигрыш любой другой коалиции – нулевой. Сформулируйте модель голосования в виде кооперативной игры, найдите ее C-ядро и вектор Шепли.

7. Многошаговые игры.

7.1. Иерархические игры двух лиц. Гамма-модели (Γ_1 и Γ_2). Теорема Гермейера о существовании равновесия в игре Γ_2.

Во всех предыдущих случаях мы рассматривали игры, в которых игроки принимали решения одновременно и не зная о выборе своих соперников. Однако в ряде случаев такое допущение оказывается неверным – часто игроки принимают решения последовательно, и к моменту принятия решения очередным индивидом уже известно, как повели себя те, кто уже «сделал ход». Многие реальные конфликтные ситуации имеют длительный характер. Их участники действуют последовательно и с учетом информации о предшествующем развитии конфликта. Таким образом, это приводит к необходимости построения игровых моделей, учитывающих последовательность принятия решений игроками, а также информационную асимметрию. В теории игр для этого используются различные модели с «неравенством» игроков – как в смысле различной очередности хода, так и в смысле разной степени осведомленности о поведении их соперников.

Первый класс подобных теоретико-игровых моделей, который нам предстоит рассмотреть, – это **иерархические игры**. В этом разделе мы рассмотрим игры двух лиц, в которых игроки прежде, чем выбрать стратегии $x \in X, y \in Y$, предварительно обмениваются информацией о своих выборах. Такого рода игры описывают взаимодействие между верхним и нижним звеньями управления (начальником и подчиненным, центром и производителем продукции и т. п.). Далее, не ограничивая общности, предполагается, что первый игрок осуществляет управление вторым игроком и делает сообщение первым. Для более краткого описания таких схем взаимодействия будем дальше использовать краткий вариант записи, просто называя первого игрока «игрок-лидер», а второго – «игрок-ведомый».

В основе любой иерархической игры лежит статическая игра в нормальной форме $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$. Это может быть как биматричная игра, так и непрерывная, при этом функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывны на произведении $X \times Y$ компактов метрических пространств. Прежде, чем выбрать стратегию, первый игрок сообщает о своем выборе второму. Нас интересует наилучший гарантированный результат, который может получить игрок-лидер. Типы иерархических игр отличаются порядком ходов и формой сообщений.

Первый важный пример иерархических игр - Игра Γ_1. Игрок-лидер выбирает стратегию $x \in X$ и сообщает ее ведомому. Затем ведомый выбирает стратегию $y \in Y$, уже зная x. Смысл подобных сообщений очевиден в тех случаях, когда интересы игроков близки. Например, если вы решили с кем-нибудь встретиться, то сообщаете, куда придете (вспомните, например, игру «Встреча в городе» или «Семейный спор»). Игра Γ_1 является неантагонистической одношаговой игрой с полной информацией. Подобные игры могут иметь и несколько вариантов экономической интерпретации. Одна из них: игрок-лидер (центр) сообщает ведомому игроку (производителю продукции) цену x на продукцию. Второй игрок выпускает продукцию в количестве y, зная цену x. Еще один вариант применения игры Γ_1 в математической экономике – классическая микроэкономическая модель дуополии Штакельберга, в которой действует фирма-лидер, первой определяющая объем выпуска товара, и фирма-ведомая, которая выбирает стратегию уже после нее – и работает, по сути, с остаточным спросом на товар.

Игру Γ_1 можно записать и в привычной нам нормальной форме. Второй игрок использует стратегии-отображения вида $g: X \to Y$, по своему смыслу являющиеся функциями реакции на стратегию игрока-лидера. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{g\}$. Тогда $\Gamma_1 = \langle X, \{g\}, F(x, g), G(x, g) \rangle$, где $F(x, g) = F(x, g(x))$, $G(x, g) = G(x, g(x))$ – функции выигрыша игроков в «базовой» игре, где на место стратегии второго игрока подставлена функция реакции второго игрока на стратегию первого.

Найдем наилучший гарантированный результат F_1 первого игрока в игре Γ_1. Так как все игроки преследуют цель максимизации собственного выигрыша, ведомый игрок, зная x, выбирает $y \in Y(x) = \operatorname*{Argmax}_{y \in Y} G(x, y)$ – произвольную стратегию из своего множества наилучшего ответа на этот x (если таких стратегий несколько, то все они должны давать одинаковый выигрыш, поэтому можно выбрать любую из них). Первый игрок знает функцию выигрыша второго игрока, ему также известно, что второй будет выбирать стратегию из множества $Y(x)$, но он не знает конкретного выбора $y \in Y(x)$. Для того, чтобы оценить эффективность стратегии x, игрок-лидер должен найти свой наименьший выигрыш при использовании ведомым наилучшего с его точки зрения ответа на эту стратегию: $W(x) =$

$\min_{y \in Y(x)} F(x,y)$. Эта величина называется оценкой эффективности (гарантированным результатом) стратегии x. Тогда наилучший гарантированный результат игрока-лидера – это максимальное значение выигрыша, которого он может добиться, управляя своими стратегиями. Иными словами, это максимальная оценка эффективности среди его стратегий: $F_1 = \max_{x \in X} W(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x,y)$.

Другой тип иерархических игр – это игра типа Γ_2. Первый игрок перед выбором x имеет полную информацию об y. Он ходит первый и сообщает второму игроку стратегию вида $f: Y \to X$. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{f\}$. Схема сообщений в игре Γ_2: $f \overset{2}{\to} y \overset{1}{\to} x = f(y)$. Экономическая интерпретация такой игры может быть следующей. Представим себе некое предприятие, разделенное на две структурных единицы – управляющую компанию (центр) и производство (завод). Тогда можно интерпретировать y как объем продукции, произведенной заводом, а стратегию центра $f(y)$ – как схему оплаты управляющей компанией произведенного объема продукции y.

Найдем выражение для наилучшего гарантированного результата F_2 первого игрока в игре Γ_2. Предположим, что ведомый игрок, зная f, выбирает y из множества $Y(f) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y)$ – множества тех стратегий, которые максимизируют его выигрыш при условии, что игрок-лидер, зная стратегию y, сыграет $x = f(y)$. Множество $Y(f)$ может оказаться пустым, если функция f разрывна. В случае пустого $Y(f)$ второй игрок может выбрать любую стратегию $y \in Y$. Определим множество наилучшего ответа второго игрока на стратегию $f(\cdot)$ первого:

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \emptyset \\ Y, & Y(f) = \emptyset \end{cases}$$

В сделанных предположениях второй игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии f для игрока-лидера задается формулой $W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y)$. Наилучший гарантированный результат первого игрока – это точная верхняя грань множества оценок эффективности доступных ему стратегий, она имеет вид $F_2 = \sup_{f \in \{f\}} \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y)$.

Поскольку на этот раз, в отличие от предыдущих, мы имеем дело не с оптимизацией на компактах числовой природы, а с поиском супремумов и инфимумов на множествах функций, то наилучший гарантированный результат, вообще говоря, может не достигаться вовсе. Тем не менее, как читатель должен помнить из курса математического анализа, мы всегда можем приблизиться к точным граням множества с любой наперед заданной точностью. Это означает, что, несмотря на возможную недостижимость оптимальной стратегии, мы всегда можем найти «почти оптимальную».

Определение 7.1. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия f_ε называется - оптимальной в игре Γ_2, если $W(f_\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$.

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве функций $\{f\}$. Однако Юрием Борисовичем Гермейером был получен замечательный результат, который позволяет для поиска наилучшего гарантированного результата ведущего игрока оптимизацию по исходным множествам X и Y.

Для того, чтобы сформулировать этот результат, потребуются следующие величины и множества:

- $G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$ — наилучший гарантированный результат второго игрока при условии, что первый применяет стратегию «наказания» $f^H: f^H(y) \in Arg \min_{x \in X} G(x, y)$, которая на любую стратегию $y \in Y$ второго игрока предписывает отвечать так, чтобы минимизировать его выигрыш;
- $E = Arg \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$ — множество максиминных стратегий второго игрока;
- $D = \{(x, y) \in X \times Y | G(x, y) > G_2\}$ – множество ситуаций в игре, в которых второй игрок может получить больше, чем наилучший гарантированный результат
- $M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$ – гарантированный результат первого игрока
- $K = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)} F(x, y), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$

Теорема 7.1 (Ю.Б.Гермейер). Наилучший гарантированный результат в игре Γ_2 равен $F_2 = \max\{K, M\}$.

Доказательство данной теоремы носит конструктивный характер, то есть его процесс совпадает с процессом построения решения. Так, найдем стратегию, дающую игроку-лидеру наилучший гарантированный результат. Всего возможно два случая:

1. $K > M$. Найдется пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D$, такая, что $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. Положим

$$f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \\ f^H(y), & y \neq y^\varepsilon \end{cases}$$

Если первый игрок будет играть эту стратегию, то для второго единственным «выгодным» вариантом остается выбрать $y = y^\varepsilon$, ведь в противном случае он получит $G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) \leq G_2 < G(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – что значительно меньше наилучшего гарантированного результата.

2. $K \leq M$. В этом случае рассмотрим для первого игрока стратегию

$$f^\varepsilon(y) = \begin{cases} \arg\max_{x \in X} F(x, y), & y \in E \\ f^H(y), & y \notin E \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю, если первый игрок будет играть эту стратегию, то для второго единственным «выгодным» вариантом остается выбрать $y \in E$, ведь в противном случае он опять будет «наказан» первым игроком и получит $G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) \leq G_2 < G(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – что значительно меньше наилучшего гарантированного результата. ■

Рассмотрим на примерах, как можно искать решения иерархических игр. Как уже говорилось, иерархическая игра строится на основе игры в нормальной форме. Рассмотрим биматричную игру с матрицами выигрышами:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Решим для нее игры Γ_1 и Γ_2. Первую из них – Γ_1 – будем решать по определению наилучшего гарантированного результата:

$$F_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y) = \max_{i=1,2,3} \min_{j \in J(i)} a_{ij}$$

Найдем множество $J(i)$ наилучших ответов второго (ведомого) игрока на стратегию i игрока-лидера: $J(i) = Arg \max_{j=1,2,3} b_{ij}$. Для первой стратегии первого игрока во множество $J(1)$ войдут номера столбцов, где стоят наибольшие элементы в первой строке ($i = 1$) матрицы B: $J(1) = Arg \max_{j=1,2,3} b_{1j} = Arg\max\{7,4,3\} = \{1\}$. Аналогично получаем и $J(2) = \{1,2\}$, и $J(3) = \{2,3\}$. Используя найденные множества, найдем оценки эффективности для каждой из стратегий игрока-лидера: $W(1) = \min_{j \in J(1)} a_{1j} = \min_{j \in \{1\}} a_{1j} = a_{11} = 3$; $W(2) = \min_{j \in J(2)} a_{2j} = \min_{j \in \{1,2\}} a_{2j} = \min\{4,3\} = 3$; $W(3) = \min_{j \in J(3)} a_{3j} = \min_{j \in \{2,3\}} a_{3j} = \min\{-5, -1\} = -5$. В результате наилучший гарантированный результат игрока-лидера равен $F_1 = \max\{3,3,-5\} = 3$, а реализуют его сразу две стратегии - $i_0 = 1, 2$.

Далее, для той же биматричной игры найдем наилучший гарантированный результат лидера в игре Γ_2. Для этого воспользуемся теоремой Ю.Б.Гермейера. Найдем фигурирующие в ней величины K и M, а для этого нам нужно определить «промежуточные» величины. Начнем с наилучшего гарантированного результата второго игрока при условии, что первый применяет стратегию «наказания» (т.е. ставит себе задачу не максимизировать свой выигрыш, а минимизировать выигрыш соперника):

$$G_2 = \max_{1 \le j \le 3} \min_{1 \le i \le 3} b_{ij} =$$

$$= \max\left\{\min\{b_{11}, b_{21}, b_{31}\}, \min\{b_{12}, b_{22}, b_{32}\}, \min\{b_{13}, b_{23}, b_{33}\}\right\}$$

$$= \max\left\{\min\{7,7,4\}, \min\{4,7,6\}, \min\{3,3,6\}\right\} = \max\{4,4,3\} = 4$$

Стратегии, которые обеспечивают ведомому игроку этот результат, формируют множество $E = Arg \max_{1 \le j \le 3} \min_{1 \le i \le 3} b_{ij} = \{1,2\}$. Далее необходимо найти множество $D_2 = \left\{(i,j) | b_{ij} > G_2\right\}$ тех исходов игры, которые дают второму игроку результат, превосходящий наилучший гарантированный. Таких ситуаций довольно много, отметим в матрицах выигрыша соответствующие элементы:

$$A = \begin{pmatrix} \colorbox{lightgray}{3} & 6 & 8 \\ \colorbox{lightgray}{4} & \colorbox{lightgray}{3} & 2 \\ 7 & \colorbox{lightgray}{-5} & \colorbox{lightgray}{-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \colorbox{lightgray}{7} & 4 & 3 \\ \colorbox{lightgray}{7} & \colorbox{lightgray}{7} & 3 \\ 4 & \colorbox{lightgray}{6} & \colorbox{lightgray}{6} \end{pmatrix}$$

Величина K представляет собой наибольший выигрыш игрока-лидера в этих ситуациях: $K = \max_{(i,j) \in D} a_{ij} = 4$. Последняя из величин, фигурирующих в условии теоремы Гермейера, - это величина $M = \min_{j \in E} \max_{1 \le i \le 3} a_{ij} = \min_{1 \le j \le 2} \max_{1 \le i \le 3} a_{ij} = 6$. Так как, согласно этой теореме, $F_2 = \max\{K, M\} = \max\{4,6\} = 6$. Задача решена!

В следующем примере применим аналогичные подходы для поиска наилучшего гарантированного результата игрока-лидера в иерархических играх Γ_1 и Γ_2 для непрерывной «базовой» игры: $X = Y = [0,1]$, $F(x,y) = \frac{3x}{4} + \frac{y}{2}, G(x,y) = (x-y)^2$.

Начнем с решения игры Γ_1: $F_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x,y)$. Найдем множество наилучших ответов ведомого: $Y(x) = Arg \max_{y \in [0,1]} (x-y)^2$. Для того, чтобы найти для каждого возможного x максимальное значение функции выигрыша второго игрока, обратим внимание на ее вид: это квадратичная функция, ее график – это парабола с ветвями вверх и вершиной в $y = x$ (см. Рисунок 7.1).

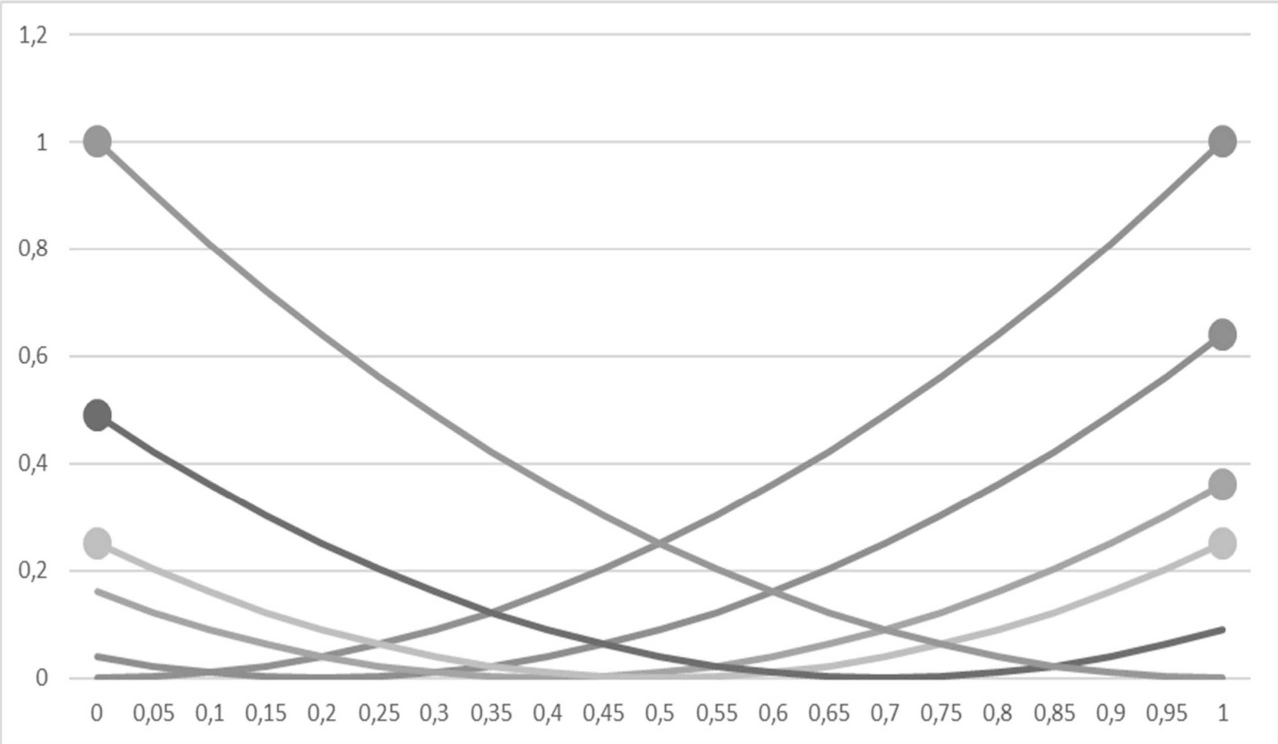


Рисунок 7.1. Игра Γ_1: множество наилучших ответов ведомого игрока, в зависимости от стратегии лидера, равно $\{0\}$ (если $x < \frac{1}{2}$), $\{0; 1\}$ (если $x = \frac{1}{2}$) или $\{1\}$ (если $x > \frac{1}{2}$) (наилучшие стратегии отмечены жирными точками).

Максимум этой функции достигается на одном из концов отрезка [0,1]:

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \{0; 1\}, & x = \dfrac{1}{2} \\ \{0\}, & \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Оценка эффективности стратегий игрока-лидера, таким образом, имеет вид:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2} \right) = \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \min\left\{ \frac{3x}{4}; \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{3x}{4}, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{3x}{4}, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

На следующем рисунке приведен ее график.

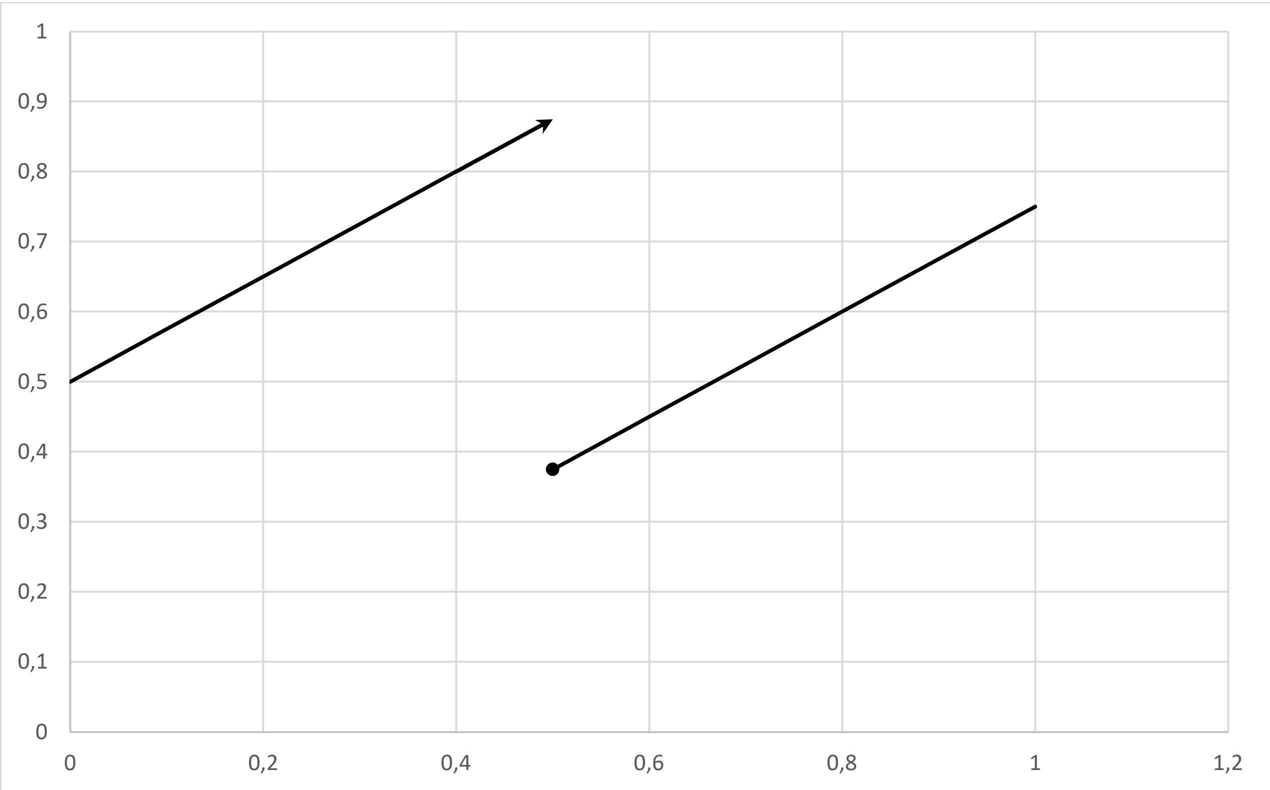


Рисунок 7.2. Игра Γ_1: график функции оценки эффективности стратегий игрока-лидера.

Мы видим, что оценка эффективности стратегий игрока-лидера является разрывной функцией, и ее точная верхняя грань $F_2 = \frac{7}{8}$ на множестве его стратегий не достигается. Максимум, что мы можем сделать – это указать ε-эффективную стратегию, с точностью ε аппроксимирующую оптимальную стратегию: $x_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{4\varepsilon}{3}$.

Теперь решим игру Γ_2 для той же базовой игры. Наилучший гарантированный результат ведомого: $G_2 = \max_{y \in [0,1]} \min_{x \in [0,1]} (x-y)^2 = 0$, а множество D ситуаций, дающих ведомому больший выигрыш, имеет вид: $D = \{(x,y) | G(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] | x \neq y\}$. Множество $E = [0,1]$, а величина $M = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Осталось найти $K = \sup_{(x,y) \in D} F(x,y) = \sup_{x \neq y} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{5}{4} > \frac{3}{4} = M$. Именно эта величина и дает оценку наилучшего гарантированного результата игрока-лидера, однако, как и в случае игры Γ_1, она не достигается (реализующая ее ситуация $(1,1) \notin D$). При этом можно указать ε-оптимальную ситуацию $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = \left(1 - \frac{4\varepsilon}{3}, 1\right)$, реализовать которую игрок-лидер может, используя стратегию вида:

$$f_\varepsilon(y) = \begin{cases} x_\varepsilon, y = y_\varepsilon \\ y, y \neq y_\varepsilon \end{cases}$$

Это стратегия «принуждает» ведомого игрока использовать именно ту стратегию, которая «нужна» лидеру (то есть y_ε) – потому что в том случае, если он попытается использовать какую-либо иную стратегию, ответом на нее будет $f_\varepsilon(y) = y$, снижающая его выигрыш до минимума.

7.2. Позиционные игры с совершенной информацией: представление в развернутом виде, построение эквивалентной игры в нормальной форме.

Многие реальные конфликтные ситуации имеют длительный характер. Их участники действуют неоднократно и с учетом информации о предшествующем развитии конфликта. Очевидно, что для моделей подобных взаимодействий общие теоремы существования решения для игр в нормальной форме не позволяют находить или даже конкретизировать оптимальное поведение из-за большого числа возможных стратегий.

Для решения динамических игр с конечным числом игроков часто удобно использовать позиционное представление игры. Наиболее простым классом позиционных игр является класс конечношаговых позиционных игр с полной информацией. В такой игре на каждом шаге игры делает ход лишь один игрок, имеющий полную информацию о текущем состоянии, всех происходящих действиях и общей структуре игры. Это предположение обычно характеризуется как полная информация. Хорошо известными примерами таких игр являются шашки и шахматы.

Позиционное представление игры означает, что все взаимодействие записывается в виде конечного ориентированного графа – дерева, вершины (узлы) которого соответствуют ситуациям, в которых течение игры может измениться. Более конкретно, вершины дерева – это либо ситуации принятия решения каким-либо одним игроком, либо ситуации, когда течение игры может измениться из-за каких-либо неподконтрольных игрокам факторов, обобщенно называемых Природой. Наконец, листьям дерева – финальным вершинам – соответствуют исходы игры, когда взаимодействие игроков завершено и определяются их итоговые выигрыши.

В качестве примера рассмотрим динамическую модификацию игры «Обман на рынке», которая впервые упоминалась еще в самом начале настоящей книги (Пример 3.1). Покупатель приходит на рынок за яблоками. Продавец, торгующий яблоками, использует пружинные весы и может либо честно взвесить для покупателя 1 кг яблок, либо подкрутить пружинку и обвесить его (стратегии "честность" и "обман"). Покупатель также имеет две стратегии - поверить продавцу или проверить результат взвешивания на контрольных весах. Выигрыши игроков записываются в виде матриц[13]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Пусть покупатель способен заметить, обвешивает его продавец или нет, и принять решение о своем поведении, уже зная стратегию продавца. Иными словами, в рассматриваемой игре возникает последовательность ситуаций принятия решения – и можно изобразить в виде дерева процесс взаимодействия покупателя и продавца:

[13] Внимательный читатель может заметить, что эти матрицы немного отличаются от приводившихся в начале пособия: по сравнению с первым появлением рассматриваемой модели, они поменялись местами и были транспонированы. Это произошло из-за того, что теперь мы рассматриваем в качестве игрока 1 продавца, а в качестве игрока 2 – покупателя.

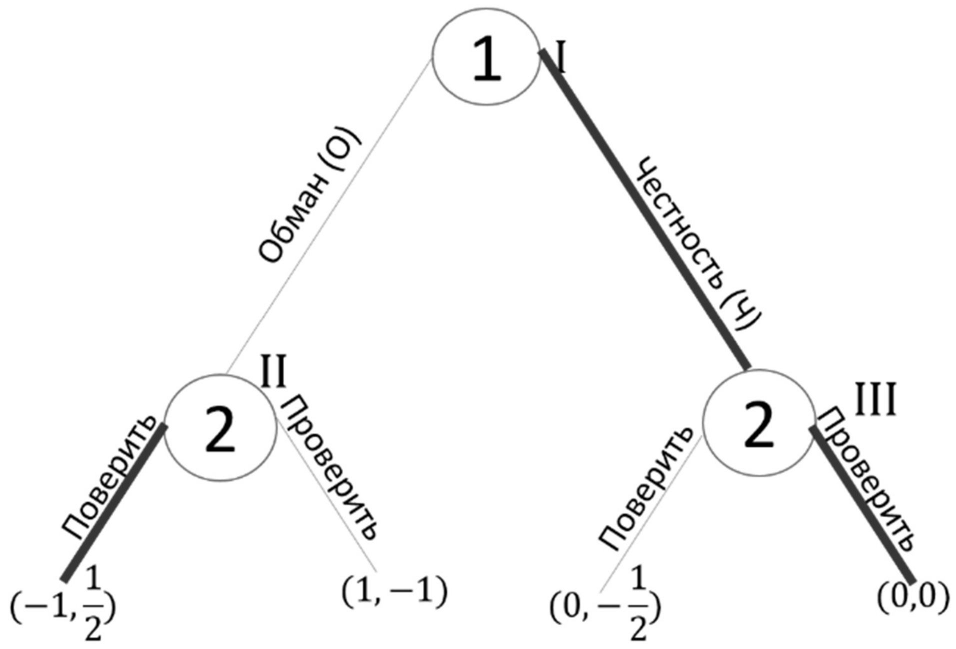


Рисунок 7.3. Дерево игры для позиционного варианта игры «Обман на рынке»

Такая запись очень удобна для записи игр с конечным количеством ходов. Взаимодействие стартует в вершине дерева под номером I (договоримся обозначать вершины деревьев римскими цифрами), где решение принимает игрок 1 (продавец, его номеру соответствует число в вершине). У него есть две стратегии, каждой из которых соответствует свое ребро, ведущее из данной вершины в следующую. Выбор им той или иной стратегии приводит к тому, что взаимодействие перемещается по соответствующему ребру к следующей ситуации принятия решения. Таким образом, описываются все возможные ситуации в виде узлов (т.е. нефинальных вершин) дерева. Когда возможности для выбора у игроков исчерпаны, их взаимодействие заканчивается и определяются выигрыши. Таким ситуациям соответствуют листья дерева – финальные вершины, из которых не исходит ни одного ребра. Каждая финальная вершина соответствует одному профилю стратегий – исходу игры, ей приписываются выигрыши игроков при таком исходе.

Интуитивно понятно, что рациональным поведением покупателя и продавца является выбор стратегий, соответствующих отмеченным ребрам. Однако для того, чтобы понять, почему это на самом деле так и определить в целом, что значит «решить позиционную игру», необходимо произвести строгую математическую формализацию понятия позиционной игры, подобно тому, как это делается при построении игры в нормальной форме.

Сначала приведем определение конечного ориентированного дерева – как основного объекта, описывающего процесс взаимодействия игроков и их иерархию. Классическое определение дерева в теории графов следующее (оно интуитивно понятно).

Определение 7.2. Ориентированное дерево – это ориентированный граф, не содержащий циклов, в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в неё не ведут дуги), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведёт ровно по одной дуге). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются концевыми вершинами или листьями.

Нам это определение понадобится в несколько измененном виде.

Определение 7.3. Конечным деревом называется пара $\langle X, \sigma \rangle$, где X – конечное множество вершин, $\sigma: X \to X$ – отображение, которое сопоставляет каждой вершине ее ближайшего предшественника, причем:

- существует единственная начальная вершина x_0, такая, что $\sigma(x_0) = x_0$ (ей не предшествует никакая друга);
- существует целое l, такое, что $\sigma^{-1}(x) = x_0$ для всех $x \in X$.

Второе условие, по сути, является требованием конечности дерева, так как минимальное из чисел l, удовлетворяющих указанному требованию, является *высотой* дерева, то есть количеством ярусов в нем.

Любая вершина x, для которой $\sigma^{-1}(x) = \emptyset$, называется *финальной вершиной*. Множество таких вершин обозначается через T. А для любой нефинальной вершины (*позиции*) x множество $\sigma^{-1}(x)$ представляет собой совокупность последующих за ней вершин. Ребра дерева $\langle X, \sigma \rangle$ называются *альтернативами*.

Теперь можно ввести определение позиционной игры с полной информацией.

Определение 7.4. Позиционной игрой с полной информацией называется следующая совокупность: $G = \langle A; \langle X, \sigma \rangle; u^a(x), x \in T, a \in A; X \backslash T = \bigcup_{a \in A} X^a; \forall x \in X^0 \exists p(x'|x), x' \in \sigma^{-1}(x) \rangle$, где:

$A = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $\langle X, \sigma \rangle$ – конечное дерево с начальной вершиной x_0 и множеством $T = \{x | \sigma^{-1}(x) = \emptyset\}$ финальных вершин, множество $X \backslash T$ – множество нефинальных вершин, на котором задано разбиение $R = \{X^0, X^1, \dots, X^n\}$ на попарно непересекающиеся множества $X^a, a \in A$ – множества позиций, в которых делает ход игрок a, и X^0 – множество позиций, в которых делает ход случай, для каждого x из этого множества заданы вероятности $p(x'|x) > 0$, $\sum_{x' \in \sigma^{-1}(x)} p(x'|x) = 1$ перехода из позиции x в позиции $x' \in \sigma^{-1}(x)$, $u^a : T \to R$ – функция выигрыша игрока a.

Разбиение $R = \{X^0, X^1, \dots, X^n\}$ описывает, кто именно принимает решение в каждой из нефинальных вершин – либо это будет игрок $a \in A$ (для вершин $x \in X^a$), либо случай (для вершин $x \in X^0$). Если корень x_0 дерева, согласно разбиению, попал в множество X^a, то игра начинается с выбора игроком a какой-либо из следующих за x_0 вершин, например, $x_1 \in \sigma^{-1}(x_0)$. Если x_1 оказался финальной вершиной (листом дерева), то игра окончена, а игроки получают выигрыши в размере $u^a(x_1), a \in A$. Если же x_1 − нефинальная вершина, то игра продолжается дальше. Решение принимает игрок b, для которого $x_1 \in X^b$, он выбирает следующую за x_1 вершину $x_2 \in \sigma^{-1}(x_1)$ и т.д. Если же в какой-то момент мы попадаем в вершину $x \in X_0$, где делает ход случай, то с вероятностью $p(x'|x)$ мы переходим к одной из вершин $x' \in \sigma^{-1}(x)$, в которой продолжаем действовать способом, описанным выше. Если игрок a в вершине $x \in X^a$ выбирает вершину $x' \in \sigma^{-1}(x)$, то будем говорить, что он выбирает соответствующую альтернативу − ребро дерева, соединяющего вершины x и x'.

Рассмотрим дерево, изображенное на рисунке ниже:

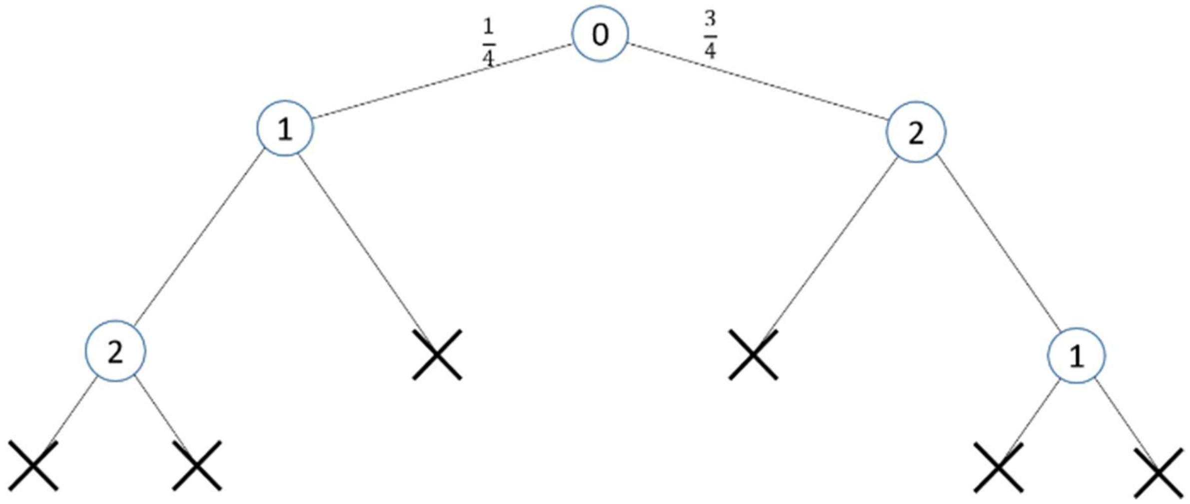


Рисунок 7.4. Пример дерева позиционной игры

В нем крестиками отмечены финальные вершины, в корне дерева делает ход случай, а в остальных вершинах – игроки, при этом каждая вершина помечена номером игрока, принимающего в ней решение. Очевидно, что для определения хода игры необходимо, чтобы для каждой вершины, где ход принадлежит игроку, было определено, куда он перейдет дальше. Это приводит к необходимости формализации стратегий игроков.

Определение 7.5. Стратегия игрока $a \in A$ - это отображение μ^a, определяющее для каждой вершины $x \in X^a$ позицию, в которую он перейдет: $\forall x \in X^a$ $\mu^a(x) \in \sigma^{-1}(x)$. Множество всех стратегий игрока a обозначим через $\{\mu^a\}$.

Набор стратегий $\mu = \{\mu^a, a \in A\}$ называется профилем стратегий или ситуацией. Для каждого $x \in X$ в любой ситуации μ можно определить вероятность $p(x|\mu)$ прихода в эту позицию x. При этом $p(x_0|\mu) = 1$ для любого допустимого μ – так как игра всегда начинается из вершины дерева. Зная стратегии каждого из игроков, мы можем для любой вершины (неважно, терминальной или «промежуточной») определить вероятность прихода в нее, для этого используется следующая формула.

Для каждой вершины $x \in X$ вероятность прихода $p(x|\mu)$ в нее при выбранном профиле стратегий μ определяется рекуррентно: $p(x|\mu) = p(\sigma(x)|\mu) \cdot p(x|\sigma(x), \mu)$, где $p(\sigma(x)|\mu)$ – вероятность прихода в вершину-предшественник x, а $p(x|\sigma(x), \mu)$ – вероятность перехода из этого предшественника в x. Эта вероятность определяется по-разному для вершин, где ходит случай, и вершин, где ход принадлежит игроку. Если в вершине $\sigma(x)$ ходит игрок $a \in A$

($\sigma(x) \in X^a$), то вероятность перейти из $\sigma(x)$ в x определяется стратегией этого игрока:

$$p(x|\sigma(x), \mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu^a(\sigma(x)) = x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad 7.1$$

То есть, если стратегия μ^a предписывает игроку a выбрать в вершине $\sigma(x)$ альтернативу, ведущую в x, то вероятность такого перехода равна единице (детерминированный переход), в противном случае вероятность нулевая. При это, как уже говорилось, $p(x_0|\mu) = 1$ для любого допустимого μ. Если же $\sigma(x) \in X^0$ – то есть в предшествующей x вершине ходит случай – то вероятность перехода в нее определяется в соответствии с вероятностями выбора альтернатив, заданными для этой вершины, и не зависят от стратегий игроков: $p(x|\sigma(x), \mu) = p(x|\sigma(x))$.

Проиллюстрируем на примере, как определить вероятность попадания в любую вершину дерева позиционной игры. Рассмотрим игру, задаваемую деревом:

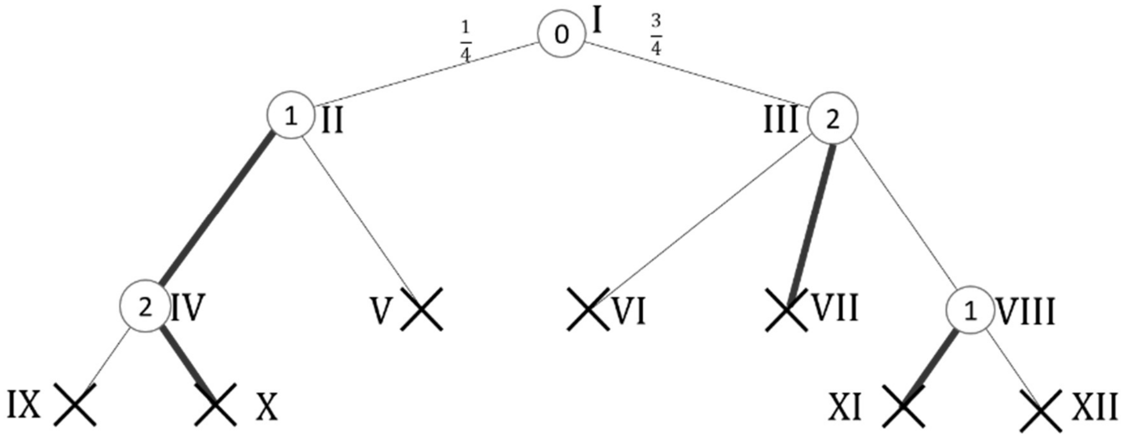


Рисунок 7.5. Дерево позиционной игры с пронумерованными вершинами и выделенными ребрами (альтернативами),

соответствующими профилю стратегий $\tilde{\mu} = \left((\mu^1_{II}, \mu^1_{VIII}), (\mu^2_{III}, \mu^2_{IV})\right) = \left((\text{Л}, \text{Л}), (\text{Ц}, \text{П})\right)$

Все вершины в этом дереве пронумерованы римскими цифрами, а выделенные ребра (альтернативы) соответствуют профилю стратегий $\tilde{\mu} = \left((\mu^1_{II}, \mu^1_{VIII}), (\mu^2_{III}, \mu^2_{IV})\right) = \left((\text{Л}, \text{Л}), (\text{Ц}, \text{П})\right)$. Стратегия первого игрока здесь – это пара $(\mu^1_{II}, \mu^1_{VIII}) = (\text{Л}, \text{Л})$, то есть в вершине II первый игрок выбирает левую альтернативу, и в вершине $VIII$ – также левую. У второго игрока стратегия $(\mu^2_{III}, \mu^2_{IV}) = (\text{Ц}, \text{П})$: в вершине III он выбирает «центральную» альтернативу, а в вершине IV – идет «направо». Таким образом, стратегии каждого игрока описывают выбираемые им альтернативы в каждой из вершин, где он делает ход – вне зависимости от того, попадет ли он в нее на самом деле или нет.

Определим вероятности попадания в каждую вершину дерева. Корнем дерева является вершина I, и вероятность попасть в нее не зависит от $\tilde{\mu}$: $p(I|\tilde{\mu}) = 1$. Зная это, определим вероятности перехода в вершины, последующие за корнем. В корне ход делает случай, поэтому: $p(II|\tilde{\mu}) = p(I|\tilde{\mu}) \cdot p(II|I) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; $p(III|\tilde{\mu}) = p(I|\tilde{\mu}) \cdot p(III|I) = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

Вершины первого яруса дерева (то есть те, куда ведут альтернативы из корня) принадлежат множествам выбора разных игроков. В вершине II ход делает игрок 1, в его стратегии за поведение в данной вершине отвечает элемент $\mu^1_{II} = \text{Л}$. Таким образом, он выбирает левую альтернативу, которая ведет в вершину

IV. Отсюда, согласно формуле 7.1, получаем, что $p(IV|\tilde{\mu}) = p(II|\tilde{\mu}) \cdot p(IV|II,\tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$; $p(V|\tilde{\mu}) = p(II|\tilde{\mu}) \cdot p(V|II,\tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$ (то есть, в вершину V при рассматриваемом наборе стратегий мы не попадем никогда. По аналогичной схеме можно найти вероятности прихода во все остальные вершины. Для вершин, последующих за III, вероятность перехода определяется в соответствии с элементом $\mu^2_{III} =$ Ц стратегии второго игрока:

$$p(VI|\tilde{\mu}) = p(III|\tilde{\mu}) \cdot p(VI|III,\tilde{\mu}) = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$$

$$p(VII|\tilde{\mu}) = p(III|\tilde{\mu}) \cdot p(VII|III,\tilde{\mu}) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$p(VIII|\tilde{\mu}) = p(III|\tilde{\mu}) \cdot p(VIII|III,\tilde{\mu}) = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$$

Рассуждая в том же ключе, для вершин нижнего яруса имеем (в вершинах-последователях IV вероятности определяются из $\mu^2_{IV} =$ П, в вершинах-последователях $VIII$ – из $\mu^1_{VIII} =$ Л):

$$p(IX|\tilde{\mu}) = p(IV|\tilde{\mu}) \cdot p(IX|IV,\tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

$$p(X|\tilde{\mu}) = p(IV|\tilde{\mu}) \cdot p(X|IV,\tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$p(XI|\tilde{\mu}) = p(VIII|\tilde{\mu}) \cdot p(XI|VIII,\tilde{\mu}) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$p(XII|\tilde{\mu}) = p(VIII|\tilde{\mu}) \cdot p(XII|VIII,\tilde{\mu}) = 0 \cdot 0 = 0$$

Итак, мы нашли вероятности перехода в любую из вершин при использовании игроками стратегий из заданного профиля $\tilde{\mu}$. Если рассмотреть только терминальные вершины, то, зная вероятности прихода в них, можно определить исход игры для любого профиля стратегий. В рассматриваемом примере для профиля $\tilde{\mu}$ с вероятностью $\frac{1}{4}$ исход игры будет соответствовать терминальной вершине X, а с вероятностью $\frac{3}{4}$ – терминальной вершине VII.

Вспомним, что терминальным вершинам приписаны выигрыши игроков при соответствующем исходе игры. Таким образом, для любого набора стратегий μ для каждого игрока $a \in A$ можно определить вероятностное распределение его выигрыша (который, вообще говоря, является случайной величиной). А в качестве функции выигрыша игрока, зависящей от всего профиля стратегий, разумно взять математическое ожидание его выигрыша при соответствующем распределении вероятностей:

$$f^a(\mu) = \mathbb{E}\left(u^{a(x)} \middle| \mu\right) = \sum_{x \in T} u^a(x) p(x|\mu)$$

Обратите внимание, что получилось у нас после построения функций $f^a(\mu)$ - определены множества игроков (A) стратегий игроков ($\{\mu^a\}$, $a \in A$), функции выигрыша на множестве стратегий (а не исходов!) игры ($f^a(\mu), a \in A$). Если мы вспомним определение игры в нормальной форме (Определение 2.1), то обнаружим, что построенных нами элементов достаточно, чтобы определить нормальную форму позиционной игры.

Определение 7.6. Игра $\Gamma(G) = \langle A;\, \{\mu^a\}, a \in A;\, f^a(\mu), a \in A \rangle$ называется нормальной формой позиционной игры G.

По сути, мы преобразовали позиционную игру как отдельный тип математического объекта к уже знакомому нам виду игры в нормальной форме. При это в качестве множества стратегий уже выступает не числовое множество довольно простой природы (конечное множество, как в биматричной игре, или компакт, как в непрерывной игре), а совокупность отображений из множества вершин в себя. Именно с этим связана основная сложность при поиске равновесий Нэша в позиционных играх – для каждого игрока $a \in A$ его стратегия μ^a включает описание поведения в каждой вершине из множества X^a путем задания альтернативы, исходящей из этой вершины. Пусть разбиение дерева $\langle X, \sigma \rangle$ на множества, где делают ход игроки, таково, что у игрока a во множество X^a входит n_a вершин (пронумеруем их как $(a, 1), \dots (a, n_a)$), и в каждой вершине j $(j = 1, \dots, n_a)$ игроку a предстоит выбор из $k(a, j)$ альтернатив. Тогда стратегии игрока a представляют наборы из n_a элементов вида $\mu^a = \left(\mu_1^a, \dots, \mu_{n_a}^a\right)$, где на -м месте стоит номер альтернативы, выбираемой игроком в вершине i. Таким образом, мощность множества стратегий игрока $a \in A$ составляет:

$$|\{\mu^a\}| = \prod_{j=1}^{n_a} k(a, j)$$

Тем не менее, для позиционных игр, в которых деревья состоят из не слишком большого количества вершин и альтернатив, возможно построить множество стратегий и, следовательно, привести игру к нормальной форме – а потом найти равновесия Нэша. В случае с позиционными играми двух лиц нормальной формой будет являться биматричная игра, методы решения которой хорошо знакомы читателю.

Рассмотрим, как строить нормальную форму позиционной игры, на примере. Рассмотрим дерево игры, приведенное на Рисунок 7.4, дополненное выигрышами игроков в каждой из терминальных вершин.

Пример 7.1. Пусть позиционная игра задана деревом, приведенном на Рисунок 7.6.

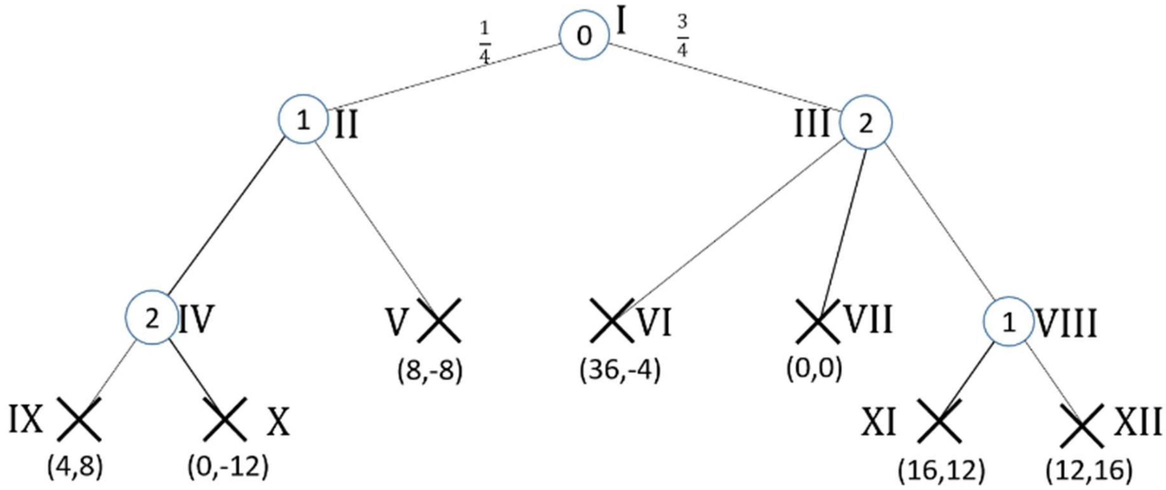


Рисунок 7.6. Дерево игры с Рисунок 7.4 с заданными для каждой терминальной вершины выигрышами

Построим ее нормальную форму и найдем равновесия Нэша. Для этого надо вначале задать множества стратегий каждого игрока. Оценим, сколько стратегий имеет каждый игрок. Оба они делают ход в двух вершинах. При этом у первого игрока в обеих вершинах по две альтернативы, что приводит к 4 стратегиям: $\{\mu^1\} = \{\text{ПП}, \text{ПЛ}, \text{ЛП}, \text{ЛЛ}\}$, где каждая стратегия представляет собой пару, на первом месте в которой стоит альтернатива, выбираемая в вершине II, а на втором – в вершине VIII. В свою очередь, у второго игрока – три альтернативы в вершине III и две в вершине IV, что приводит в итоге к 6 стратегиям: $\{\mu^2\} = \{\text{ПП}, \text{ПЛ}, \text{ЦП}, \text{ЦЛ}, \text{ЛП}, \text{ЛЛ}\}$. Таким образом, нормальная форма рассматриваемой позиционной игры представляет собой биматричную игру размерности 4×6. Для каждой из возможных ситуаций игры (всего их $4 \times 6 = 24$) найдем ожидаемые выигрыши игроков.

1. (ПП, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ - в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8) + \frac{3}{4}(12,16) = (2,-2) + (9,12) = (11,10)$$

2. (ПП, ПЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, так как они отличаются лишь выбором вторым игроком альтернативы в вершине IV. Однако вероятность перейти в эту вершину равна нулю: если ход случая приводит к переходу в вершину II, то там стратегия первого игрока приводит в вершину V, если в вершину III, то «совместными усилиями» обоих игроков игра заканчивается в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков: $(11,10)$

3. (ПП, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ - в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8) + \frac{3}{4}(0,0) = (2,-2)$$

4. (ПП, ЦЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(2,-2)$

5. (ПП, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ - в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8)+\frac{3}{4}(36,-4)=(2,-2)+(27,-3)=(29,-5)$$

6. (ПП, ЛЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(29,-5)$.

7. (ПЛ, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ - в вершине XI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8)+\frac{3}{4}(16,12)=(2,-2)+(12,9)=(14,7)$$

8. (ПЛ, ПЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая. Ожидаемый вектор выигрышей игроков: $(14,7)$

9. (ПЛ, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ - в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8)+\frac{3}{4}(0,0)=(2,-2)$$

10. (ПЛ, ЦЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(2,-2)$

11. (ПЛ, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ - в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8)+\frac{3}{4}(36,-4)=(2,-2)+(27,-3)=(29,-5)$$

12. (ПЛ, ЛЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(29, -5)$.

13. (ЛП, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(12,16) = (0, -3) + (9,12) = (9,9)$$

14. (ЛП, ПЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ - в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}\ (4,8) + \frac{3}{4}\ (12,16) = (1,2) + (9,12) = (10,14)$$

15. (ЛП, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(0,0) = (0, -3)$$

16. (ЛП, ЦЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ - в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8) + \frac{3}{4}(0,0) = (1,2)$$

17. (ЛП, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(36, -4) = (0, -3) + (27, -3) = (27, -6)$$

18. (ЛП, ЛЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ - в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8)+\frac{3}{4}(36,-4)=(1,2)+(27,-3)=(28,-1)$$

19. (ЛЛ, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине XI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0,-12)+\frac{3}{4}(16,12)=(0,-3)+(12,9)=(12,6)$$

20. (ЛЛ, ПЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ - в вершине XI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8)+\frac{3}{4}(16,12)=(1,2)+(12,9)=(13,11)$$

21. (ЛЛ, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0,-12)+\frac{3}{4}(0,0)=(0,-3)$$

22. (ЛЛ, ЦЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ - в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8)+\frac{3}{4}(0,0)=(1,2)$$

23. (ЛЛ, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0,-12)+\frac{3}{4}(36,-4)=(0,-3)+(27,-3)=(27,-6)$$

24. (ЛЛ, ЛЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ - в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4{,}8)+\frac{3}{4}(36,-4)=(1{,}2)+(27,-3)=(28,-1)$$

Таким образом, рассмотрены все 24 ситуации в игре, полученные при этом выигрыши игроков в каждой из ситуаций, можно свести в две следующие матрицы:

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 11 & 2 & 2 & 29 & 29 \\ 14 & 14 & 2 & 2 & 29 & 29 \\ 9 & 10 & 0 & 1 & 27 & 28 \\ 12 & 13 & 0 & 1 & 27 & 28 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 10 & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 7 & 7 & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 9 & 14 & -3 & 2 & -6 & -1 \\ 6 & 11 & -3 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Для каждого игрока можно найти и отметить в матрице его выигрыша отображение его наилучшего ответа на стратегии соперника:

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 11 & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{29} & \boxed{29} \\ \boxed{14} & \boxed{14} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{29} & \boxed{29} \\ 9 & 10 & 0 & 1 & 27 & 28 \\ 12 & 13 & 0 & 1 & 27 & 28 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{10} & \boxed{10} & -2 & -2 & -5 & -5 \\ \boxed{7} & \boxed{7} & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 9 & \boxed{14} & -3 & 2 & -6 & -1 \\ 6 & \boxed{11} & -3 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Применяя обсуждавшийся еще в разделе 2 способ поиска равновесий в биматричных играх, получаем, что в рассматриваемой игре два равновесия в чистых стратегиях – (ПЛ, ПП) и (ПЛ, ПЛ). Они приводят к одинаковому завершению игры (вероятностью ¼ в вершине V, с вероятностью ¾ в вершине XI) и гарантируют игрокам одинаковый ожидаемый выигрыш – 14 единиц первому игроку, 7 единиц второму игроку.

7.3. Совершенное подыгровое равновесие (СПР). Теорема Куна о существовании СПР в многошаговых играх.

Использование нормальной формы для поиска равновесий в позиционных играх с полной информацией крайне трудозатратно и, вообще говоря, его результат получается неоднозначным. Как правило, после приведения позиционной игры к нормальной форме (что само по себе занимает много времени) в получающейся биматричной игре существует довольно большое количество равновесий Нэша, соответствующих одному и тому же исходу игры. Это может запутать исследователя, желающего понять, как должны вести себя игроки: ведь есть сразу несколько равновесных ситуаций в игре, дающих игрокам один и тот же выигрыш – как среди них выбрать «наилучшее», наиболее «равновесное» равновесие? Оказывается, для этого необходимо «ужесточить» требования к концепции решения игры, и вместо обычного равновесия Нэша искать совершенное подыгровое равновесие (эквивалентный термин - равновесие, совершенное по подыграм). Это более сильное понятие, чем просто равновесие Нэша – всякое СПР является равновесием Нэша, однако, чтобы стать совершенным подыгровым, «простое» равновесие Нэша должно удовлетворять дополнительным требованиям. Для того, чтобы их сформулировать, введем понятие подыгры для позиционной игры G.

Определение 7.7. Для любой вершины $z \in X$ позиционной подыгрой, начинающейся из z, называется совокупность $(\langle X_z, \sigma_z \rangle, X_z^0, X_z^a, u_z^a, a \in A)$, где $X_z = \{x \in X \mid \exists l \geq 0 \colon \sigma^l(x) = z\}$, σ_z есть сужение σ на X_z, $X_z^a = X^a \cap X_z, a \in A \cup \{0\}$, а $u_z^a(x) = u^a(x)$ для всех $x \in X^z \cap T$.

Смысл этого определения прост, несмотря на некоторую его громоздкость. Позиционная подыгра соответствует «редуцированному» взаимодействию игроков, которое начинается не из корня дерева исходной игры, а их вершины z. Иными словами, подыгра – это позиционная игра, деревом которой является поддерево $\langle \mathrm{X_z}, \mathrm{\sigma_z} \rangle$ исходного дерева $\langle X, \sigma \rangle$ с корнем в $z \in X$.

Например, если рассмотреть игру, приведенную на Рисунок 7.6, то для нее подыгрой, начинающейся в вершине III, будет позиционная игра с деревом, выделенным сплошным овалом. В свою очередь, дерево подыгры, начинающейся в вершине II, выделено пунктиром (см. Рисунок 7.7).

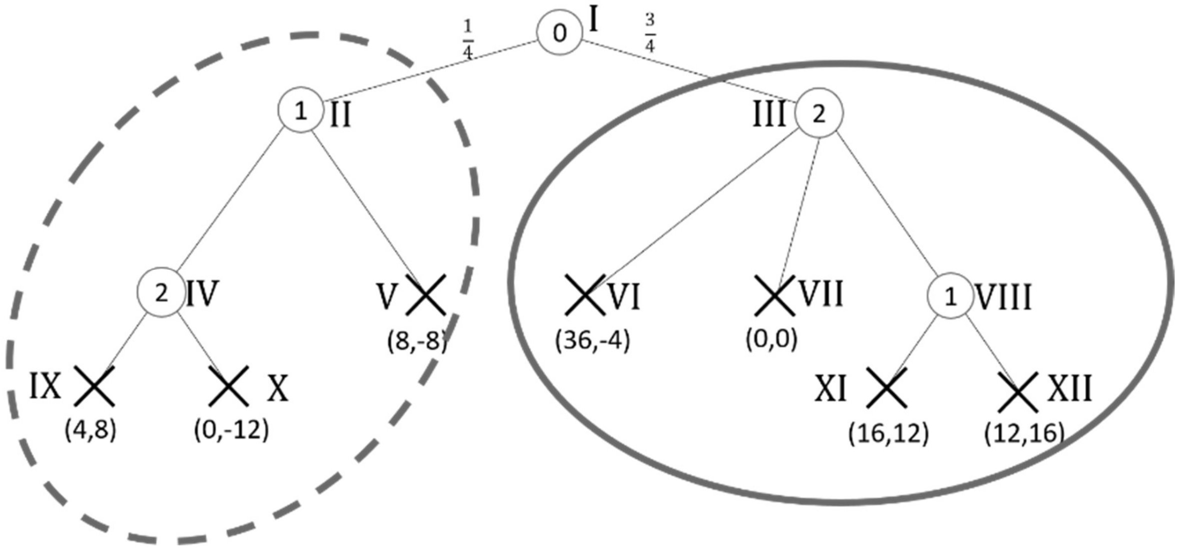


Рисунок 7.7. Подыгры G_{II} и G_{III} для игры G, дерево которой было представлено на Рисунок 7.6.

Таким образом, любая подыгра сама по себе является позиционной игрой. Поэтому для нее необходимо также задать стратегии игроков – ими будут являться сужения исходных стратегий игроков (в «большой» игре) на редуцированное множество вершин, где они принимают решения в рамках подыгры. Пусть $\mu = (\mu^a, a \in A)$ – ситуация в исходной игре, тогда через μ_z обозначим ее «сужение» на X_z, а через $u^a(\mu_z)$ – выигрыщ игрока a в ситуации μ_z. Так мы получили нормальную форму подыгры:

$$\Gamma(G_z) = \langle A; \{\mu_z\}, u_z^a(\mu_z), a \in A \rangle$$

Например, нормальная форма подыгры $\mathrm{G_{II}}$ (см. Рисунок 7.7) имеет следующий вид. Множество игроков $A = \{1,2\}$, каждый из них ходит в одной вершине и имеет там две альтернативы. Таким образом, множество стратегий первого игрока – $\{\text{Л}, \text{П}\}$, такой же вид имеет и множество стратегий второго игрока. Матрицы выигрыша игроков:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Л & П \end{array} \\ \begin{array}{c} Л \\ П \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Л & П \end{array} \\ \begin{array}{c} Л \\ П \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

В этой подыгре можно найти равновесие – им является ситуация $(П, Л)$ – то есть в вершине II первый игрок выбирает правую альтернативу, а в вершине IV второй игрок выбирает левую альтернативу. Внимательный читатель в этот момент вспомнит, что в исходной игре было равновесие (ПЛ, ПЛ), в котором в вершинах II и IV игроки вели себя точно также, как и в найденном равновесии подыгры, включающей эти вершины. Более того, если мы рассмотрим подыгру, начинающуюся из вершины IV (там будет всего один игрок – второй), то в ней оптимальной стратегией единственного игрока будет выбор левой альтернативы, что также совпадает с сужением равновесия (ПЛ, ПЛ) на эту подыгру. Таким образом, особенностью ситуации (ПЛ, ПЛ) в исходной игре является то, что она не только сама по себе является равновесием, то и ее сужение на любую подыгру также будет в этой подыгре равновесием. Именно в этом и заключается «подыгровое совершенство» равновесия (ПЛ, ПЛ).

Определение 7.8. Набор стратегий $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^a, a \in A)$ называется **совершенным подыгровым равновесием** в игре G, если для каждого $z \in X$ набор $\bar{\mu}_z = (\bar{\mu}_z^a, a \in A)$, где $\bar{\mu}_z^a$ – сужение стратегии $\bar{\mu}^a$ на подыгру G_z, является равновесием Нэша в игре $\Gamma(G_z)$.

В отличие от равновесия (ПЛ, ПЛ), второе равновесие - (ПЛ, ПП) – подобным свойством не обладает. Более того, наиболее распространенной являются ситуации, когда в позиционной игре много «обычных» равновесий Нэша, однако совершенное подыгровое равновесие всего одно. Это позволяет воспринимать как решение позиционной игры, в первую очередь, именно СПР, отдавая ему предпочтение по сравнению с прочими равновесиями.

Помимо того, что СПР является своего рода «супер-равновесием», и того, что количество СПР обычно заметно меньше, чем количество равновесий Нэша в нормальной форме позиционной игры, у СПР есть еще одно «достоинство». Дело в том, что для его поиска не обязательно строить нормальную форму игры, и достаточно ограничиться деревом развернутой формы. Благодаря замечательному алгоритму, разработанному Гарольдом Куном[14] в 1953 году (а для случая многошаговых антагонистических игр – в 1913 году Эрнстом Цермело[15]), поиск совершенного подыгрового равновесия можно проводить прямо «на дереве» игры в развернутой форме. Алгоритм Куна (Куна-Цермело) представляет собой последовательность редукций игры G.

Шаг 1. Рассмотрим множество Z_1 предфинальных вершин – то есть таких, для которых все последующие вершины являются финальными:

$$Z_1 = \{x | \sigma^{-1}(x) \subseteq T\}$$

Для каждой вершины $x \in Z_1$ действуем следующим образом.

1) Если в данной вершине ходит игрок $a \in A$ (то есть $x \in Z_1 \cap X^a$), то находим его наилучший выбор в этой вершине: $\mu^a(x) \in$

[14] Гарольд Уильям Кун (29 июля 1925 – 2 июля 2014) – американский математик, известный работами в теории игр, лауреат премии фон Неймана в 1980 году (совместно с Д.Гейлом и А.У.Таккером). Помимо приводимого здесь алгоритма, а также Теоремы об эквивалентности смешанных и поведенческих стратегий, его имя носят условия Каруша-Куна-Таккера и теоретико-игровая модель покера Куна.

[15] Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (27 июля 1871 — 21 мая 1953) — немецкий математик, внёсший значительный вклад в теорию множеств и создание аксиоматических оснований математики.

$Arg \max\limits_{y \in \sigma^{-1}(x)} u^a(y)$ и доопределяем вектор выигрышей игроков в вершине $u(x) = (u^b(x), b \in A) \stackrel{\text{def}}{=} u^b\big(\mu^a(x)\big), b \in A)$.

2) Если в данной вершине ходит случай ($x \in Z_1 \cap X^0$), то приписываем этой вершине среднее значение вектора выигрышей среди возможных альтернатив:

$$u(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} p(y|x) u(y)$$

После этого переходим к следующей предфинальной вершине x', проделываем аналогичную процедуру для нее, и т.д. В результате получена редуцированная игра с множеством финальных вершин Z_1 – то есть на один «ярус» меньше, чем было в исходной игре. По сути дела, мы «сыграли» последний шаг игры за игроков, определив их оптимальное поведение на этом шаге. А полученное дерево представляет собой позиционную игру, укороченную на один шаг по сравнению с исходной, однако выигрыши игроков в ней таковы, как если бы этот «исключенный» шаг в игре был, и они действовали бы на нем оптимально с точки зрения исходной игры.

Шаг 2. Для редуцированной игры действуем аналогично шагу 1: находим множество нефинальных вершин Z_2, для которых все последующие вершины в новом дереве являются финальными. В это множество войдут все вершины из множества Z_1, а также некоторые финальные вершины исходной игры: $Z_2 = \{x | \sigma^{-1}(x) \subseteq T \cup Z_1\}$. Для каждой вершины x этого множества аналогично пунктам 1) и 2) определяем выборы $\mu^a(x)$ при $x \in X^a$ и вектор выигрышей $u(x)$. Далее аналогично продолжаем этот процесс для множеств $Z_3 = \{x | \sigma^{-1}(x) \subset T \cup Z_1 \cup Z_2\}, Z_4 = \{x | \sigma^{-1}(x) \subset T \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3\}$ и т.д., пока очередное множество Z_l не будет состоять только из начальной вершины x_0. При этом полученная ситуация $\mu = (\mu^a, a \in A)$ будет совершенным подыгровым равновесием исходной игры G.

Теорема 7.2. В любой конечной позиционной игре с полной информацией существует совершенное подыгровое равновесие. Соответствующие стратегии и выигрыши игроков задаются алгоритмом Куна.

Доказательство этой теоремы носит конструктивный характер и базируется как раз на самом алгоритме Куна. На каждом шаге алгоритма мы в явном виде указываем элементы равновесных стратегий игроков, а завершение алгоритма гарантирует конечность дерева – ведь максимальное число итераций в алгоритме Куна не может превышать высоту дерева игры в развернутой форме.

Проиллюстрируем работу алгоритма Куна на примере той же самой игры, что и раньше (ее дерево – на Рисунок 7.6).

На первом шаге рассматриваем предфинальные вершины на предпоследнем ярусе дерева – вершины IV и $XIII$. В вершине IV ходит второй игрок, и для него наиболее выгодной из двух возможных альтернатив является левая – ведь там он получает 8 единиц полезности против -12 для правой альтернативы. Поэтому в СПР-стратегии второго игрока выбором второго игрока в вершине IV является альтернатива $Л$, а самой вершине при редукции дерева приписывается вектор выигрышей (4,8). Для вершины $XIII$ действуем аналогично: в ней ходит первый игрок, для которого предпочтительной альтернативой является левая (16 единиц выигрыша против 12). При редукции дерева вершине припишется вектор выигрышей $(16,12)$. На этом первый шаг алгоритма окончен, в редуцированном дереве множество терминальных вершин – $\{IV, V, VI, VII, VIII\}$. Выигрыши в вершинах V, VI, VII те же, что и в исходном дереве, а в вершинах IV и $VIII$ они были только что определены. На Рисунок 7.8 первому шагу алгоритма соответствуют выделенные красным цветом ребра дерева и векторы выигрышей.

На шаге 2 множество предфинальных вершин - II и III. В вершине II ходит первый игрок, выбирающий из двух альтернатив: левая дает ему выигрыш 4 единицы, правая – 8 единиц (ее он и выбирает). В вершине III ходит второй игрок, выбирающий из трех альтернатив: левая дает ему выигрыш -4 единицы, центральная – 0 единиц, а правая – 12 единиц. Поэтому второй игрок выберет именно правую альтернативу. Этому шагу алгоритма соответствуют ребра и выигрыши, отмеченные на Рисунок 7.8 синим цветом.

На третьем шаге остается только одна предфинальная вершина – корень дерева, в котором ходит случай. Таким образом, вектор выигрышей игроков равен математическому ожиданию выигрышей: $\frac{1}{4}(8,-8)+\frac{3}{4}(16,12)=(14,7)$, а совершенное подыгровое равновесие – это ситуация (ПЛ, ПЛ). Таким образом, алгоритм Куна позволил нам подтвердить полученный ранее результат.

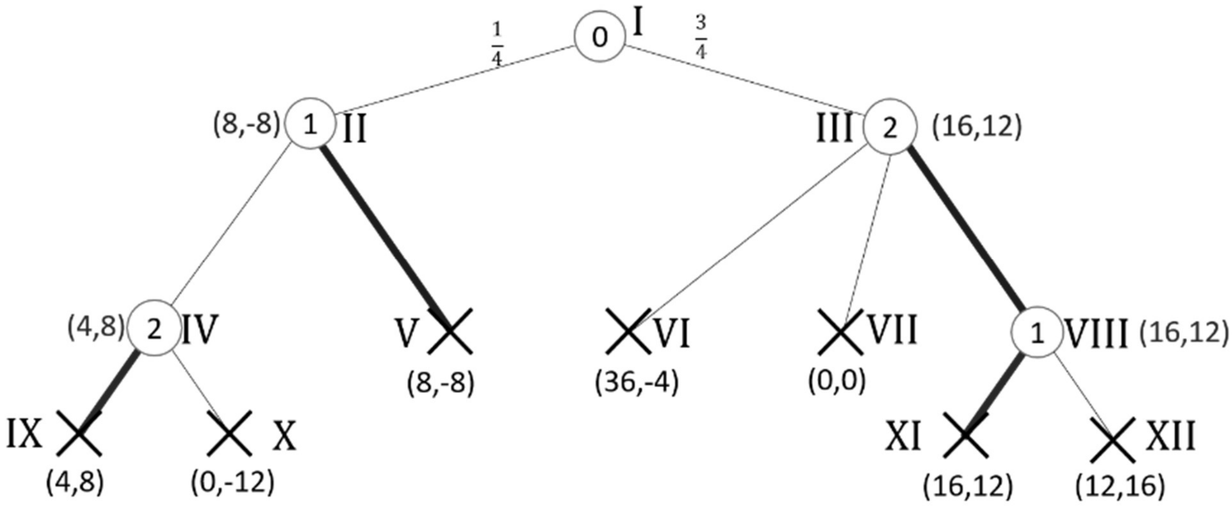


Рисунок 7.8. Применение алгоритма Куна к игре, дерево которой приводилось на Рисунок 7.6. Красным отмечены элементы, выбиравшиеся на первом шаге, синим – на втором.

Совершенное подыгровое равновесие является устойчивым к малым случайным ошибкам игроков. Иными словами, если игроки могут ошибаться, принимая решения в «своих» вершинах, с небольшой вероятностью выбирая не ту альтернативу, которую запланировали, то в «новой» игре с возможностью ошибки СПР будет по-прежнему соответствовать равновесию в исходной. Формально, рассмотрим возмущение игры G. В каждой позиции игрока a с вероятностью $1-\varepsilon$ реализуется намеченная им альтернатива, а с вероятностью ε равновероятно реализуется любая другая альтернатива (т.е. после данной вершины «появляется» еще одна, где делает ход случай, а вероятности перехода определены указанным образом). Любая вершина исходной игры в возмущенной игре G_ε реализуется с положительной вероятностью при любых стратегиях игроков.

Теорема 7.3. Пусть в исходной позиционной игре G существует единственное совершенное подыгровое равновесие. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ в игре G_ε существует единственное равновесие Нэша, совпадающее с совершенным подыгровым равновесием исходной игры.

Доказательство повторяет схему алгоритма Куна. В любой предфинальной позиции $x \in Z_1 \cap X^a$ существует единственный наилучший выбор $\mu^a(x)$ игрока a, отвечающий совершенному подыгровому равновесию. В любой ситуации равновесия $\hat{\mu}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\hat{\mu}^a(x) = \mu^a(x)$, поскольку вероятность перехода в вершину x положительна и любой другой выбор приведет к строго меньшему выигрышу. Далее рассматриваются вершины из $Z_2, Z_3, \ldots$, проводятся аналогичные рассуждения по индукции и доказывается, что $\hat{\mu}^a \equiv \mu^a$.

Следствие. Пусть в позиционной игре G существует единственное совершенное подыгровое равновесие. Тогда игра в нормальной форме $\Gamma(G)$ разрешима по доминированию, а выигрыши $f^a(\mu)$, соответствующие совершенному подыгровому равновесию, задаются алгоритмом Куна**.**

7.4. Позиционные игры общего вида. Информационные множества игроков. Смешанные стратегии в позиционных играх общего вида.

Рассмотрим простую задачу «Встреча в городе». Два студента, Аня и Боря (игроки А и Б), договорились пойти в Малый Театр. Билеты куплены, и за час до встречи они садятся в метро в разных районах Москвы. Театр находится на станции метро Площадь

Революции. К сожалению, они забыли договориться, где встречаться: в метро или у входа в театр. Телефонов у них нет. Что они будут делать? У каждого два варианта действий: ждать в метро (М) или у театра (Т). Если они пойдут в разные места, то опоздают на спектакль. Матрицы выигрышей имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В этой игре два равновесия: (М, М) и (Т, Т), причем ни у одного из игроков нет доминирующих стратегий. При расчете равновесий мы предполагали, что когда Аня и Боря принимают решения, между ними отсутствует связь; следовательно, на момент принятия решения Боря не знает о решении Ани, и наоборот. Есть два эквивалентных способа записать эту игру как позиционную:

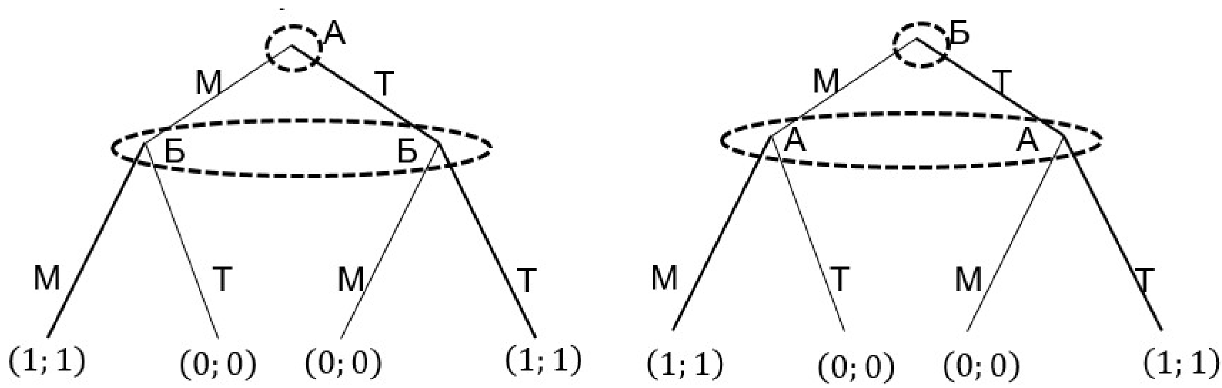


Рисунок 7.9. Два варианта дерева игры «Встреча в городе».

Слева - дерево игры, в которой Аня делает первый ход, но Боря не знает, какой ход она сделала. Т.е. на момент принятия решения Боря не различает, в какой из своих двух вершин он находится. Это предположение достигается объединением двух вершин, в которых Боря делает ход, в одно информационное множество.

Справа показан альтернативный способ записи той же игры, где первый ход делает Боря, а Аня не различает вершины.

Определение 7.9. Пусть Γ - игра в развернутой форме. Информационным множеством игрока i есть совокупность вершин, в которых этот игрок делает ход, со следующими свойствами:

1. Каждая вершина игрока i содержится в одном и ровно одном информационном множестве

2. Пусть h_i - информационное множество игрока i. Во всех вершинах, входящих в h_i, игроку доступен один и тот же набор действий $Al(h_i)$.

Информационное множество – это совокупность состояний игры, которые игрок не различает между собой. Информационное множество не должно содержать двух позиций, принадлежащих одному пути, соединяющему начальную вершину с некоторой финальной. Пронумеруем эти множества для каждого игрока и обозначим информационное множество под номером j игрока a как Z^{aj}.

Как и в игре с полной информацией, в произвольной позиционной игре:

$$G = \langle A; \langle X, \sigma \rangle; u^a(x), x \in T, a \in A; X \backslash T = \bigcup_{a \in A} X^a ; \forall x \in X^0\ \exists p(x'|x), x' \in \sigma^{-1}(x) \rangle$$

Обозначения те же, что и раньше, однако для каждого $a \in A$ задано разбиение на информационные множества:

$$X^a = \bigcup_{j \in J^a} Z^{aj}$$

Каждое из множеств Z^{aj} содержит позиции с одинаковым числом $k(j)$ альтернатив (последующих вершин). Альтернативы в каждой позиции $x \in Z^{aj}$ пронумерованы слева направо числами от 1 до $k(j)$. Обозначим $Al^{aj} = \{1, \ldots, k(j)\}$ множество альтернатив для информационного множества Z^{aj} игрока $a \in A$.

Определение 7.10. Чистой стратегией игрока $a \in A$ называется отображение μ^a, определяющее для каждого информационного множества Z^{aj} альтернативу $\mu^a(Z^{aj}) \in Al^{aj}$, которую игрок выбирает в любой из вершин этого множества. Набор таких стратегий $\mu = (\mu^a, a \in A)$ называется ситуацией.

Для позиционных игр общего вида определение совершенного подыгрового равновесия имеет такой же вид, как и в случае позиционных игр с полной информацией. Однако в этом случае подыгры перебираются с учетом информационных множеств.

Для иллюстрации того, как будет выглядеть поиск СПР в позиционных играх общего вида, рассмотрим пример применения теории игр к военному делу, приведенный Захаровым – игра «Сжигание мостов». Генерал должен защищать город на берегу реки. До того, как враг нападает, генерал принимает решение, сжигать мост, соединяющий город с другим берегом (B), или нет (N). В городе расквартированы два подразделения, которыми командуют подчиненные генерала. Они могут наблюдать действия начальника, однако поведение друг друга им остается неизвестным до момента завершения сражения. После того, как генерал решает, что делать с мостом, решение принимает первый командир: он решает, бежать или нет с поля боя. Последним решение принимает командир второго подразделения, он также решает, следует ли его бойцам отступить или сражаться до конца, однако решение первого командира при этом ему неизвестно. Для защиты города достаточно хотя бы одного отряда: если город прикрывает один отряд, он ценой собственных жизней удерживает его, если же отрядов два, то они оба несут потери, но значительно менее тяжелые, чем понесли бы, защищаясь в одиночку. Выигрыш генерала равен 1 единице полезности, если город удается удержать (т.е., в нем остается хотя бы одно подразделение), и 0, если город сдается врагу (все защитники бежали).

В случае, когда мост не разрушен, отступить из города не составляет труда. Взаимодействие командиров в этом случае представляет собой игру на координацию: если они оба отступят, то получат по 3 единицы полезности (все будут живы, но покрыты позором), если оба решат биться – по 3 единиц (бой будет выигран, но не все солдаты в подчинении командиров выживут). Если же один командир бежит с поля боя, а другой останется сражаться в одиночку, то бежавший командир получит 5 единиц полезности (город все равно выстоит, но его подразделение не пострадает), а сражающийся – лишь 2 единицы (он удержит город, но потеряет своих людей). Если же генерал разрушает мост, то отступление связано с потерей дополнительных двух единиц полезности: ведь теперь им необходимо восстанавливать мост, чтобы бежать. При этом на потери и выигрыши оставшегося в городе подразделения состояние моста не влияет.

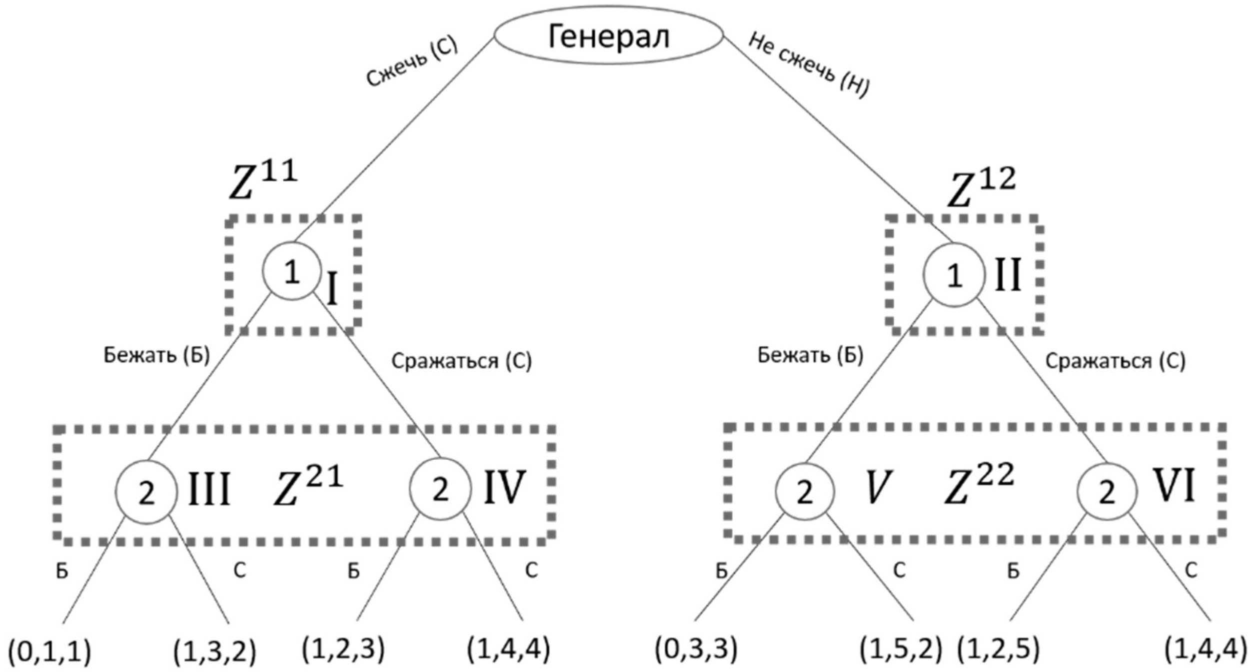


Рисунок 7.10. Дерево игры «Сжигание мостов»

Изобразим взаимодействие игроков в виде дерева (Рисунок 7.10). Здесь возможны всего две подыгры – одна соответствует решению Генерала сжечь мост (левое поддерево, корень – вершина I), другая – решению оставить мост (правое поддерево, корень – вершина II). Так как второй командир не различает между собой вершины, входящие в одно информационное множество (это пары вершин III/IV из множества Z^{21} и пара V/VI из множества Z^{22}), то подыгр с деревьями, начинающихся из любой из этих вершин, не существует.

Для каждой из этих подыгр запишем нормальную форму и найдем равновесие. Если генерал не сжигает мост, выигрыши командиров в зависимости от принимаемых ими решений таковы:

$$A_{\text{С}} = \begin{array}{c} \\ \text{Б} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad B_{\text{С}} = \begin{array}{c} \\ \text{Б} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ \mathbf{5} & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

В этой биматричной игре равновесием Нэша (и равновесием в доминирующих стратегиях) является ситуация, в которой оба командира предпочитают бежать. Если же мост сожжен, выигрыши командиров можно записать в виде другой пары матриц:

$$A_{\text{Н}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Б} \\ \text{С} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad B_{\text{Н}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Б} \\ \text{С} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

А вот в этой игре равновесием Нэша (и – вновь! – равновесием в доминирующих стратегиях) является ситуация, в которой оба командира предпочитают сражаться. Таким образом, сжигание генералом моста приведет при использовании его подчиненными СПР-стратегий к его выигрышу в 1 единицу (город удержан), а сохранение моста – к нулевому выигрышу (город потерян), очевидно, что его равновесная стратегия – сжечь мост. На дереве игры СПР будет иметь следующий вид:

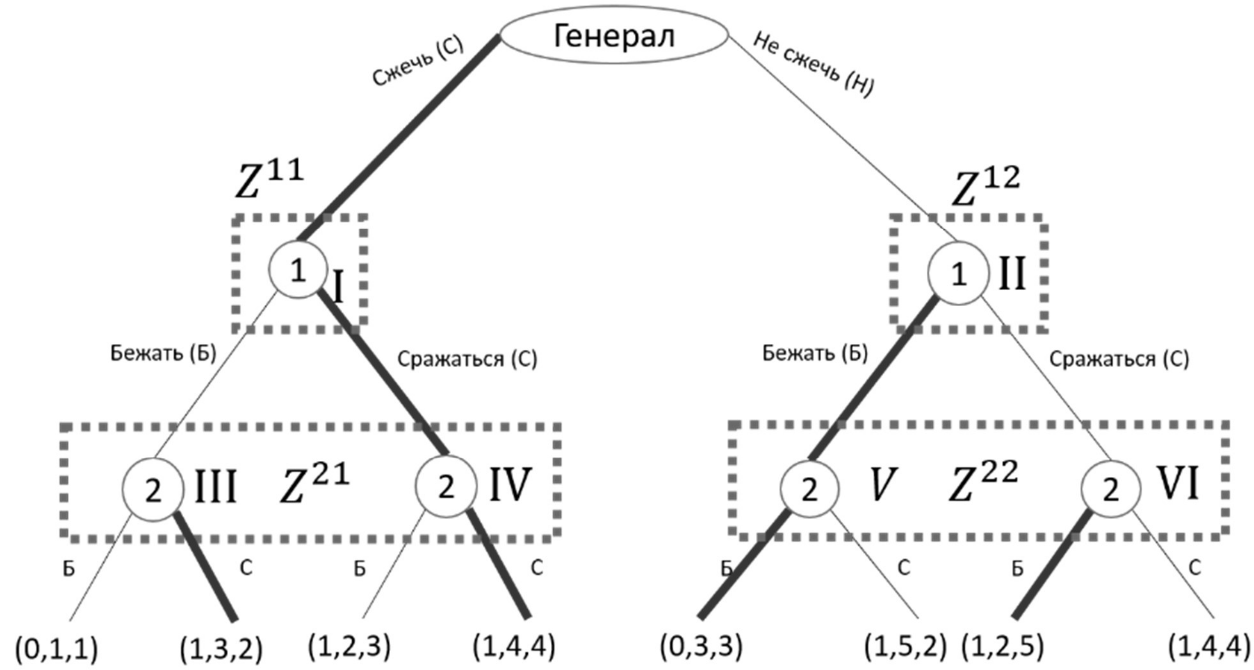


Рисунок 7.11. Дерево игры «Сжигание мостов» с отмеченным на нем совершенным подыгровым равновесием.

Обратите особое внимание на отмеченные ребра дерева для вершин III-VI, в которых ход делает второй командир. Так как вершины III и IV входят в одно информационное множество, то игрок в них делает один и тот же ход. То же справедливо и для пары вершин V и VI. При этом если бы второй командир мог различать вершины в рамках каждого информационного множества, СПР (и исход взаимодействия) был бы тем же! Так в чем же отличие?

Для ответа на этот вопрос полезно будет записать множества стратегий всех игроков как для рассматриваемой игры, так и для ее модификации с полной информацией. Для Генерала это $S_{\text{Г}} = \{\text{С}, \text{Н}\}$, для Первого командира - $S_1 = \{\text{ББ}, \text{БС}, \text{СБ}, \text{СС}\}$, где на первом месте стоит его решение в вершине I, а на втором в вершине II. В обеих модификациях игры эти множества стратегий одинаковые. А вот у Второго командира они множества стратегий разные. В игре общего вида имеем: $S_2 = \{\text{ББ}, \text{БС}, \text{СБ}, \text{СС}\}$, где на первом месте стоит его решение в информационном множестве $Z^{21} = \{III, IV\}$, а на втором в информационном множестве $Z^{22} = \{V, VI\}$. Если же он в состоянии различать вершины, то множество его стратегий увеличивается в четыре раза (квадратично!):

$$\tilde{S}_2 = \begin{Bmatrix} \text{ББББ}, \text{БББС}, \text{ББСБ}, \text{ББСС}, \\ \text{БСББ}, \text{БСБС}, \text{БССБ}, \text{БССС}, \\ \text{СБББ}, \text{СББС}, \text{СБСБ}, \text{СБСС}, \\ \text{ССББ}, \text{ССБС}, \text{СССБ}, \text{СССС}, \end{Bmatrix}$$

В этой записи буквы последовательно «кодируют» поведение игрока в каждой из теперь уже четырех ситуаций, где он принимает решение, соответствующих вершинам III-VI. Например, стратегия

СББС означает следующее: *«В вершине III сдаваться, в вершине IV биться, в вершине V биться, в вершине VI сдаваться»*.

В свете полученных результатов на первый взгляд «одинаковые» СПР в исходной игре и ее модификации с полной информацией приобретают абсолютно различный вид – хотя на дереве они соответствует набору из одних и тех же ребер. Запишем их формально: в исходной игре СПР имеет вид $(\text{С}, \text{СБ}, \text{СБ})$, а в модифицированной - $(\text{С}, \text{СБ}, \text{ССББ})$. «Удвоение» стратегий у второго командира произошло как раз из-за того, что в модифицированной игре он различает вершины.

Для позиционных игр, так же, как и для стационарных, можно определить понятие смешанных стратегий.

Определение 7.11. Смешанной стратегией π^a игрока $a \in A$ называется вероятностное распределение на множестве $\{\mu^a\}$ его чистых стратегий, ставящее в соответствие каждой стратегии μ^a вероятность $\pi^a_{\mu^a}$ ее выбора.

Ситуация в смешанных стратегиях определяет вероятностное распределение на множестве Т финальных позиций:

$$p(x|\pi) = \sum_{\mu} \left(\prod_{a \in A} \pi^a_{\mu^a} \right) p(x|\mu)$$

Выигрыш игрока а в ситуации π определяется как математическое ожидание $u^a(\pi) = \mathbb{E}(u^a(x)|\mu) = \sum_{x \in T} u^a(x) p(x|\pi)$. Этот способ введения смешанных стратегий аналогичен случаю игр в нормальной форме. Он здесь не слишком эффективен, поскольку даже для небольших деревьев число возможных чистых стратегий может быть очень велико.

Более эффективным является следующий подход, связанный с понятием стратегии поведения (поведенческой стратегии). Рассмотрим ситуацию, когда игрок выбирает вероятностное распределение на альтернативах для каждого своего информационного множества. Определившись с распределением, он проводит рандомизацию, пользуясь им. При этом предполагается, что случайный выбор альтернатив в различных информационных множествах производится независимо.

Определение 7.12. Стратегией поведения игрока a называется отображение, которое каждому информационному множеству Z^{aj}, $j \in J^a$, сопоставляет набор

$$\left(p_k^{aj}; k = 1, \dots k(j)\right): \sum_{k=1}^{k(j)} p_k^{aj} = 1; p_k^{aj} \geq 0; k = 1, \dots k(j)$$

причем p_k^{aj} − вероятность выбора альтернативы $k \in Al^{aj}$ в любой позиции множества Z^{aj}.

Любая ситуация $\beta = (\beta^a; a \in A)$ в стратегиях поведения определяет вероятностное распределение на множестве позиций:

$$\sigma(x) \in Z^{aj}; x = \xi(\sigma(x), k); k \in Al^{aj}$$
$$\Downarrow$$
$$p(x|\beta) = p(\sigma(x)|\beta) p_k^{aj}$$

Определение 7.13. Позиция $x \in X^a$ игрока a называется **возможной** для смешанной стратегии π^a (чистой стратегии μ^a), если существует такая ситуация π *(μ),* содержащая π^a *(μ^a),* что $p(x|\pi) > 0$ ($p(x|\mu) > 0$).

Определение 7.14. Информационное множество Z^{aj} игрока a называется **существенным** для смешанной стратегии π^a (чистой стратегии μ^a), если некоторая позиция $x \in Z^{aj}$ возможна для π^a (μ^a).

Обозначим множество позиций, возможных для стратегии μ^a, через $\mathrm{Poss}\mu^a$, а семейство информационных множеств, существенных для μ^a, через $\mathrm{Rel}\mu^a$. Аналогично вводятся множество $\mathrm{Poss}\pi^a$ и семейство $\mathrm{Rel}\pi^a$.

Каждая смешанная стратегия однозначно определяет соответствующую стратегию поведения. В то же время, каждой стратегии поведения соответствует много смешанных стратегий. Но одну из них всегда можно задать следующим образом.

Лемма 7.1. Если дана стратегия поведения β^a игрока a и смешанная стратегия π^a определена по формуле

$$\pi^a_{\mu^a} = \prod_{j \in J^a} p^{aj}_{i_j}$$

где $\mu^a\left(Z^{aj}\right) = i_j \in Al^{aj}$, то β^a есть стратегия поведения, соответствующая π^a.

Приведенная лемма утверждает, что мы можем получить каждую стратегию поведения из некоторой смешанной стратегии. Для иллюстрации полученных выше результатов рассмотрим простую карточную игру двух игроков, описанную Васиным.

Пример 7.2. Рассмотрим антагонистическую игру, в которой Игрок 1 представляет собой команду из двух агентов, играющих по очереди («Стартующий» и «Финиширующий»). В начале игры игрокам сдаются две карты – старшая и младшая, а от лица Игрока 1 первым решение принимает Стартующий. Два возможных расклада карт (расклад 1: старшая – игроку 1, младшая – игроку 2; расклад 2: старшая – игроку 2, младшая – игроку 1) считаются равновероятными. Игрок со старшей картой получает доллар от игрока с младшей картой и имеет альтернативы либо закончить, либо продолжить партию. Если партия продолжается, то Стартующий выходит из игры и его место в качестве Игрока 1 занимает Финиширующий. Он не знает расклада карт и исхода первого тура игры (т. е., полученной суммы) и может либо «вслепую» поменяться картой с игроком 2, либо сохранить свою карту. После этого происходит второй тур игры – игроки вскрывают карты и снова имеющий старшую карту получает доллар от игрока, имеющего младшую (см. дерево игры, где в каждой финальной позиции записан выигрыши игроков).

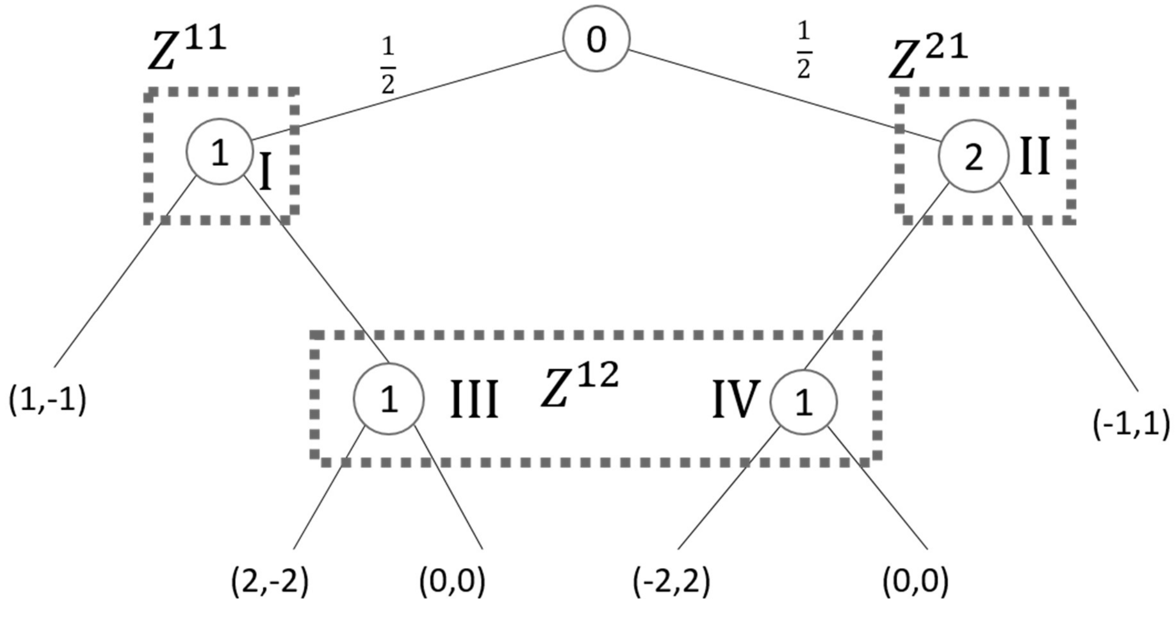


Рисунок 7.12. Дерево «Карточной игры» (Пример 7.2).

В дереве этой игры множества вершин, где делают ход игрок 1 (либо Стартующий, либо Финиширующий), имеет вид: $X_1 = Z^{11} \cup Z^{12}$, множество вершин второго игрока - $X_2 = Z^{21}$. Исходя из этого, стратегии двух игроков имеют вид: $\mu_1 = \left(\mu_1(Z^{11}), \mu_1(Z^{12})\right)$ – у первого игрока (первый элемент соответствует его выбору в информационном множестве Z^{11}, второй – во множестве Z^{12}) и $\mu_2 = \mu_2(Z^{21})$ – у второго игрока (он принимает решение только в одном информационном множестве). У игрока 1 множество стратегий состоит из 4 элементов:

$$S_1 = \begin{Bmatrix} (\text{закончить игру, менять карту}); \\ (\text{закончить игру, оставить карту}); \\ (\text{продолжить игру, менять карту}); \\ (\text{продолжить игру, оставить карту}) \end{Bmatrix}$$

Для сокращения записи обозначим эти четыре стратегии по первым буквам действий игрока (З=закончить, П=продолжить, М=менять карту, О=оставить карту): $S_1 = \{\text{ЗМ};\ \text{ЗО}; \text{ПМ}; \text{ПО}\}$. Аналогично, у второго игрока множество стратегий включает в себя два элемента: $S_2 = \{\text{Закончить игру};\ \text{Продолжить игру}\} = \{\text{З};\ \text{П}\}$.

Приведем нашу игру к нормальной форме. У нас должна получиться биматричная игра с матрицами выигрыша размера 4×2 – но так как наша игра антагонистическая, то мы можем обойтись только одной матрицей:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{ЗО} \\ \text{ЗМ} \\ \text{ПО} \\ \text{ПМ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{З} & \text{П} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Обсудим, почему матрица имеет именно такой вид. Всего в игре возможно восемь профилей стратегий. Разберем их по отдельности.

1. Рассмотрим первый профиль стратегий – (ЗО; З), он соответствует описанию поведения игроков: «*Первый игрок,*

оказавшись в информационном множестве Z^{11}, завершает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру». К какому исходу игры приведет такое поведение (т. е., в какой финальной вершине дерева мы окажемся)? В самом начале сдаются карты, и с вероятностью $\frac{1}{2}$ дальнейшее взаимодействие игроков пойдет по левому поддереву игры (старшая карта оказалась у первого игрока), а с вероятностью $\frac{1}{2}$ – по правому (старшая карта оказалась у второго игрока):

$$u_1(\text{ЗО};\ \text{З}) = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З})$$
$$= \frac{1}{2}u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{левое п/д}) + \frac{1}{2}u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{правое п/д})$$

Переход в левое поддерево означает попадание в множество Z^{11}, где первый игрок, согласно своей стратегии, заканчивает игру, получая один доллар: $u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{левое п/д}) = 1 = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{левое п/д})$. Переход в правое поддерево приводит игру в множество Z^{21}, где игру завершает второй игрок, и доллар получает именно он: $u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{правое п/д}) = -1 = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{правое п/д})$. Таким образом, имеем: $u_1(\text{ЗО};\ \text{З}) = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З}) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$.

2. (ЗО; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве Z^{11}, завершает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Рассуждаем по той же схеме, что и раньше:

$$u_1(\text{ЗО; П}) = -u_2(\text{ЗО; П}) = \frac{1}{2}u_1(\text{ЗО; П|левое п/д}) + \frac{1}{2}u_1(\text{ЗО; П|правое п/д})$$

Переход в левое поддерево означает попадание в множество Z^{11}, где первый игрок, согласно своей стратегии, заканчивает игру, получая один доллар: $u_1(\text{ЗО; П|левое п/д}) = 1 = -u_2(\text{ЗО; П|левое п/д})$. Переход в правое поддерево приводит игру в множество Z^{21}, где решение принимает второй игрок, и продолжает игру. После этого игра переходит в информационное множество Z^{12}, где первый игрок (им оказывается уже Финиширующий) «вслепую» оставляет себе карту. Поскольку мы находимся в левом поддереве, то из информационного множества Z^{12} фактической вершиной, где принимается решение, является вершина IV, и стратегия игрока 1 «оставить карту» приводит к повторной потере им доллара и общим потерям в 2 доллара, и выигрышу этой суммы вторым игроком: $u_1(\text{ЗО; З|правое п/д}) = -2 = -u_2(\text{ЗО; З|правое п/д})$. Таким образом, имеем: $u_1(\text{ЗО; З}) = -u_2(\text{ЗО; З}) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(-2) = -0{,}5$.

По аналогичной схеме можно рассчитать выигрыши игроков и в остальных ситуациях, для них подробные рассуждения уже можно опустить:

3. (ЗМ; З): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве Z^{11}, завершает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ЗМ; З}) = -u_2(\text{ЗМ; З}) =$$

$$= \frac{1}{2} u_1 \left(\text{ЗМ; З}|\text{левое} \frac{\text{п}}{\text{д}}\right) + \frac{1}{2} u_1 \left(\text{ЗМ; З}|\text{правое} \frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

4. (ЗМ; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}, *завершает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}, *меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ЗМ; П}) = -u_2(\text{ЗМ; П}) =$$

$$= \frac{1}{2} u_1 \left(\text{ЗМ; П}|\text{левое} \frac{\text{п}}{\text{д}}\right) + \frac{1}{2} u_1 \left(\text{ЗМ; П}|\text{правое} \frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5$$

5. (ПО; З): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}, *продолжает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}, *оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПО; З}) = -u_2(\text{ПО; З}) =$$

$$= \frac{1}{2} u_1 \left(\text{ПО; З}|\text{левое} \frac{\text{п}}{\text{д}}\right) + \frac{1}{2} u_1 \left(\text{ПО; З}|\text{правое} \frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(-1) = 0{,}5$$

6. (ПО; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}, *продолжает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}, *оставляет карту. Второй игрок в своем*

единственном информационном множестве продолжает игру». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПО; П}) = -u_2(\text{ПО; П}) =$$

$$= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПО; П}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) + \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПО; П}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(-2) = 0$$

7. (ПМ; З): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве Z^{11}, продолжает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПМ; З}) = -u_2(\text{ПМ; З}) =$$

$$= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; З}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) + \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; З}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}(-1) = -0{,}5$$

8. (ПМ; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве Z^{11}, продолжает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПМ; П}) = -u_2(\text{ПМ; П}) =$$

$$= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; П}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) + \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; П}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

В полученной матричной игре равновесия в чистых стратегиях нет (проверьте самостоятельно!). При этом ее можно решить рассмотренным в первой части учебного пособия методом поиска смешанных равновесий в биматричных играх и с помощью процесса последовательного исключения доминируемых стратегий. Сам по себе процесс поиск равновесия предоставляется читателю, а результат его таков: равновесием в рассматриваемой игре является профиль стратегий $(p_0, q_0) = \left(\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$, а значение игры (ожидаемый выигрыш первого игрока) равен $\frac{1}{4}$.

Построим для нашей игры множество стратегий поведения первого игрока. Пусть в информационном множестве Z^{11} он с вероятностью s выбирает вариант «закончить игру» (а с вероятностью $1-s$, соответственно, «продолжить»), а в множестве Z^{12} – с вероятностью r он сохраняет карты. Запишем его ожидаемые выигрыши при такой стратегии поведения:

$$\frac{s}{2} + 2\left((1-s)\frac{r}{2}\right) + 0 - \frac{1}{2} = (s-1)\left(\frac{1}{2} - r\right), \qquad \text{если } \mu^2 = (\text{З})$$

$$\frac{s}{2} + 2\left((1-s)\frac{r}{2}\right) + 0 + (-2)\frac{r}{2} + 0 = s\left(\frac{1}{2} - r\right), \qquad \text{если } \mu^2 = (\text{П})$$

Наилучшим гарантированным результатом первого игрока является минимум из этих двух значений – так как при любой, даже самой неблагожелательной к нему стратегии второго игрока, первый не получит меньше этого значения. Следовательно, максимальная сумма, которую игрок 1 может себе обеспечить, равна:

$$\max_{r,s\in[0,1]} \min\left\{(s-1)\left(\frac{1}{2} - r\right), s\left(\frac{1}{2} - r\right)\right\}$$

Так как $s \in [0,1]$, то $s - 1 < 0$, и минимум из двух выражений внутри фигурных скобок достигается на выражении $(s-1)\left(\frac{1}{2} - r\right)$.

По сути, это означает, что с точки зрения первого игрока, неблагожелательной к нему стратегией второго игрока является стратегия «закончить игру», и логически это объяснимо: если у второго игрока оказалась старшая карта, то эта стратегия сразу приводит к проигрышу первого игрока, если же у него оказалась младшая, то он просто не получает возможности принять решение.

Максимизируем минимальный выигрыш первого игрока: $\max\limits_{r,s\in[0,1]}(s-1)\left(\frac{1}{2}-r\right)=0$, и достигается он при $r=\frac{1}{2}$ (а s уже не играет роли и может быть любым). Здесь важно обратить внимание на один (на самом деле, кажущийся) парадокс: гарантированный выигрыш первого игрока при использовании им смешанных стратегий существенно выше, чем при использовании стратегий поведения. В чем же дело и каковы причины этого противоречия?

Для ответа на этот вопрос полезно преобразовать оптимальную смешанную стратегию к «поведенческому» виду, а оптимальную стратегию поведения – к полному «смешанному» виду. Согласно Лемма 7.1, смешанной стратегии $\pi_1=\left(\pi_{1,1}^1,\pi_{1,2}^1,\pi_{2,1}^1,\pi_{2,2}^1\right)$ соответствует стратегия поведения $\beta_1=(s,r)=\left(\pi_{1,1}^1+\pi_{1,2}^1,\pi_{1,1}^1+\pi_{2,1}^1\right)$. Таким образом, оптимальной смешанной стратегии первого игрока $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ соответствует стратегия поведения $s=r=\frac{1}{2}$, и, в то время как оптимальная смешанная стратегия обеспечивает первому игроку выигрыш $\frac{1}{4}$, даже соответствующая стратегия поведения дает ему только 0. «Корень» этого кажущегося противоречия в независимости принятия решений в каждом информационном множестве, содержащейся в природе стратегии поведения. Действительно, стратегия поведения по своей сути не задает заранее единую «программу действий» игрока на случай любых возможных ситуаций, в которых он может принимать решение, а просто набор рекомендаций, куда перейти из каждого информационного множества – и неважно, каким образом он туда попадет.

Тем не менее, существует класс позиционных игр, в которых поведенческие стратегии и смешанные стратегии эквивалентны, и парадоксов, подобных приведенному выше, не возникает. Интуитивно понятно, что к такому классу игр должны относиться, например, позиционные игры с полной информацией. Однако для того, чтобы понять, почему это так, введем следующе определение.

Определение 7.15. Игра G называется игрой с полной памятью для игрока a, если из того, что $Z^{aj} \in Rel\pi^{a}$ и $x \in Z^{aj}$ следует, что $x \in Poss\mu^{a}$ для всех Z^{aj}, x и μ^{a}.

Смысл этого определения очень прост – игра является игрой с полной памятью для игрока a, если у него любая вершина из существенного информационного множества является возможной. Название «игра с полной памятью» отражает тот факт, что каждый игрок, в каждом информационном множестве, помнит всю последовательность сделанных им ходов, а также не забывает все однажды увиденные им ходы его соперников.

Обратите внимание, что рассмотренная ранее модель карточной игры не является игрой с полной информацией с точки зрения игрока 1. Дело в том, что информационное множество Z^{12} существенно для стратегии $\mu^1 = (1{,}2)$, поскольку, если игрок 2 использует стратегию

$\mu^2 = (2)$, то позиция $y \in Z^{12}$ реализуется с вероятностью $\frac{1}{2}$. Однако другая позиция $x \in Z^{12}$ не является возможной для стратегии μ^1, так как Играющий, получив старшую карту, заканчивает игру.

Очевидно, что игра с полной памятью для всех игроков превращается в игру с полной информацией, если все ее информационные множества содержат по одной вершине. Для игр с полной информацией, как уже было указано выше, очевидна эквивалентность смешанных стратегий и стратегий поведения. Следующая теорема, доказанная Гарольдом Куном в 1953 году, устанавливает факт такой эквивалентности для любых игр с полной памятью для всех игроков.

Теорема 7.4. Для всех игр с полной памятью, смешанные и поведенческие стратегии эквивалентны. Точнее говоря: пусть β − ситуация в стратегиях поведения, соответствующая произвольной ситуации π в смешанных стратегиях в игре G, в которой все позиции имеют по крайней мере две альтернативы. Тогда для того чтобы $u^a(\beta) = u^a(\pi), a \in A$, для всех π и для любых значений функций выигрыша $u^a(w), a \in A,\ w \in T$, необходимо и достаточно, чтобы G была игрой с полной памятью для всех игроков.

Доказательство этой теоремы весьма сложно для восприятия и выходит за рамки вводного курса Теории игр. Тем не менее, заинтересованный читатель может найти его в книге Васина (2005). Таким образом, в играх с полной памятью при поиске равновесий можно ограничиться поиском только в стратегиях поведения.

7.5. Экономические модели, основанные на многошаговых играх (дуополия Штакельберга, модель найма, цепочка поставок).

Рассмотрим несколько наиболее известных многошаговых игровых моделей из микроэкономики. Например, хорошо известная классическая модель дуополии Штакельберга, по сути, представляет собой иерархическую игру типа Γ_1 между двумя фирмами-дуополистами на рынке одного товара. Модель «Принципал-агент», часто используемая при анализе рынков труда и представляющая собой простейшую модель найма, родственна иерархической игре Γ_2. Наконец, модель цепочки поставок (supply chain) представляет собой многошаговую игру, в которой на каждом шаге свое решение принимает фирма-звено в производственной цепочке от производителя первичного товара до ритейлера, продающего конечный товар потребителям.

Пример 7.3 (дуополия Штакельберга). Модель Штакельберга предполагает лидерство по объему выпуска. Предположим, что фирма 1 — лидер и что она решает производить объем выпуска y_1. Фирма 2 в ответ на это выбирает объем выпуска y_2. По сути, для модели Штакельберга «базовой» стационарной игрой является модель дуополии Курно.

Как и в примере модели Курно (Пример 5.7), рассмотрим рынок бесконечно делимого товара, на котором работают две фирмы. Как и раньше, обозначим $x, y \in [0, +\infty)$ количества товара, выпускаемого первой и второй фирмами соответственно, а $c_1, c_2 \geq 0$ –

себестоимости единицы товара для обеих фирм. Пусть спрос является линейным, а предельные издержки обеих фирм одинаковы: $c_1 = c_2 = c$. Кроме того, дополнительно будем предполагать, что $a \geq c$ (в противном случае фирме-ведомой невыгодно было бы производить какой-либо положительный объем товара). Функции выигрыша фирм – это прибыль каждой из них от реализации произведенной продукции: $F(x, y) = (a - b(x + y) - c)x$; $G(x, y) = (a - b(x + y) - c)y$.

По определению решения игры Γ_1 наилучший гарантированный результат лидера: $F_1 = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y(x)} F(x, y)$. Найдем множество наилучших ответов ведомого: $Y(x) = Arg \max\limits_{y \in [0, +\infty)} (a - b(x + y) - c)y$. Максимизируемая прибыль ведомого игрока – это квадратичная функция, ее график – это парабола с ветвями вниз, следовательно, ее максимум достигается либо в вершине (экстремум, точка нуля производной), либо в точке $y = 0$ (условия первого порядка). Найдем производную прибыли ведомого: $\frac{\partial}{\partial y}(a - b(x + y) - c)y = a - 2by - bx - c$. Приравняем ее к нулю, найдем экстремум: $a - 2by - bx - c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a - bx - c}{2b}$. Это условие дает нам наилучший результат ведомого тогда и только тогда, когда $a - bx - c \geq 0$, то есть при $x \leq \frac{a-c}{b}$. Для x, б**о**льших порогового значения $\frac{a-c}{b}$, наилучший ответ ведомого – ноль. Таким образом, мы нашли $Y(x)$ – так как функция выигрыша ведомого игрока строго вогнутая, оно для любой стратегии ведущего игрока состоит только из одного элемента:

$$Y(x) = y(x) = \begin{cases} \dfrac{a - bx - c}{2b}, & x \leq \dfrac{a-c}{b} \\ 0, & x > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Так как это множество состоит только из одного элемента, то оценка эффективности любой стратегии ведущего игрока можно получить, просто подставив $y = y(x)$ в его прибыль: $W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} F(x, y) = F\big(x, y(x)\big)$. Имеем:

$$W(x) = \begin{cases} \left(a - b\left(x + \dfrac{a - bx - c}{2b}\right) - c\right)x, & x \leq \dfrac{a-c}{b} \\ (a - bx - c)x, & x > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Преобразуем это выражение:

$$W(x) = \begin{cases} (a - bx - c)\dfrac{x}{2}, & x \leq \dfrac{a-c}{b} \\ (a - bx - c)x, & x > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Максимум функции $W(x)$ достигается в точке $x = \frac{a-c}{2b}$, и этой точке соответствует выигрыш фирмы лидера, равный $\left(\frac{a-c}{2}\right)\frac{a-c}{4b} = \frac{(a-c)^2}{8b}$ – это и есть его наилучший гарантированный результат. Таким образом, используя модель иерархической игры Γ_2, мы проанализировали модель дуополии Штакельберга.

Полезно сравнить полученные результаты с моделью дуополии Курно. Воспользуемся полученным ранее результатом для равновесия Нэша в модели Курно, положив $c_1 = c_2 = c$. Если $c < a$, то равновесие симметричное, и равновесные стратегии обеих фирм (которые в этом случае равноправны) имеют вид $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$. Прибыли фирм также равны между собой и составляют $\frac{(a-c)^2}{9b}$. В модели Штакельберга прибыль фирмы-лидера равна $\frac{(a-c)^2}{8b}$, а объем выпуска - $\frac{a-c}{2b}$ (и то, и другое больше, чем в модели Курно), прибыль ведомой фирмы $\frac{(a-c)^2}{16b}$, а ее объем производства - $\frac{a-c}{4b}$ (и то, и другое больше, чем в модели Курно). При этом общий объем производства в модели Штакельберга выше, чем в модели Курно: $\frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$ против $\frac{2}{3}\frac{a-c}{b}$. ■

Пример 7.4 (модель найма). Опишем простую модель найма в ситуации полной информированности участников сделки относительно всех ее характеристик. Пусть фирма-наниматель (игрок-лидер) владеет некоторым производством, позволяющим получать доход $y = y(x)$ в зависимости от объема x усилий работника. Работник (игрок-ведомый), принимая решения об устройстве на работу к нанимателю, выбирает объем x усилий, которые собирается затрачивать на новой работе, из множества X возможных усилий (действий). Пусть функция $y(\cdot)$ является возрастающей и вогнутой (доход возрастает с ростом уровня усилий, но с убывающей отдачей), при этом дополнительно потребуем ее дифференцируемости. Эти требования приведут к тому, что $y'(x) > 0$ для всех $x \in X$ и $y'(\cdot)$ не возрастает.

Нанимая работника, работодатель определяет для него зарплату (контракт) $w = w(x)$ в зависимости от уровня x его усилий. Прибыль нанимателя, таким образом, оказывается равной $\Pi(x, w) = y(x) - w$. Полезность работника в результате работы по найму зависит от уровня усилий и от величины оплаты: $u(x, w) = v(w) - c(x)$.

Интерпретация такого вида функции выигрыша ведомого игрока очень проста: $v(w)$ – это полезность от вознаграждения w, а $c(x)$ – это «тягость» усилий x. В базовой модели найма предполагается, что $v(\cdot)$ - возрастающая строго вогнутая дифференцируемая функция ($v'(x) > 0$ и убывает), $c(\cdot)$ - возрастающая выпуклая дифференцируемая функция ($c'(x) > 0$ и не убывает). Предполагается, что наниматель, выбирая схему оплаты (контракт), знает функцию полезности и резервную полезность работника, а работник принимает контракт как данный. При этом работник характеризуется резервной полезностью u_0. Это полезность альтернативной занятости, и работник не согласится на работу по контракту, если его полезность окажется меньше u_0. При этом предполагается доброжелательность ведомого по отношению к лидеру: при $u = u_0$ работник предпочитает подписать контракт, а не оставаться без работы.

Классическая модель найма очень близка к модели иерархической игры Γ_2. Основное отличие в расширенном множестве стратегий ведомого игрока (работника), который имеет возможность отказаться от подписания контракта, и лишь при согласии подписать контракт выбирает подходящий уровень усилий. Тем не менее, эту модель можно достаточно легко свести к Γ_2-подобному виду. Действительно, положем множество возможных усилий работника имеющим вид интервала $X = [0, x_{max}]$, где ноль интерпретируется как отсутствие работы. Нормируем функцию отдачи от усилий так, чтобы $y(0) = 0$, а функцию полезности работника так, чтобы $v(0) = c(0) = 0$, и положим $u_0 = 0$. При такой постановке стратегия работника «отказаться от контракта» представляет собой просто граничное значение $x = 0$ интервала допустимых стратегий.

Схема действий игроков в модели найма имеет следующий вид:

1. Наниматель выбирает условия контракта – функцию $w(\cdot)$.

2. Работник выбирает, работать ему или нет; и если предпочитает работать, то выбирает уровень усилий x.

3. По итогам работы наниматель выплачивает работнику зарплату в соответствии с функцией $w(\cdot)$.

Интерпретируя взаимодействие нанимателя и работника как игру Γ_2, мы можем применить для ее решения теорему Гермейера (Теорема 7.1). Обозначим $(\hat{x}, \hat{w})$ решение задачи максимизации прибыли нанимателя $\Pi = y(x) - w \to \max\limits_{(x,w):v(w)-c(x)\geq 0}$. В терминах теоремы Гермейера достигаемое на этой паре значение прибыли есть не что иное, как величина K, при этом реализуется та «ветвь» теоремы, в которой $D = \{(x, y) \in X \times Y | G(x, y) > G_2\} \neq \emptyset$. Таким образом, оптимальной схемой взаимодействия нанимателя и потенциального работника является так называемый **пакетный контракт** («не хочешь – не бери», take-it-or-leave-it): работник выбирает уровень усилий $x^* = \hat{x}$ в ответ на контракт работодателя вида

$$w^*(x) = \begin{cases} 0, x \neq \hat{x}; \\ \hat{w}, x = \hat{x}. \end{cases}$$

В условиях сделанных предположений о дифференцируемости и направлении выпуклости функций выигрыша игроков $\hat{x}$ и $\hat{w}$ удовлетворяют условиям $y'(\hat{x})v'(\hat{w}) = c'(\hat{x})$ и $\hat{w} = v^{-1}(c(\hat{x}))$. ■

Пример 7.5 (цепочка поставок; Тироль, 1988). Рассмотрим двухуровневую цепочку поставок простейшего вида: единственный поставщик с линейными издержками продает товар розничному торговцу по цене p_w. Обозначим предельные издержки продавца как c (а полные издержки производства товара в объеме q, соответственно, равны $c(q) = c \cdot q$), тогда множество стратегий поставщика есть полуотрезок $p_w \in [c, +\infty)$. Розничный торговец приобретает товар у поставщика по цене p_w. Его стратегией является розничная цена $p \geq p_w$, по которой товар покупает конечный репрезентативный потребитель. Он максимизирует свою функцию полезности за счет выбора объема q товара, который он купит по конечной цене, предлагаемой розничным продавцом: $u(q) = v(q) - p \cdot q$, где $v(q)$ – некоторая вогнутая возрастающая функция. Взаимодействие субъектов рынка, таким образом, можно представить в виде трехшаговой игры: на первом шаге ход делает игрок 1 (поставщик), на втором – игрок 2 (продавец), а на третьем – игрок 3 (потребитель). Каждый из игроков знает, какие альтернативы выбрали участники игры, сделавшие ход до него. Таким образом, мы имеем дело с игрой с полной информацией. Определим выигрыши игроков. Для игрока 3 – потребителя – выигрыш равен его полезности $u(p, q) = v(q) - p \cdot q$. Выигрыш продавца (игрока 2) есть его прибыль, равная $\pi_r(p_w, p, q) = (p - p_w) \cdot q$. Выигрышем поставщика, первого игрока, также является его прибыль, рассчитываемая как $\pi_s(p_w, q) = (p_w - c) \cdot q$.

Для поиска совершенного подыгрового равновесия в рассматриваемой игре применить алгоритм Куна в явном виде невозможно, так как при желании построить дерево игры в явном виде мы столкнулись бы с проблемой: у каждого игрока множество альтернатив континуально. Тем не менее, основная идея алгоритма Куна может быть применена здесь так же, как и при решении иерархической игры Γ_1 и модели дуополии Штакельберга. Игру необходимо решать «от конца к началу»: для игрока, делающего ход последним, найти наилучший ответ на любую альтернативу того, кто делает ход перед ним. После этого надо редуцировать игру, полагая, что на любую альтернативу предпоследнего игрока последний отвечает оптимальным образом, и подставляя наилучший ответ последнего игрока вместо его стратегии в функцию выигрыша предпоследнего. Такая подстановка «укоротит» игру на один ход, что эквивалентно редукции дерева игры на один ярус в алгоритме Куна. Подобную редукцию необходимо проводить до тех пор, пока не останется только игрок, делающий ход первым, его функция выигрыша к этому моменту зависит только от его стратегии. То значение, которое максимизирует ее, и есть входящая в совершенное подыгровое равновесие стратегия первого игрока. Равновесные стратегии других игроков определяются с помощью найденных ранее функций их наилучшего ответа.

Проведем описанную процедуру для модели простейшей цепочки поставок. Пусть $v(q) = \frac{a}{b}q - \frac{q^2}{2b}$, $a, b > 0$. Тогда наилучшим ответом потребителя на конечную цену p является линейная функция спроса $D(p) = a - b \cdot p$. Подставляя ее в прибыль продавца, получаем $\hat{\pi}_r(p_w, p) = (p - p_w) \cdot (a - b \cdot p)$. По стратегии продавца она является строго вогнутой, потому ее максимум единственный и достигается при том ее значении, которое удовлетворяет условию первого порядка. Максимизируя $\hat{\pi}_r(p_w, p)$ по p при фиксированном значении p_w, находим наилучший ответ продавца на любую стратегию поставщика – оптовую цену на товар:

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial p} = a - b \cdot p - b \cdot (p - p_w) \begin{cases} = 0, & p > p_w; \\ \leq 0, & p = p_w. \end{cases}$$

Таким образом, наилучшим ответом продавца является

$$p^*(p_w) = \begin{cases} \frac{p_w}{2} + \frac{a}{2b}, & p_w \leq \frac{a}{b}; \\ p_w, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наконец, подставим найденные наилучшие ответы второго и третьего игроков в прибыль первого игрока: $\hat{\pi}_s(p_w) = (p_w - c) \cdot D\big(p^*(p_w)\big) = (p_w - c) \cdot \big(a - b \cdot p^*(p_w)\big)$. Заметим, что если $a - bc < 0$, то поставщику в принципе невыгодно производить что-либо: даже если продавец всегда будет продавать товар по оптовой цене, поставщик останется в минусе. Таким образом, нетривиальные решения возможны лишь при $c \geq \frac{a}{b}$, следовательно, все множество допустимых оптовых цен можно разделить на две части, где $p^*(p_w)$ имеет постоянный вид: $P_w^{(1)} = \left[c, \frac{a}{b}\right]$ и $P_w^{(2)} = \left(\frac{a}{b}, +\infty\right)$. Входящая в совершенное подыгровое равновесие стратегия первого игрока есть $p_w^* = arg \max\limits_{p_w \geq c} \hat{\pi}_s(p_w) = \arg\max\,[\max\limits_{p_w \in P_w^{(1)}} \hat{\pi}_s(p_w), \sup\limits_{p_w \in P_w^{(2)}} \hat{\pi}_s(p_w)]$.

Имеем: $\max\limits_{p_w \in P_w^{(1)}} \hat{\pi}_s(p_w) = \frac{1}{2} \max\limits_{p_w \in \left[c, \frac{a}{b}\right]} (p_w - c)(a - b \cdot p_w) = \frac{b}{2}\left(\frac{a}{2b} - c\right)^2$ достигается при $p_w = c/2 + a/2b$, $\sup\limits_{p_w \in P_w^{(2)}} \hat{\pi}_s(p_w) = \sup\limits_{p_w > a/b} (p_w - c)p_w = \left(\frac{a}{b} - c\right)\frac{a}{b}$. К последнему супремуму целевая функция приближается при $p_w \to a/b + 0$. Так как в силу непрерывности $p^*(p_w)$ непрерывной функцией от оптовой цены является и $\hat{\pi}_s(p_w)$, то $\sup_{p_w \in P_w^{(2)}} \hat{\pi}_s(p_w) = \lim_{p_w \to \frac{a}{b}+0} \hat{\pi}_s(p_w) = \lim_{p_w \to \frac{a}{b}-0} \hat{\pi}_s(p_w) = \hat{\pi}_s\left(\frac{a}{b}\right) <$ $\max_{p_w \in P_w^{(1)}} \hat{\pi}_s(p_w)$. Таким образом, глобальный максимум $\hat{\pi}_s(p_w)$ достигается при $p_w^* = c/2 + a/2b$ – это и есть совершенное по подыграм равновесное значение оптовой цены. При этом конечная цена для потребителя оказывается равной $p^*(p_w^*) = \frac{c}{4} + \frac{3a}{4b}$, а прибыль продавца - $\frac{b}{4}\left(\frac{3a}{4b} - \frac{c}{4}\right)^2$.

Полезно сравнить исход цепочки поставок с «монопольным» исходом, возникающим на рынке без продавца-посредника, где поставщик продает товар напрямую потребителю. В этом случае наилучший ответ потребителя – функция спроса того же вида $D(p) = a - b \cdot p$, где p – назначаемая непосредственно поставщиком цена. Прибыль его, в свою очередь, равна $(p-c)D(p) = (p-c)(a - b \cdot p)$ и достигает максимума $b\left(\frac{a}{2b} - c\right)^2$ при $p = c/2 + a/2b$. Поставщик в обоих случаях продает свой товар по одной и той же цене. Однако, когда он делает это напрямую, он продает его по более низкой цене и потому продает большее количество. Если же на рынке возникает цепочка «поставщик-продавец-потребитель», то последний покупает товар по более высокой цене, чем даже в случае монопольной организации рынка – так как на каждом шаге принимающая в этот момент решение фирма-звено цепочки поставок «накидывает» свою маржу на цену. Это явление получило название «двойная маржинализация», ему посвящено большое количество исследований в теории отраслевых рынков. ■

8. Задачи и упражнения для самостоятельного решения (тематический блок «Многошаговые игры»).

1. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [0,2]$, $y \in [0,1]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = 8xy - x^2$, $G(x,y) = (x-y)^2 - x^2 + 3xy - 2y$. Решить иерархические игры Γ_1 и Γ_2, основанные на данной игре.

2. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,1]$, $y \in [-2,2]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = 2xy - x^2, G(x,y) = 2y^2 + 6xy - 7$. Решить иерархические игры Γ_1 и Γ_2, основанные на данной игре.

3. На длинной улице проживают граждане, плотность распределения которых вдоль улицы равномерна. Две магазинные сети – «Алфавит гурмана» и «Планета вкуса» - хотят разместить свои магазины на данной улице. Для потребителя, живущего от какого-либо магазина на расстоянии y, его посещение сопряжено с транспортными издержками в размере $c(y) = 100y^2$ единиц. Каждый потребитель покупает ровно одну единицу товара в одном из двух магазинов, при этом его «чистая» полезность от потребления этой единицы равна s_1 для «Алфавита гурмана» и s_2 для «Планеты вкуса». Производство одной единицы товара для магазинов составляет c_1 и c_2 соответственно.

a. Пусть оба магазина предлагают одинаковый товар, производимый с издержками $c_1 = c_2 = 250$, при этом полезность товара обоих магазинов одинакова. Пусть в марте фирмы-хозяева магазинов решают, в какой части улицы им построить свои магазины, полгода уходит на строительство магазинов, а после открытия в сентябре они определяют цены на товар. Где фирмы построят свои магазины и какие назначат цены, если будут действовать в соответствии с равновесными стратегиями?

b. Пусть «Алфавит гурмана» построил магазин на расстоянии 1/10 длины улицы от ее начала, а «Планета вкуса» - на расстоянии 1/5 улицы – от ее конца, а единица товара обходится магазинам в $c_1 = 100$ и $c_2 = 200$ рублей соответственно. Пусть резервные цены товаров одинаковы и равны $s_1 = s_2 = 3000$ рублей. Найдите характеристики равновесия: координаты граничного агента, цены на товары обоих магазинов и их прибыли.

4. На рынке действует фирма-лидер и фирма-ведомый. Каждая из них характеризуется технологией производства, при которой издержки производства являются линейной функцией от производимого объема: $c_1(q) = 5q$ у лидера и $c_2(q) = q$ у ведомого. Прибыль фирм определяется обычным образом – как разность выручки за проданный товар (произведение объема проданного товара на цену за его единицу) и издержек производства. Записать взаимодействие фирм как иерархическую игру, найти наилучший гарантированный результат лидера и стратегию, его реализующую, если спрос на рынке задан функцией $D(p) = max\{0; 11 - p\}$.

5. На рынке действует фирма-лидер и фирма-ведомый. Каждая из них характеризуется технологией производства, при которой издержки производства являются линейной функцией от производимого объема: $c_1(q) = 2q$ у лидера и $c_2(q) = 4q$ у ведомого. Прибыль фирм определяется обычным образом – как разность

выручки за проданный товар (произведение объема проданного товара на цену за его единицу) и издержек производства. Записать взаимодействие фирм как иерархическую игру, найти наилучший гарантированный результат лидера и стратегию, его реализующую, если спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0; 36 - p\}$.

6. На рынке действует фирма-лидер и фирма-ведомый. Каждая из них характеризуется технологией производства, при которой издержки производства являются линейной функцией от производимого объема: $c_1(q) = 3q$ у лидера и $c_2(q) = 5q$ у ведомого. Прибыль фирм определяется обычным образом – как разность выручки за проданный товар (произведение объема проданного товара на цену за его единицу) и издержек производства. Записать взаимодействие фирм как иерархическую игру, найти наилучший гарантированный результат лидера и стратегию, его реализующую, если спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0; 23 - p\}$.

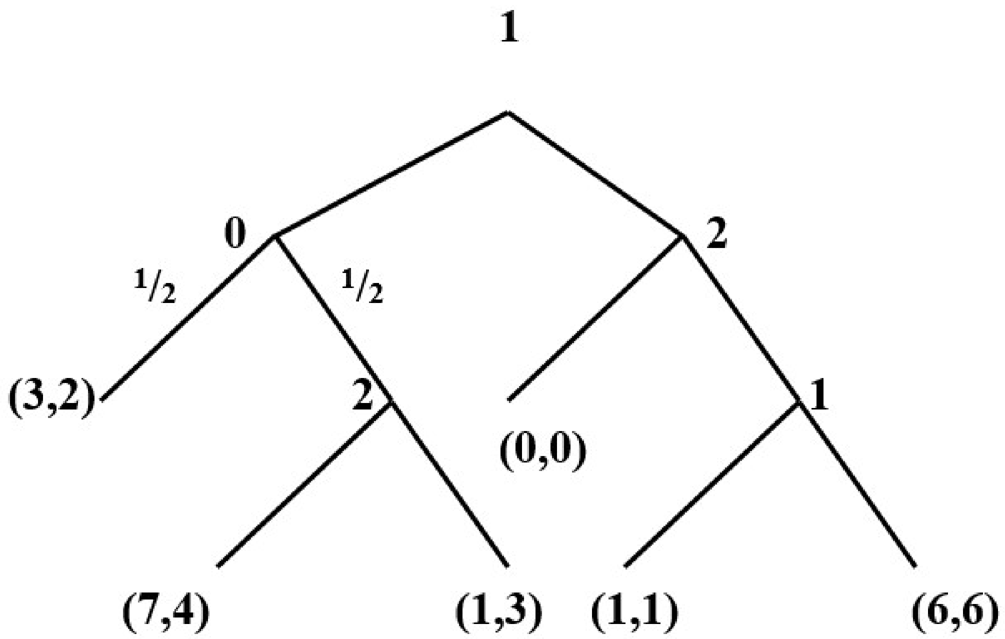
7. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [0,2]$, $y \in [0,1]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = 4xy - \frac{x^2}{2} + 3, G(x,y) = -2y + xy + y^2$. Найти наилучший гарантированный результат игрока-лидера в играх Γ_1, Γ_2.

8. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,1]$, $y \in [-2,2]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = xy - \frac{x^2}{2} + 2, G(x,y) = y^2 + 3xy + 5$. Найти наилучший гарантированный результат игрока-лидера в играх Γ_1, Γ_2.

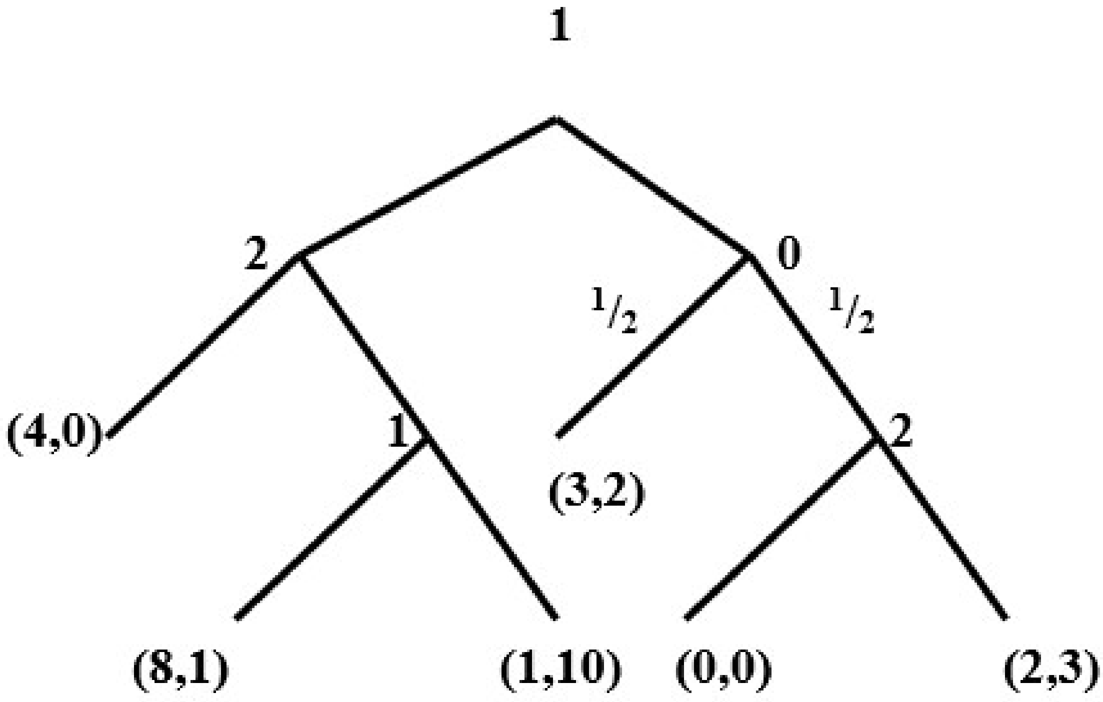
9. Построить функции наилучшего ответа и найти все ситуации равновесия игры на прямоугольнике $X = [-1,1]$, $Y = [-1,1]$ с

функциями выигрыша $F(x,y) =- 3x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x$, $G(x,y) = - 2x^2 - 5xy - 3y^2 - y$. Найти наилучший гарантированный результат игрока-лидера в играх Γ_1, Γ_2, используя данную игру как «базовую», сравнить с его выигрышем в равновесии Нэша в «базовой» игре.

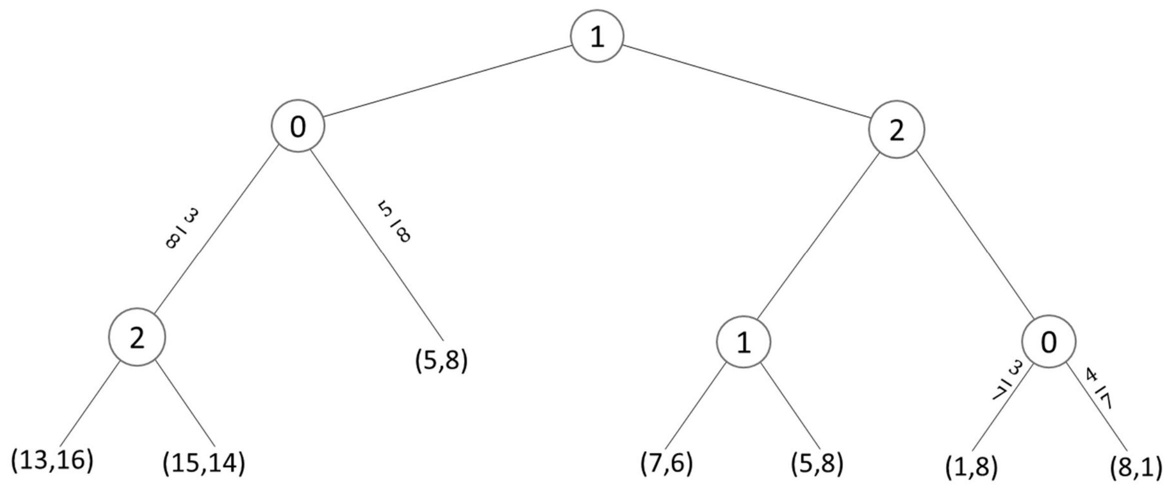
10. Для позиционной игры, заданной деревом, написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша:



11. Для позиционной игры, заданной деревом, написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша:

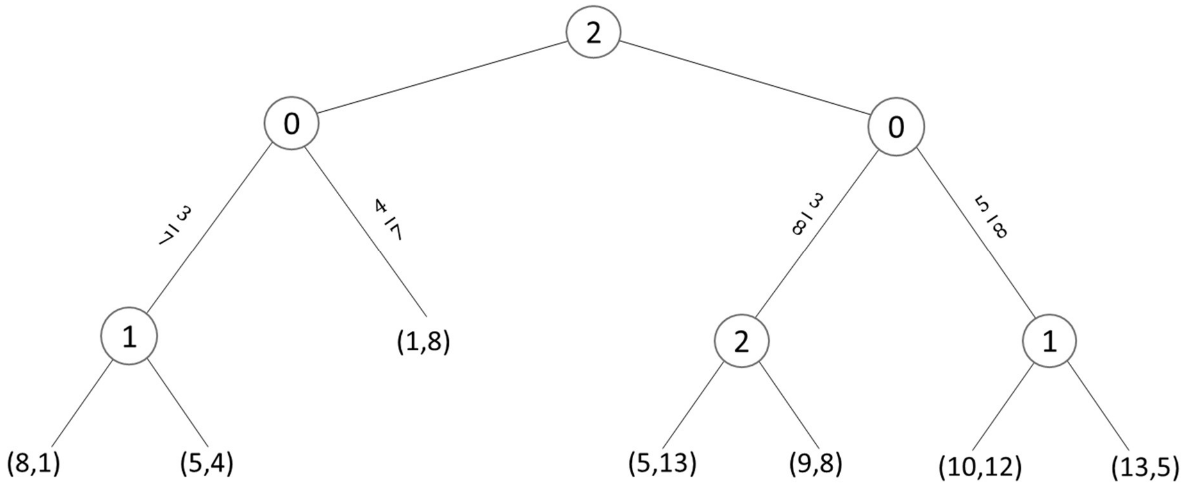


12. Для позиционной игры, заданной деревом:



написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша.

13. Для позиционной игры, заданной деревом:



написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша.

14. Каждое из пяти предприятий, использующих воду из природного водоема, располагают двумя стратегиями: построить сооружения для полной очистки отработанной воды, затратив при этом 2 условных единицы, или же сбросить ее через имеющиеся очистные сооружения без биологической очистки и не понести затрат на дополнительную очистку воды. Особенности водоема и технологических процессов предприятий таковы, что в случае, когда не полностью очищенную воду сбрасывает не более двух предприятий, вода в водоеме остается пригодной для использования и предприятия убытка не несут. Если же не полностью очищенную воду сбрасывают не менее трех предприятий, то каждый пользователь водоема несет убытки в размере семи единиц. Найдите совершенное подыгровое равновесие в получающейся игре, если предполагается, что фирмы принимают решение о своей экологической стратегии последовательно (с 1 по 5), и каждая последующая фирма может наблюдать решения всех предыдущих.

15. Три эрудита – Вассерман, Друзь и Козлов – вышли в финал «Своей игры». На этот момент Вассерман набрал 20 тысяч рублей, Друзь – 15 тысяч, а Козлов – 12 тысяч. Игрокам предлагается 5 возможных тем финального раунда на выбор: «Автомобили», «Политика», «Спорт», «Искусство» и «Математика». Игроки по очереди (по возрастанию сумм на счёте, начиная с отстающего) убирают по одной не понравившейся им теме до тех пор, пока не останется одна. Все игроки идут «ва-банк» и ставят все свои выигрыши на кон, после чего ведущий задает вопрос на оставшуюся тему. Знания игроков в различных областях отличаются, поэтому в зависимости от темы вероятности правильно ответить на вопрос различаются. Вероятности правильного ответа игроками на вопрос по каждой из тем приведены в следующей таблице:

Игрок	Автомобили	Политика	Спорт	Искусство	Математика
Вассерман	40%	80%	20%	50%	90%
Друзь	50%	20%	50%	90%	60%
Козлов	80%	50%	70%	60%	20%

Если игрок правильно отвечает на вопрос, то его ставка выигрывает, и он удваивает свой исходный выигрыш, если ошибается – теряет всё.

a. Найдите совершенное подыгровое равновесие в получающейся позиционной игре.

b. Пусть на первом шаге вместо одного из игроков делает ход случай – Ведущий случайным образом с равной вероятностью убирает одну из пяти исходных тем. Каким будет СПР в модифицированной таким образом игре?

16. Пять студентов должны пересдавать зачет по теории игр. Чтобы усложнить профессору жизнь, они за день до сдачи решают не подписывать свои работы. Узнав об этом, профессор сообщает, что не собирается выяснять, кто является автором каждой из работ. Однако он готов поставить зачеты всем пятерым, если более половины работ будут оценены на проходной балл и выше. Если же таких работ будет меньше половины, то зачет не получит никто. В день сдачи студенты пишут свои работы последовательно, при этом каждый из них на момент начала работы уже знает, как написали его предшественники. Написать работу выше проходного балла для каждого студента стоит определенных усилий, потери от которых студент оценивает в 2 единицы. Если же студент принимает решение «не напрягаться», то он не несет никаких потерь. При этом получение зачета принесет каждому из студентов 5 единиц полезности, а неполучение – столько же единиц потерь. Найдите совершенное подыгровое равновесие в получающейся позиционной игре.

17. На кафедре экономики в некотором университете пять профессоров. Секретарь кафедры просит каждого скинуться по 100 рублей для фуршета после заседания кафедры. Для того, чтобы фуршет состоялся, необходимо, чтобы скинулось как минимум три профессора. Деньги, отданные на организацию фуршета, профессорам не возвращаются. Ценность фуршета для каждого профессора - 500 рублей. Профессора 1 и 2 сдают деньги первыми (по очереди). Затем, решение (сдавать или не сдавать) одновременно принимают профессора 3–5, причем они не наблюдают решения 1 и 2. Найдите совершенное подыгровое равновесие.

18. («Сжигание мостов»; Захаров, 2010). Генерал командует армией, который защищает город, находящийся на берегу реки. Между городом и другим берегом проложен мост, по которому армия может, при необходимости, отступить. На город готовится напасть вражеская армия. Генерал имеет возможность уничтожить мост до того, как враг решится атаковать (B), или не уничтожать мост (N). После того, как враг наблюдает действие генерала, он решает, атаковать город (A), или нет (S). Если враг напал и мост не уничтожен, то генерал может либо принять решение сражаться (F), либо отступить (R). Если мост уничтожен и враг напал, то генерал может только сражаться. Выигрыш каждой стороны составляет 10, если на конец игры она обладает городом, но сражения не произошло; 0 если сражения не было, но сторона осталась без города; и -5, если было сражение. Найти совершенное подыгровое равновесие, привести игру к нормальной форме и найти остальные равновесия Нэша (или продемонстрировать, что их нет).

19. Правительство некоторого государства хочет оказать финансовую помощь одному из двух крупнейших университетов страны. Для того, чтобы определить, какому университету достанется финансовая помощь и в каком объеме, ректорам этих университетов предлагается сыграть в следующую игру. Сначала правительство предлагает первому ректору 1 доллар. Если ректор соглашается, то на этом игра заканчивается, причем первый университет получает 1 доллар, а второй – ничего. Если первый ректор отказывается, то правительство предлагает второму ректору 10 долларов. Если второй ректор соглашается, то на этом игра заканчивается, второй

университет получает 10 долларов, а первый – ноль. И так далее до тех пор, пока правительство предложит 100 000 000 долларов. Если первый ректор откажется от этой суммы, то на этом все закончится, и ни один университет ничего не получит. Найти совершенное подыгровое равновесие в игре.

20. («Девятнадцать»; Захаров, 2010) Два игрока по очереди называют числа от 1 до 3. Все названные числа суммируются. Когда сумма стала равна или превысила 19, игра останавливается. Игрок, на котором остановилась игра, объявляется проигравшим, другой игрок – победителем. Найдите совершенное подыгровое равновесие.

21. Фирма 1 является монополистом на рынке некоторого товара. Фирма 2 рассматривает возможность входа на этот рынок. Она может либо войти на рынок, либо отказаться от этой идеи. Если она принимает решение конкурировать с монополистом, то обе фирмы должны одновременно решить, высокую или низкую цену на свои услуги они устанавливают.

Платежи в этой игре устроены следующим образом. Если фирма-новичок решает не входить на рынок, то она получает 0, а монополист продолжает получать прибыль в размере 2. Если новичок входит на рынок, то все зависит от установленных фирмами цен на свадебные услуги. Если обе фирмы устанавливают одинаковые цены, то каждая из них получает 1 в случае выбора высоких цен и -1 в случае выбора низких цен. Если же одна фирма устанавливает высокую цену, а другая – низкую, то фирма, установившая высокую цену, получает 0, а фирма, установившая низкую цену, получает -1.

Запишите данную игру в виде игры в нормальной форме и в виде игры в развернутой форме. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях и соверешенные подыгровые равновесия.

22. («Хороший, Плохой, Злой»; Захаров, 2010) Три искателя приключений – Блондин, Ангельские Глазки и Туко – устроили дуэль на кладбище, где зарыт миллион долларов. Туко попадает в цель с вероятностью 40%. Ангельские Глазки попадает с вероятностью 80%. Блондин никогда не промахивается. Дуэль реализуется как двухпериодная игра. Каждый выбирает, в кого выстрелить, и стреляет. Оставшиеся в живых после первого выстрела делают еще один выстрел. Затем те, кто остался жив, делят золото поровну между собой. Ценность всего золота для одного игрока равна единице. Выигрыш погибшего равен нулю. Найдите совершенное подыгровое равновесие.

23. (Васин, 2005). Рассмотрим модификацию карточной игры, рассмотренной в **Пример 7.1**. Первым делает ход игрок 2. Он выбирает вариант расклада двух карт (старшей и младшей) Стартующему и себе. Стартующий, не зная расклада, может оставить карты в прежнем положении, либо поменять их местами. Затем, Финиширующий, наблюдавший за действиями Играющего, также может выбрать одну из двух альтернатив: не трогать карты, либо поменять их местами. Игрок, имеющий в итоге старшую карту, получает от другого игрока доллар и дополнительную сумму, определяемую по следующему правилу. Если игрок 1 имеет старшую карту в результате одного (или двух) ее перемещений, то он получает от игрока 2 дополнительно два (или три) доллара. В аналогичной

ситуации игрок 2 получает от игрока 1 дополнительно один доллар (или два доллара). Если после раздачи, карты не перемещались, то дополнительные выплаты не производятся. Найти равновесные стратегии игроков.

24. («Семейный совет»; Дагаев, Сонин и др., 2017) Папа, мама и Вовочка решают, что смотреть по единственному на даче телевизору. По Первому каналу показывают шоу «Голос», по НТВ – футбольную Лигу Чемпионов, а по «Культуре» — запись спектакля «Юнона и Авось» 1999 года. Предпочтения у всех различаются. Папа больше всего хочет смотреть «Голос», а меньше всего – «Юнону и Авось», которую он уже однажды посмотрел в Ленкоме в 1999 году – зачем же смотреть второй раз? Маме очень дорог ее 1999 год, год свадьбы, и все связанные с этим событием воспоминания. Поэтому она хочет снова пережить тот вечер, когда они познакомились с папой на спектакле «Юнона и Авось». А меньше всего маму интересует футбол. Вовочка больше всего хочет посмотреть футбол – он и сам мечтал в детстве сыграть однажды в Лиге Чемпионов. При этом Вовочка терпеть не может непрофессиональное, на его вкус, пение любителей из «Голоса». Решение о том, что сегодня смотреть, принимается голосованием. Каждый член совета должен проголосовать ровно за одну из них. Если есть альтернатива, которая набрала больше одного голоса, то она реализуется, в противном случае реализуется та альтернатива, за которую проголосовал папа. Выигрыши каждого участника голосования задаются одним и тем же образом: если выбирается наиболее подходящая ему альтернатива, то он получает одну единицу полезности, если вторая по

предпочтительности – то ноль, если наименее подходящая, то минус одну единицу. Голосование открытое и последовательное: сначала свой выбор объявляет вслух один член семьи, после него – второй и, наконец, третий. Порядок голосования определяет папа. Какой порядок он выберет, если ожидает, что после оглашения порядка голосование проходит в виде позиционной игры с полной информацией?

25. Рассмотрите отрасль с n фирмами, функции издержек которых постоянны и одинаковы (и равны c), а спрос на продукцию - линейная функция цен. Предположите, что фирма i является лидером Штакельберга для фирм $i+1,\ldots,n$ (эти фирмы считают выпуск «своего» лидера фиксированным). Найдите равновесие.

26. Рассмотрите отрасль с n фирмами, функции издержек которых постоянны и одинаковы (и равны c), а спрос на продукцию - линейная функция цен. Предположим, что на первом шаге фирмы $1,\ldots,n-1$ конкурируют по Курно, выбирая объемы, после чего фирмы n, действуя по отношению к ним как ведомый по Штакельбергу, выбирает свой объем производства (т.е., считая выпуск «своих» лидеров фиксированным). Найдите равновесие.

27. Рассмотрите отрасль с $2n$ фирмами, функции издержек которых постоянны и одинаковы (и равны c), а спрос на продукцию - линейная функция цен. Предположим, что конкуренция фирм объемная (как в моделях Курно и Штакельберга), а приняте решений имеет последовательный характер: сначала первые n фирм конкурируют, выбирая объемы производства, а затем – оставшиеся n фирм. Фирмы $n+1,\ldots,2n$ считают выпуск фирм $1,2,\ldots,n$

фиксированным. Найдите равновесие в этом «раздвоенном» варианте модели Штакельберга.

28. Рассмотрите отрасль с n фирмами, функции издержек которых постоянны и одинаковы (и равны c), а спрос на продукцию - линейная функция цен. Предположите, что фирма 1 является лидером Штакельберга для фирмы 2, которая, в свою очередь, является лидером для всех остальных фирм $3,\dots,n$ (эти фирмы считают выпуск «своего» лидера фиксированным). Найдите равновесие в этом варианте модели Штакельберга

29. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства (сначала первая фирма назначает цену, затем, зная выбор первой фирмы – вторая, после чего потребители удовлетворяют свой спрос за счет более дешевого товара), функции издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = y_1$ и $c_2(y_2) = \frac{1}{8}y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = 50 - 6p$.

a. Найдите выпуск фирм в равновесии.

b. Выясните, будет ли найденное равновесие Парето-оптимальным.

30. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функции издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = 2y_1$ и $c_2(y_2) = \frac{1}{6}y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = 40 - p$.

a. Найдите выпуск фирм в равновесии.

b. Выясните, будет ли найденное равновесие Парето-оптимальным.

31. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функции издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = 7y_1$ и $c_2(y_2) = \frac{1}{4}y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = 100 - 2p$.

a. Найдите выпуск фирм в равновесии.

b. Выясните, будет ли найденное равновесие Парето-оптимальным.

32. Пусть в дуопольной отрасли, в которой фирмы конкурируют в соответствии с моделью ценового лидерства, функции издержек лидера и ведомого равны $c_1(y_1) = 4y_1$ и $c_2(y_2) = \frac{1}{2}y_2^2$ соответственно, а функция спроса равна $D(p) = 60 - 4p$.

a. Найдите выпуск фирм в равновесии.

b. Выясните, будет ли найденное равновесие Парето-оптимальным.

33. Барин выбирает, какую долю $\tau \in [0,1]$ стоимости урожая у забирать у крестьянина в виде издольщины. При этом он максимизирует свой ожидаемый доход τy. Крестьянин максимизирует по $y > 0$ функцию $(1 - \tau)y - y^2$, т. е. прибыль при квадратичной функции тягости усилий. Найти оптимальную для барина долю τ.

34. Профессор Р наняла преподавателя-ассистента - мистера А. Профессора интересует, сколько часов мистер А будет преподавать, а также сколько она должна ему заплатить. Профессор Р желает

максимизировать свою функцию прибыли $x - w$, где x – количество часов, преподаваемых мистером А, а w – заработная плата, которую она ему платит. Если мистер А преподает x часов и получает w, то его полезность равна $w - \frac{x^2}{2}$. Резервная полезность мистера А равна нулю. Сколько часов будет преподавать мистер А и сколько ему придется заплатить?

Литература

1. Алескеров Ф.Т. Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций − Доклады Российской академии наук. 2007. Т. 414. № 5. С. 594-597.

2. Блекуэл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. − М.: Иностранная литература, 1958.

3. B. D. Bernheim; B. Peleg; M. D. Whinston (1987), "Coalition-Proof Equilibria I. Concepts", Journal of Economic Theory, 42: 1–12, doi:10.1016/0022-0531(87)90099-8.

4. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules – Economic Theory. 2008. V. 34(3). P. 525-543.

5. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. Stability under unanimous consent, free mobility and core – International Journal of Game Theory. 2007. V. 35(2). P. 185-204.

6. Borel E. 1) The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels. 2) On games that involve chance and skill of the players. 3) On system of linear forms of skew symmetric determinants and the general theory of play. Econometrica, 1953, v. 21, №1, p. 97-117.

7. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions of surfaces. Amsterdam Proc., 1909, v. 11, continued in 1910, v. 12,13.

8. Васин А.А. Модели процессов с несколькими участниками. − М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

9. Васин А.А. Модели динамики коллективного поведения. − М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

10. Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС-Пресс, 2005.

11. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2005.

12. Вартанов С.А. Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций – Математическая теория игр и ее приложения, 2012, Т. 4. Вып.1. С. 3-21

13. Вартанов С.А. Модель электорального поведения – Математическая теория игр и ее приложения, 2013, Т. 2. Вып.1. С. 3-26

14. Вартанов С.А., Васин А., Сосина Ю. Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций – Математическое моделирование, 2012 – Т. 25. Вып. 4. С. 44-64.

15. Вартанов С.А., Васин А.А., Сосина Ю.В. Об устойчивости равновесий в модели эндогенного формирования коалиций – XIII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В четырех книгах. Книга 1. Отв. ред. Е. Ясин. М.: НИУ ВШЭ, 2012, С. 203-215.

16. Вентцель Е.С. Исследование операций. − М.: Советское радио, 1981.

17. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. − М.: Наука, 1990.

18. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. − М.: Наука, 1984.

19. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. − М.: Наука, 1971.

20. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами.−М.: Наука, 1976.

21. Гермейер Ю.Б. Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов. ДАН, 1971, v. 198, т. 5, с. 1001-1004.

22. Горелик В.А. Теория игр и исследование операций. − М: Изд-во МИНГП, 1978.

23. Давыдов Э.Г. Исследование операций. − М.: Высшая школа, 1990.

24. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. "Almost" subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting – Journal of Economic Theory. 2008. V. 143. P. 275-291.

25. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. A Problem of Football Bars: Vertically and Horizontally Differentiated Public Goods – X Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. Т. 2. М.: ИД ГУ ВШЭ. 2010. С. 86-90.

26. Gilles D.B. Solutions to general non-zero-sum games. Contributions to the theory of games. IV (Kuhn H.W., Tucker A.W. eds.). Ann. Math. Studies, №40, − Princeton: Princeton Univ. Press, 1959, p. 47-86.

27. Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках: учебник для вузов — М.:НИУ ВШЭ, 2015

28. Kakutani S. A generalisation of Brower's fixed-point theorem. Duke Math. J., 1941, v. 8, №3, p. 457-459.

29. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. − М.: Мир, 1964.

30. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. − М.: Наука, 1972.

31. Кононенко А.Ф., Новикова Н.М. Обзор развития игр Гермейера. В сб. "Программное оборудование и вопросы принятия решений". − М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989, с. 201-210.

32. Knaster B., Kuratowski C., Masurkievicz S. Ein Beweis des Fixpunktsatzes fur n-dimensionale Simplexe. Fund. Math., 1929, B. 14, S. 132-137.

33. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. − М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

34. Кун Г.У. Позиционные игры и проблема информации. В сб. [36], с. 13-40.

35. Cournot A.A. Recherches sur les principes mathematic de la threorie des riches. − Paris, 1838.

36. Lemke C.E., Howson J.J.,Jr. Equilibrium points of bimatrix games. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1961, v. 47, p. 1657-1662.

37. Льюс Р. и Райфа Х. Игры и решения. Введение и критический обзор. − М.: Иностранная литература, 1961

38. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. − М.: Физматгиз, 1960.

39. Матричные игры. Сб. статей под ред. Н.Н.Воробьева.−М.: Физматгиз, 1961.

40. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. − М.: Высшая школа, 1986.

41. Мулен Э. Теория игр. С примерами из математической экономики. − М.: Мир, 1985. 273

42. Нейман Дж. фон., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. − М.: Наука, 1970.

43. Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр. В сб. [27], с. 174-204.

44. Нэш Дж. Бескоалиционные игры. В сб. [27] , с. 205-221.

45. Novchek W. On the existence of Cournot equilibrium. Review of Economic Studies, 1985, v. 52, p. 85-98.

46. Оуэн Г. Теория игр. − М.: Мир, 1971.

47. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. − М.: Энергоатомиздат, 1996.

48. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. − М.: Высшая школа, 1998.

49. Позиционные игры. Сб. статей под ред. Н.Н.Воробьева. − М.: Наука, 1967.

50. Савватеев А.В. Анализ коалиционной устойчивости «биполярного мира» – Журнал Новой экономической ассоциации, 2012, №1 (17), с. 10-43

51. Савватеев А.В. Миграционно-устойчивая организация одномерного мира: теорема существования решения – Известия Иркутского государственного университета, Серия «Математика», 2013. Т. 6, № 2. С. 57-68

52. Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г. − Л.: Наука, 1976.

53. Теория игр. Аннотированный указатель публикаций отечественной и зарубежной литературы за 1969 − 1974 гг. − Л.: Наука, 1980.

54. Fundenberg D., Tirole J. Game Theory. − Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1996.

55. Handbook of Game Theory with economic applications, Vol. I and II. (R.J. Aumann and S. Hart eds.). − Amsterdam − Lausanne − New York − Oxford − Shannon − Tokyo: Elsevier, 1994.

56. Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры. В сб. [27], с. 167-172.

57. Писарук Н. Н. Введение в теорию игр //Минск: БГУ. – 2015. – Т. 256.

58. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. 1963. Выпуск 10. С. 119–139

59. Young H. P. Exploitable surplus in n-person games //Applied Game Theory. – Physica, Heidelberg, 1979. – С. 32-38.

60. Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цыплаков А. А. Микроэкономика–третий уровень: учебное пособие //Новосибирск: Изд-во СО РАН. – 2005.

61. Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. – М.: ЮНИТИ, 1997.

62. Мас-Колелл, А., Уинстон, М.Д., Грин Дж.Р. Микроэкономическая теория (в 2 книгах) // Москва: издательство РАНХиГС – 2016.

63. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности: в 2-х т./Тироль, Жан; пер. с англ. под ред. ВМ Гальперина и НА Зенкевича, 2000 //С. Пб.: Экономическая школа. – 1999.

Оглавление

Вартанов Сергей Александрович

Ивин Евгений Александрович

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИГР ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное издание

Подписано в печать XX.XX.2020.

Формат 60×84/16. Усл.печ.л. XX.XX. Печать цифровая.

Тираж XXXX экз. Заказ № XXX.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Вологодский научный центр Российской академии наук»
(ФГБУН ВолНЦ РАН)

Россия, 160014, г. Вологда, ул. Горького, 56а
Тел: (8172) 59-78-03, e-mail: common@vscc.ac.ru

Отпечатано в типографии ФГБУН ВолНЦ РАН