Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московская школа экономики

С. А. Вартанов

Введение в теорию игр

Учебное пособие для студентов 2 курса
специальности 38.03.01 «Экономика»
(уровень бакалавриата)

МАКС ПРЕСС

Москва – 2018

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
В18

Рецензент:

А. А. Васин – профессор, д. ф.-м. н.,
факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Вартанов, Сергей Александрович.

В18 Введение в теорию игр : учебное пособие для студентов 2 курса специальности 38.03.01 «Экономика» (уровень бакалавриата) / С. А. Вартанов. – Москва : МАКС Пресс, 2018. – 140 с.

ISBN 978-5-317-05805-0

Книга представляет собой учебное пособие, пригодное для первоначального ознакомления с математическим аппаратом некооперативной теории игр и некоторыми ее приложениями из математической экономики и социологии. Первая часть пособия посвящена теоретическим основам и приложениям биматричных игровых моделей. Во второй части излагаются базовые принципы построения и решения игровых задач с непрерывными множествами стратегий, а также иерархических и позиционных игр как с полной, так и с неполной информацией.

Учебное пособие подходит для студентов экономических и математических специальностей, а также для специалистов в области теории игр, исследования операций и экономики.

Ключевые слова: теория игр, равновесия Нэша, смешанные стратегии, биматричные игры, иерархические игры, позиционные игры.

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

Vartanov, Sergey Alexandrovich.

Introduction to the Game Theory : Tutorial / S. A. Vartanov. – Moscow : MAKS Press, 2018. – 140 p.

ISBN 978-5-317-05805-0

This current textbook may be used as a tutorial for initial study of game theory and its mathematical apparatus, as well as some of its simplest economic and sociological applications. The book consists of two parts, the first part is dedicated to bimatric games, their theoretic basis and applications. The second part contains basic principles of formulation and solving continuous game-theoretic problems as well as some hierarchic and finite extensive-form game models.

This textbook is suitable for students of economic and mathematical specializations as well as game theory, economics and operations researchers.

Keywords: Game theory, Nash equilibrium, mixed strategies, bimatric games, hierarchic games, extensive-form games.

ISBN 978-5-317-05805-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание предлагаемого пособия основано на материалах лекций и семинаров, проводившихся автором в Московской Школе Экономики МГУ имени М.В. Ломоносова в течение нескольких лет. Структура курса и, как следствие, учебного пособия, несколько отличается от традиционно принятых при преподавании теории игр. В частности, настоящее пособие не выделяет антагонистические игры в отдельный раздел курса теории игр, с которого обычно начинается исследование данного предмета. Вместо этого изучение курса предлагается начать сразу с одной из основ математического аппарата теории игр – концепции равновесия Нэша в целом и его частных случаев для игр различного типа. Помимо статических (одношаговых) игр, рассматриваются также иерархические и позиционные игры, методы поиска ситуаций равновесия и др. В качестве примеров, иллюстрирующих теоретические концепции и утверждения, рассматриваются модели несовершенной конкуренции и другие важные прикладные задачи, позволяющие без нарушения общей логической структуры учебника познакомить читателя с наиболее заметными областями прикладной теории игр и подготовить его к некоторым курсам, использующим теоретико-игровые модели (например, к отдельным разделам микроэкономики).

В силу вводного характера курса настоящее пособие содержит не слишком большое количество утверждений топологического, теоретико-оптимизационного и теоретико-функционального характера, составляющие математический базис для теории игр. Тем не менее, в нем приведены самые важные из них (например, теоремы о неподвижной точке, элементы выпуклого анализа), а также их доказательства для наиболее наглядных частных случаев. Кроме того, практически везде, где читатель, заинтересованный в более глубоком изучении вопроса, пожелает получить полные формулировки теорем и законченное формальное их доказательство, приводятся ссылки на статьи и монографии, где можно их найти.

Пособие может быть использовано для чтения подготовительных курсов по теории игр и математической экономике студентам, обучающимся по специальностям «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика». Предполагается знакомство читателей с начальными курсами математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей. Предлагаемые после каждого раздела примеры и упражнения способствуют активному усвоению материала и позволяют использовать пособие также для проведения семинарских занятий.

Автор признателен всем коллегам по кафедре Эконометрики и математических методов за поддержку и советы, во многом определившие структуру книги и стиль ее изложения. В частности, наибольшую помощь в формировании курса оказал Алексей Мироненков, в течение многих лет являющийся коллегой автора в преподавании курса Теории Игр в МШЭ МГУ. Автор также благодарит заместителя заведующего кафедрой Эконометрики и математических методов МШЭ МГУ Евгения Ивина за неоценимую помощь в подготовке и написании настоящего учебного пособия, без которой его появление было бы невозможно. Кроме того, автор хотел бы поблагодарить своего учителя – профессора, заведующего кафедрой Исследования операций факультета ВМК МГУ Александра Васина, сформировавшего у автора понимание математического аппарата теории игр и привившего любовь к этой области знаний еще в студенческие годы. И конечно же, в наибольшей степени автор благодарен своей семье за помощь, понимание и поддержку, оказанную на всех этапах подготовки – от появления задумки до вычитки финальной версии учебника.

1. «Введение во введение». Области применения теории игр. Что описывает теория игр? «Камень, ножницы, бумага» как иллюстрация основных концепций теории игр

Наше учебное пособие разумно начать с ряда общих фраз, посвященных месту теории игр в современной математической и экономической науке. Если обратиться к формальному определению, то теория игр – раздел прикладной математики, с помощью которого моделируется поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. В других учебных пособиях и монографиях под теорией игр понимается математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях. На самом деле, оба этих определения эквиваленты – потому что любая ситуация столкновения несовпадающих интересов и является конфликтом в широком смысле.

С моделями принятия решения многие из читателей настоящего пособия, скорее всего, уже сталкивались ранее. Простейшие модели принятия решений можно встретить, например, в курсе математического анализа или теории оптимизации. В подобных моделях лицо, принимающее решения, выбирает стратегию – то есть свой план действий – из некоторого множества доступных стратегий (например, множество планов производства, множество стратегий поведения). При формулировке модели принятия решения задается целевая функция (она же – функция выигрыша, функция полезности и т.д.), которая отражает интересы принимающего решения лица и аргументом которой является выбранная им стратегий (например, функция прибыли, зависящая от назначенного плана производства). Задача принятия решений состоит, как правило, в том, чтобы найти стратегию, максимизирующую целевую функцию.

В теории игр основным предметом анализа являются более сложные модели принятия решения – в них лиц, принимающих решение, несколько – от двух до бесконечности. Предполагается, что их интересы не совпадают – то есть целевые функции этих лиц различны[1]. В этом и заключается основная суть конфликтной ситуации: решение принимается не одним индивидом, а несколькими, и функция выигрыша каждого из них зависит не только от его стратегии, но также и от решений других участников. Математическая модель такого рода конфликта называется игрой, а участники конфликта − игроками.

Очевидно, что в рамках такого подхода сфера применения теоретико-игровых моделей необычайно широка. Помимо классических *игр* – азартных, спортивных, из исследования которых и выросла вся существующая теория, конфликтной ситуацией может считаться любое человеческое взаимодействие. Таким образом, предметом теории игр может быть не только игра в шахматы, футбол или преферанс, но и другие, значительно более значимые с общечеловеческой точки зрения конфликты. Теория игр находит применение в военном деле (модели типа «оборона-нападение», модели воздушного боя Ланчестера), в экономике (например, почти все модели рынков несовершенной конкуренции в микроэкономике имеют теоретико-игровую природу, модели размещения общественного блага – тоже[2]), а также в политологии (модели электорального поведения, модели распределения влияния[3]) и даже в биологии (некоторые модели эволюционной

[1] Строго говоря, одного только отличия целевых функций недостаточно. Например, если целевая функция одного ЛПР равна целевой функции другого, умноженной на константу, то очевидно, что оптимальное поведение их совпадет.

[2] См., например: Савватеев А.В. Анализ коалиционной устойчивости «биполярного мира». Журнал Новой экономической ассоциации, 2012, № 1(17), с. 10–43; Савватеев А.В. Миграционно-устойчивая организация одномерного мира: теорема существования решения. Известия Иркутского государственного университета, серия «Математика», 2013. Т. 6, № 2. С. 57–68.

[3] Алескеров Ф.Т. Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций. Доклады Российской академии наук. 2007. Т. 414. № 5. С. 594-597.

динамики основаны на бесконечных повторяющихся играх[4]) и государственном и корпоративном управлении[5].

Исторически теория игр зародилась еще в XVIII веке, с началом эпохи просвещения и развитием экономической теории. А первые экономические модели того научного направления, что потом станет теорией игр, рассматривались А. Курно и Ж. Бертраном в XIX веке. Позже эти модели стали хрестоматийными моделями производства и ценообразования в условиях олигополии и ныне носят имена своих создателей (модели олигополии Курно и Бертрана). В начале XX в. Э. Ласкер (тот самый Ласкер – на протяжении 27 лет непобедимый чемпион мира по шахматам), Э. Цермело и Э. Борель выдвигают идею математической теории конфликта интересов. Формальные математические аспекты и приложения теории были впервые изложены в книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». В то время «мейнстримом» научных исследований были антагонистические игры – игры, в которых выигрыш одного игрока был равен потерям его визави. При этом вплоть до середины XX века теория игр считалась лишь математической теорией, несмотря на очевидные возможности для применения в экономике. Однако после Второй мировой войны в США (не в последнюю очередь благодаря увеличению финансирования науки) начинаются попытки практического применения теории игр в экономике, биологии, кибернетике, технике, антропологии. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений. В начале 50-х годов XX века Джон Нэш формулирует ставшую впоследствии ключевой для всей теории игр концепцию равновесия Нэша в неантагонистических играх. Согласно этой концеп-

---

[4] Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС Пресс, 2005.

[5] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2005.

ции, участники конфликта должны использовать оптимальную стратегию, что приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение. Работы Нэша внесли значительный вклад в развитие теории игр, были пересмотрены математические инструменты экономического моделирования. В целом, современная теория игр во многом опирается на подходы и результаты, увидевшие свет именно в работах Нэша. Однако и в последние годы это научное направление бурно развивается. Некоторые направления современной экономической теории вообще невозможно сформулировать без применения теории игр. Более того, львиная доля Нобелевских премий по экономике в последние годы была вручена за работы, в которых значительное внимание уделялось именно игровым моделям. Среди них можно назвать премии 2005 года (Р.И. Ауманн и Т.К. Шеллинг, «За расширение понимания проблем конфликта и кооперации с помощью анализа в рамках теории игр»), 2007 (Л. Гурвич, Э. Маскин, Р. Майерсон, «За создание основ теории оптимальных механизмов»), 2012 (Л. Шепли и Э. Рот, «За вклад в теорию устойчивого распределения и практику моделирования рынка»).

Традиционно математическая теория игр подразделяется на два основных направления. Теория кооперативных игр изучает принятие решений в предположении, что существует механизм, обеспечивающий выполнение совместно принятого решения. При этом основная задача в этом направлении − указать множество взаимовыгодных решений с учетом интересов и самостоятельных возможностей отдельных игроков и коалиций, то есть групп совместно действующих игроков. Если это множество включает несколько вариантов решения, то возникает также задача выработки критерия оптимальности, который позволил бы найти единственное, наилучшее в некотором смысле решение. В свою очередь, некооперативные игры отражают ситуации, в которых игроки действуют самостоятельно, независимо друг от друга, и если какие-то соглашения заключаются, то они не являются обязывающими: каждый игрок может отклониться от договоренности. Настоящее учебное пособие посвящено именно некооперативным играм.

Помимо деления на кооперативные и некооперативные игровые модели, существует также множество других классификаций моделей теории игр. Например, различие между статическими и динамическими играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

Мы (естественно) начнем с самого простого случая: статические игры двух лиц. Среди таких игр в литературе часто выделяется отдельный подкласс задач, в которых выигрыш одного участника равен потерям другого. Этот тип игр называется антагонистическими. Антагонистическим играм во многих учебниках посвящена отдельная глава, где разбираются методы их решения и анализа. Однако в рамках настоящего учебного пособия исповедуется иной подход. Антагонистические игры, при всем их важном прикладном значении, являются всего лишь подклассом игровых задач в целом, и методы их решения в основном являются частными случаями методов решения поэтому автору не кажется необходимым выделять их в отдельный раздел.

Для иллюстрации основных принципов теории игр можно использовать пример классической детской игры «Камень-Ножницы-Бумага». Почти все знают ее правила. В игре участвуют двое, игроки считают вместе вслух «Камень… Ножницы… Бумага… Раз… Два… Три», одновременно качая кулаками. На счет «Три» они одновременно показывают при помощи руки один из трех знаков: камень, ножницы или бумагу. Победитель определяется по следующим правилам:

- камень побеждает ножницы («камень слишком крепок для ножниц»);

- бумага побеждает камень («бумага накрывает камень»);
- ножницы побеждают бумагу («ножницы разрезают бумагу»).

Если игроки показали одинаковый знак, то засчитывается ничья, и игра переигрывается.

Как можно математически описать эту игру? Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Это означает, что множество игроков (будем обозначать его I в этой игре) состоит из двух элементов: $I = \{1,2\}$. Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Будем обозначать множества стратегий игрока под номером i как S_i (S – от слова strategy). Тогда в теоретико-игровой модели «Камень-ножницы-бумага» для каждого из двух игроков ($i = 1; 2$, то есть $i \in I$) множество стратегий для каждого игрока будет иметь вид $S_i = \{1,2,3\}$. Здесь стратегия 1 означает выбор камня, стратегия 2 – ножниц, а стратегия 3 – бумаги.

После того, как мы формально записали множество игроков и множество стратегий, следующей задачей является формализация их выигрышей. Поскольку в игре участвуют всего два игрока, а у каждого игрока конечное число стратегий, то ***профилей стратегий*** (всевозможных наборов стратегий всех игроков) конечное число – в нашем случае их девять.

> ***Определение 1.1.*** *Игры, в которых множество игроков состоит из двух элементов, а число их стратегий конечно, называются биматричными.*

Название «биматричные» указывает на наиболее удобный (и потому используемый традиционно) способ формализации выигрышей игроков. Вообще говоря, выигрыш каждого игрока является функцией, зависящей от выбранных им и его соперниками стратегий. В случае биматричных игр выигрыши обоих игроков представимы в виде матрицы. Каждая строка этой соответствует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец– одной стратегии

2-го игрока. А на их пересечении стоит элемент матрицы, равный выигрышу данного игрока при соответствующем профиле стратегий.

Заметим, что биматричная антагонистическая игра для записи не требует двух матриц, так как матрица выигрыша второго игрока фактически является матрицей выигрыша первого игрока, умноженной на –1. Поэтому биматричные антагонистические игры называются просто «матричными», матрица выигрыша второго игрока обычно даже не записывается (видимо, в целях экономии места).

Вернемся к игре «Камень-Ножницы-Бумага». Будем считать, что выигрыш победившего игрока равен 1 условной единице, а выигрыш проигравшего равен –1[6]. Заметим, что, несмотря на то, что игрок несет потери, они все равно называются «выигрышем». Их смысл как потерь для игрока несет знак минуса. В случае ничьей никто ничего не получает (но и не теряет) и сохраняется статус-кво, поэтому в матрицу выигрышей записывается ноль.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{К} & \text{Н} & \text{Б} \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{К} \\ \text{Н} \\ \text{Б} \end{array}
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{К} & \text{Н} & \text{Б} \end{array} \\
B = & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{К} \\ \text{Н} \\ \text{Б} \end{array}
\end{array}
\end{array}
\qquad (1.1)
$$

Эти матрицы задают нам функции полезности игроков – то, как их выигрыши зависят от играемых стратегий.

[6] Вообще, дальше по тексту нам часто потребуется описывать выигрыш игроков в подобном «обобщенном» виде. Поэтому дальше слова «условные единицы выигрыша» для сокращения записи будут заменяться на просто «единицы».

Для того, чтобы формально определить, что такое функция выигрыша, напомним следующее определение.

Пусть $S_1, S_2, \dots, S_N$ – множества. Тогда декартовым произведением этих множеств называется множество всевозможных наборов из N элементов, где на i-м месте стоит элемент s_i множества S_i:

$$S = \prod_{i=1}^{N} S_i = \{(s_1, s_2, \dots, s_N) | s_1 \in S_1, s_s \in S_2, \dots, s_N \in S_N\}.$$

Множество профилей стратегий всей игры (множество ситуаций игры) представляет собой декартово произведение множеств стратегий всех игроков. Например, в игре «Камень-ножницы-бумага» множество ситуаций – это множество пар {(камень, камень); (камень, ножницы); … ; (бумага, бумага)}. Таким образом, в этой игре ровно девять профилей стратегий, каждый из которых однозначно соответствует ситуации в игре.

Обозначим $S_{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} S_j$ множество стратегий всех игроков, кроме игрока $i \in I$. Пусть у нас есть множество игроков $I = \{1, \dots, N\}$. Пусть $s_i \in S_i$ – стратегия игрока $i \in I$, а $s \in S$ – профиль стратегий. Функция $u_i(s)$ выигрыша игрока i присваивает каждому возможному профилю стратегий $s \in S$ выигрыш данного игрока, при условии, что все игроки выбирают входящие в этот профиль стратегии: $u_i: S \to R$. Обозначим $u: S \to R^N$ вектор-функцию, составленную из функций выигрыша всех игроков. Каждому профилю стратегий она ставит в соответствие вектор выигрышей всех игроков.

> ***Определение 1.2***. *Тройка $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ называется игрой в нормальной форме.*

В игре каждый Г игрок i выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Таким образом, все взаимодействие игроков представлено в виде математического объекта – игры в нормальной форме – который содержит всю информацию об исследуемом конфликте. Теперь нашей задачей является понять, какие стратегии игроки выберут, в зависимости от их множеств стратегий S и функций полезностей $u(\cdot)$. По сути, решить теоретико-игровую задачу – это и означает указать те стратегии, которые являются для каждого игрока оптимальными. При этом, в отличие от самых простых моделей принятия решения – оптимизационных моделей, где есть только одна целевая функция, и поиск решения сводится к поиску ее максимума,– в игровых задачах «одновременно» максимизируются сразу несколько целевых функций. Поэтому здесь могут быть несколько критериев оптимальности – в качестве решения можно рассматривать как «компромиссные» варианты (например, равновесия Нэша), так и «лучшие сразу для всех» (например, Парето-эффективные исходы, равновесия по доминированию). Точные математические формулировки таких концепций решения приводятся в следующей главе.

2. Различные концепции решения: Равновесие Нэша. Доминирование. Эффективность по Парето

В теории игр, как и во многих других теориях, можно выделить два подхода: нормативный и дескриптивный. Нормативный подход состоит в том, что теория дает рекомендации, как следует действовать в той или иной конфликтной ситуации. А при дескриптивном подходе теория пытается описать, как на самом деле происходит взаимодействие между игроками. Изначально теория игр развивалась как нормативная – она пыталась определить оптимальное поведение игроков, не вдаваясь в тонкости его реализации. В настоящей главе мы обсудим три концепции оптимального поведения игроков и соответствующие им профили стратегий, которые будем считать решением исходной игровой задачи.

Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему б***о***льший выигрыш. Это рассуждение приводит к понятию доминирующих и доминируемых стратегий. Начнем с формального определения.

> ***Определение 2.1***. *Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ – игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ сильно (слабо) доминирует стратегию $s_i' \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо: $u_i(s_i, s_{-i}) > (\geq)\, u_i(s_i', s_{-i})$.*

Иными словами, стратегия s_i дает игроку выигрыш б***о***льший, чем стратегия s_i', всегда – при любых стратегиях соперников. Очевидно, что в этом случае игроку совершенно не выгодно использовать стратегию s_i'– ведь есть как минимум одна другая стратегия, заведомо «лучше» ее. Таким образом, доминируемые стратегии не могут оказаться оптимальными для игрока ни при каком критерии оптимальности.

Если у игрока есть одна стратегия, которая доминирует все остальные (*доминирующая* стратегия), то мы можем утверждать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то получаемый из них набор стратегий составляет первый из рассматриваемых вариантов решения игры (и прогноз относительно того, что сделает каждый игрок). Речь идет о равновесии в доминирующих стратегиях.

Определение 2.2. *Ситуация* $s^* \in S$ *– равновесие в сильно (слабо) доминирующих стратегиях в игре* $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$, *если для каждого игрока* $i \in I$ *его стратегиях* s_i^* *– доминирующая: для любого* $s_i' \neq s_i^*, s_i' \in S_i$ *и для всех* $s_{-i} \in S_{-i}$ *справедливо:* $u_i(s_i^*, s_{-i}) > (\geq)\, u_i(s_i', s_{-i})$.

Понятие доминирования касается только одного участника игры – ведь только для него доминирующая стратегия заведомо лучше доминируемой. Очевидно, что для его соперников ситуация может быть совершенно иной – для какого-то игрока (скажем, j) вполне возможна ситуация, когда смена игроком i стратегии с доминируемой на доминирующую приведет к снижению выигрыша. В литературе в таких случаях часто используется понятие «индивидуальной устойчивости» – то есть отдельно взятому индивиду невыгодно отклоняться от доминирующей стратегии.

Принципиально другой подход к оценке эффективности стратегий иллюстрирует понятие доминирования по Парето[7]. Если в случае сильного и слабого доминирования сравнению подлежат стратегии каждого отдельно взятого игрока, то в случае Парето-доминирования сравниваются уже ситуации в игре в целом – то есть совокупности стратегий всех игроков (профили стратегий). Парето-оптимальные ситуации в игре часто могут не существовать, кроме того, они могут не быть индивидуально устойчивыми – то есть какому-то отдельному игроку может ока-

[7] Вильфредо Парето (15 июля 1848, Париж – 20 августа 1923, Селиньи, кантон Женева, Швейцария) – итальянский инженер, экономист и социолог. Помимо Парето-оптимальности, его имя также носит статистическое Парето-распределение.

заться выгодно «разрушить Эдем» – перейти из Парето-оптимальной ситуации в другую, увеличив свой выигрыш, но уменьшив выигрыши других игроков.

Пример 2.1. Рассмотрим биматричную игру со следующими матрицами выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

В ней выделенная серым ситуация является одновременно и равновесием Нэша, и Парето-оптимальной. С одной стороны, ни одному из игроков не выгодно отклоняться от нее в одностороннем порядке (в первой матрице выделенное число максимальное в своем столбце, во второй – в своей строке). С другой стороны, не существует такой ситуации в игре, в которой **оба** игрока получали бы выигрыш бо́льший, чем в $(1,3)$, если бы они координированно решили «передвинуть» игру туда. Действительно, первому игроку, если он находится в ситуации (1,3), могло бы быть выгодным оказаться в ситуации (2,2), так как тогда его выигрыш увеличится с 5 до 6. Однако такое изменение «заблокирует» второй игрок, выигрыш которого снизится с 7 до 2. Что касается второго игрока, то он получает в ситуации (1,3) и вовсе свой единственный наибольший выигрыш, для него любая ситуация будет хуже данной.

3. Биматричные игры. Равновесие Нэша в биматричных играх. Функция (отображение) наилучшего ответа

В равновесии Нэша стратегия любого игрока обеспечивает ему максимальный выигрыш при входящих в равновесный профиль (фиксированных) стратегиях других игроков. Зафиксируем равновесные значения стратегий всех игроков, кроме i. Тогда его функция выигрыша $\tilde{u}_i(s_i) = u_i(s_i, s^*_{-i})$ – функция одной переменной – его стратегии, а равновесная по Нэшу стратегия $s_i{}^*$– аргмаксимум этой функции, то есть множество тех стратегий, которые максимизируют $\tilde{u}_i(s_i)$.

Определение 3.1. *Отображение реакции (оно же отображение наилучшего ответа) игрока i есть множество $s_i(s_{-i})$, такие, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо:*

$$s_i(s_{-i}) = \left\{ s_i \in S_i | u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i{}' \in S_i} u_i(s_i{}', s_{-i}) \right\}.$$

Проиллюстрируем введенное понятие на примере. Рассмотрим биматричную игру, описываемую следующими матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем равновесия Нэша в этой игре, используя отображения наилучшего ответа. Строится такое изображение для каждого игрока следующим образом. Фиксируется стратегия его соперника, после чего ищется максимум выигрыша рассматриваемого игрока. Те стратегии, которые его максимизируют, и являются множеством наилучшего ответа на зафиксированную стратегию соперника. Проиллюстрируем это на примере первого игрока. Найдем его наилучший ответ на первую стратегию второго игрока – его соперника, имеем: $s_1(1) = 3$ – т.е., на стратегию 1 второго игрока первому игроку выгодней всего ответить стратегией 3. Аналогично находим наилучшие ответы первого игрока на другие стратегии второго: $s_1(2) = 3$, $s_1(3) = 1$ и $s_1(4) = 4$. Для второго игрока: $s_2(1) = 4$, $s_2(2) = \{1; 3\}$, $s_2(3) = 2$ и $s_2(4) = 3$. Обратите внимание, что на вторую стратегию первого игрока второй игрок может ответить любой из двух стратегий – первую или третью – получив одинаковый выигрыш в 2 единицы, максимальный среди возможных.

Равновесием Нэша в рассматриваемой игре будет та ситуация, от которой ни одному из игроков не выгодно в одностроеннем порядке отклоняться. В терминах отображений наилучшего ответа это определение запишется так: равновесие – эта тот профиль стратегий, в котором стратегия каждого игрока входит в множество его наилучшего ответа на равновесную стратегию соперника. Рассмотрим наш пример. Здесь равновесием является ситуация $\{3; 2\}$ – у первого игрока стратегия 3 является наилучшим ответом на стратегию 2 второго игрока, а у второго игрока стратегия 2 – наилучший ответ на третью стратегию его соперника.

Предложенному алгоритму можно дать более наглядное описание. Внимательно посмотрим на пару матриц выигрыша игроков. Согласно концепции нормальной формы биматричных игр, стратегии первого игрока соответствуют строкам матриц выигрыша, стратегии второго – столбцам. Таким образом, для поиска наилучшего ответа первого игрока на фиксированную стратегию второго нам необходимо зафиксировать номер столбца, соответствующий этой стратегии игрока 2, и найти наибольшее значение среди элементов этого столбца в первой матрице. Номера строк, в которых стоит это максимальное значение, и сформируют множество наилучшего ответа первого игрока на стратегию второго. Аналогично, для поиска наилучшего ответа второго игрока на фиксированную стратегию первого необходимо в соответствующей строке матрицы выигрыша второго игрока найти все максимальные значения (выбор строки соответствует фиксированной стратегии первого игрока).

Снова рассмотрим пару матриц из предыдущего примера. Отметим в матрице A наибольшие элементы в каждом из столбцов, а в матрице B – наибольшие элементы в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \boxed{4} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{5} & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{5} \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{2} & 0 \\ 4 & \boxed{6} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, в первой матрице номера строк, где находятся выделенные элементы, составляют множества наилучшего ответа первого игрока на стратегии, соответствующие номерам столбцов этих элементов: $s_1(1) = 3$, $s_1(2) = 3$, $s_1(3) = 1$ и $s_1(4) = 4$. Аналогично и для второго игрока – с учетом замены строк на столбцы и наоборот: номера столбцов, где находятся выделенные элементы – это множества наилучшего ответа второго игрока на стратегии, соответствующие номерам строк этих элементов ($s_2(1) = 4$, $s_2(2) = \{1; 3\}$, $s_2(3) = 2$ и $s_2(4) = 3$). А тот элемент, который оказался выделенным в обеих матрицах, соответствует равновесию Нэша – это элемент во второй строке и третьем столбце (ситуация $\{3; 2\}$).

Пример 3.1. «Обман на рынке» (Васин, 2005). Покупатель (игрок 2) приходит на рынок за яблоками. Продавец, торгующий яблоками (игрок 1), использует пружинные весы. У него есть две стратегии:

1) честно взвесить 1 кг яблок;
2) подкрутить пружинку и обвесить покупателя на 200 грамм.

Назовем эти стратегии «честность» и «обман» соответственно. Покупатель также имеет две стратегии:

1) поверив продавцу, заплатить деньги и уйти;
2) взвесить купленные яблоки на контрольных весах и в случае обнаружения обмана звать кого-то и доказывать, что его обвесили.

Назовем эти стратегии «поверить» и «проверить» соответственно. Определим выигрыши продавца и покупателя в каждой ситуации:

а) Продавец честно взвесил, а покупатель ему поверил. Соответствующие выигрыши обоих, равные 0, выберем в качестве начала отсчета;

б) Продавец обманул, а покупатель ему поверил. Выигрыш продавца равен 1, так как он получил дополнительную прибыль. Выигрыш покупателя равен -1, поскольку он получил меньше яблок.

в) Продавец честно взвесил, а покупатель его проверил. Выигрыш продавца равен 0 (он выручил ровно столько, сколько и должен был). Выигрыш покупателя равен $-1/2$: он, во-первых, зря потратил время, а, во-вторых, глупо себя чувствует.

г) Продавец обманул, а покупатель его проверил. Выигрыш продавца равен -1, так как обнаружение обмана грозит ему определенными неприятностями (например, его могут прогнать с рынка). Выигрыш покупателя равен 1/2, так как, во-первых, ему возместили обвес, а, во-вторых, он испытывает моральное удовлетворение от разоблачения негодяя.

После того, как мы сведем все вышеописанное в единую таблицу, сразу же получаем биматричную игру с матрицами выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим наилучшие ответы игроков в матрицах выигрыша:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что в этом случае у нас нет таких элементов, которые были бы выделены в обеих матрицах. Это означает, что в рассматриваемой игре равновесий Нэша нет.

Рассмотрим далее еще несколько примеров классических биматричных игровых моделей.

Пример 3.2 («семейный спор»[8]). Следующий пример представляет собой так называемую игру на координацию (координационную игру) – в нем есть два равновесия Нэша. Муж и жена решают, как им провести вечер. На повестке дня стоят два варианта: пойти на футбол (Ф) или в театр (Т). Муж предпочитает футбол, жена предпочитает театр, однако при этом главным фактором является желание провести этот вечер вместе. Если супруги идут на футбол, то жена получает 1 единицу, а муж − 2 единицы полезности. Если же они идут в театр, то выигрыш жены − 2, а мужа − 1. Если оба идут в разные места, то выигрыши игроков отрицательные: в одиночестве муж получает –1 единицу от посещения футбола (любимое зрелище не компенсирует страдания от ссоры с супругой) и –2 единицы от театра (мало того, что поссорились, так еще и зрелище неинтересное). У жены выигрыш в одиночестве рассчитывается по той же схеме: –2 единицы от одиночного посещения футбола и –1 от театра в одиночестве. Выигрыши игроков, таким образом, задаются матрицами (H = husband – Муж, W = wife – Жена):

$$H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Т} & \text{Ф} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Т} \\ \text{Ф} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Т} & \text{Ф} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Т} \\ \text{Ф} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В игре существует две ситуации равновесия: (1,1) и (2,2). Первая из них предпочтительней второму игроку, а вторая − первому. Если муж с женой будут принимать решение независимо (например, мобильный телефон у кого-то не работает), то при выборе своей оптимальной равновесной стратегии они оба вместо хорошо проведенного вечера получат скандал и массу нега-

[8] В некоторой литературе эта игра называется «битва полов» («battle of sexes»).

тивных эмоций. Данный пример показывает, что при наличии нескольких равновесий Нэша, в разной степени выгодных игрокам, необходим какой-то механизм координации при выборе стратегии. Поэтому игры, подобные примеру 3.2, называют также «играми на координацию».

Пример 3.3 («дилемма заключенного»). Еще одна классическая модель взаимодействия, представимая в виде биматричной игры,– дилемма заключенного. Алекс и Брюс (игроки 1 и 2), подозреваемые в совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Ввиду отсутствия прямых улик, успех или неуспех обвинения зависит от признания (стратегия 1) или непризнания (стратегия 2) самих бандитов. Если оба бандита признаются (ситуация (1,1)), то они будут признаны виновными и приговорены к 8 годам тюрьмы. Если ни один из них не признается (ситуация (2,2)), то по обвинению в главном преступлении они будут оправданы, но обвинителю все-таки удастся доказать их виновность в некотором сопутствующем менее тяжком преступлении, например, в ношении оружия, в результате чего они будут приговорены к 1 году тюрьмы. Если, наконец, признается только один из них (ситуации (2,1) и (1,2)), то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а непризнавшийся будет приговорен к отбытию максимального срока − 10 лет.

Матрицы выигрышей игроков примут вид:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{П} & \text{Н} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{П} \\ \text{Н} \end{array} & \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{П} & \text{Н} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{П} \\ \text{Н} \end{array} & \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В этой игре имеется единственная ситуация равновесия (1,1): обоим бандитам необходимо признаться. Однако есть Парето-оптимальная ситуация (2,2), более выгодная обоим игрокам, но не являющаяся ситуацией равновесия. Данный пример показывает, что равновесия Нэша могут быть неэффективны в Парето-смысле, то есть за счет отклонения обоих игроков от ситуации равновесия можно улучшить выигрыши всех участников.

4. Биматричные игры. Смешанное расширение

Как мы уже выяснили раньше, бывают такие игры, где равновесий Нэша нет. Пример: «Камень-ножницы-бумага», «Покупатель и продавец». Что нам делать? Можем ли мы как-то прогнозировать действия игроков?

Для анализа таких игр необходимо расширить само определение игры, введя понятие смешанных стратегий. «Физический смысл» этого понятия следующий. Пусть у каждого игрока есть генератор случайных чисел, определяющий ему, какую из стратегий ему следует играть. Так, при наличии двух стратегий человек может подбрасывать монетку: вероятность того, что он сыграет каждую стратегию, равна 50%. Если стратегий, например, ровно шесть, то игроку удобно прибегнуть к бросанию костей, и так далее. Другим игрокам известна вероятность выпадения той или иной стратегии, однако наблюдать конкретную реализацию на момент принятия решения они не могут.

В этом случае мы говорим, что игрок i пользуется *смешанной стратегией*. Стратегия игрока – определить, с какой вероятностью он должен играть каждую из своих «исходных» стратегий из множества S_i («*чистые стратегии*»). Чистая стратегия – частный случай смешанной стратегии, в котором один из элементов S_i играется с вероятностью 100%. При построении смешанного расширения исходной игры предполагается, что игрок имеет возможность предоставить выбор чистой стратегии (или действия) воле случая, но при этом контролировать вероятность, с которой реализуется та или иная чистая стратегия.

Как формально описать множество смешанных стратегий игрока? По сути, смешанная стратегия – это распределение вероятностей на множестве чистых стратегий. В качестве примера вернемся к игре «Камень-ножницы-бумага»: у каждого игрока всего три чистых стратегии. Если p_1– вероятность, с которой играется «камень», а p_2 и p_3 – вероятности для «ножниц» и «бумаги», соответственно, то $p_i \geq 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Множество всех наборов (p_1, p_2, p_3), удовлетворяющих указанному требованию, называется двумерным симплексом.

Определение 4.1. *Пусть N– натуральное число. Тогда симплекс размерностью $N - 1$ есть множество $\Delta^{N-1} \subset R^{N-1}$, такое, что для всех $(p_1, \dots, p_N) \in \Delta^{N-1}$ выполнено:*

$$\sum_{i=1}^{N-1} p_i = 1,\ p_i \geq 0.$$

Обратим внимание, что $(N-1)$-мерный симплекс описывает все возможные распределения вероятностей на множестве из N элементов. Размерность $N-1$ на единицу меньше N из-за ограничения $p_1 + \dots + p_N = 1$. Таким образом, мы можем задать для каждого игрока множество всех его смешанных стратегий.

Определение 4.2. *Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ – конечная игра. Назовем $\Sigma_i = \Delta^{|S_i|-1}$ множеством смешанных стратегий игрока i, $\Sigma = \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i$ – множеством смешанных стратегий в игре. Пусть $\Sigma_{-i} = \prod_{j \neq i} \Sigma_j$. Элементы $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ называются смешанными стратегиями и профилями смешанных стратегий.*

Теперь для того, чтобы полностью сформулировать определение смешанного расширения игры, нам осталось определить выигрыши игроков при использовании смешанных стратегий. Так как исходы розыгрыша стратегий носят случайный характер, интуиция подсказывает нам, что необходимо в качестве оценки эффективности смешанной стратегии каждого игрока брать математическое ожидание его выигрыша. Важное допущение здесь заключается в том, что везде, если иное не оговаривается особо, считаем действия любых различных игроков независимыми случайными событиями.

Пусть $s = (s_1, \dots, s_N)$ – профиль чистых стратегий, σ– профиль смешанных стратегий, в котором игрок i играет чистую стратегию s_i с вероятностью $p_{\sigma_i}(s_i)$. Тогда вероятность того, что при профиле смешанных стратегий σ будет сыгран профиль чистых стратегий s будет равна:

$$p_\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} p_{\sigma_i}(s_i).$$

Отсюда получаем выражение для математического ожидания выигрыша игрока в зависимости от профиля смешанных стратегий:

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \prod_{s \in S}^{N} p_\sigma(s) u_i(s).$$

Теперь мы готовы дать формальное определение смешанного расширения игры и смешанного равновесия (равновесия в смешанных стратегиях).

Определение 4.3. *Пусть $\Gamma = \langle I, S, u \rangle$ – конечная игра в нормальной форме. Назовем игру $G = \langle I, \Sigma, u \rangle$ смешанным расширением игры* Г. *Равновесием в смешанных стратегиях в игре* Г *называется равновесие Нэша в ее смешанном расширении.*

В этом определении, u обозначает как функцию полезности в игре как с чистыми стратегиями, так и со смешанными стратегиями. В этом нет противоречия, так как мы уже выяснили, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной.

Сейчас читатель, вероятно, может задать вопрос – а зачем, собственно, мы проделали всю эту работу по введению и формализации понятия смешанного расширения конечной игры? На самом деле, смешанное расширение играет центральную роль в теории игр. Как мы помним из предыдущих рассуждений и примеров, равновесий Нэша в чистых стратегиях в конечных играх может не существовать – причем даже в таких простых, как модель «покупатель-продавец». А вот смешанное равновесие в конечных играх существует всегда – это нам гарантирует теорема, доказанная Джоном Нэшем в 1950 году и носящая его имя.

Теорема 4.1 (Нэш). *Пусть Г – конечная игра. Тогда в ней существует равновесие в смешанных стратегиях.*

Эта теорема – один из наиболее важных результатов в современной науке об обществе. Она означает, что равновесие Нэша является универсальным инструментом, который можно использовать для анализа любого игрового взаимодействия с конечным числом игроков и стратегий.

Пример 4.1. Рассмотрим пример задачи на поиск смешанного равновесия («Теннисисты», Захаров, 2010). В финал крупного турнира вышли два теннисиста – Роджер Федерер и Рафэль Надаль. В решающем гейме Федерер стоит на задней линии и собирается отбить мяч, посланный ему Надалем. Федереру необходимо принять решение, в какую сторону ему отбить мяч: направо вдоль края корта (DL) или налево наискосок (CC). В свою очередь, Надаль пытается угадать направление, в котором полетит мяч. Он также может побежать отбивать подачу прямо, вдоль края корта (DL) или наискосок налево (CC).

Квалификация обоих игроков примерно одинаковая, они оба являются лучшими в своем деле. Пока Федерер не ударит, Надаль не побежит отбивать, иначе Федерер ударит в другую сторону и выиграет гейм. Но если Надаль будет ждать, пока Федерер нанесет удар, то он тоже проиграет, так как удары в профессиональном теннисе очень сильные и практически «не берущиеся». Таким образом, оба игрока одновременно решают, что им делать. При этом множества чистых стратегий у обоих игроков состоят из двух элементов: $S_1 = S_2 = \{CC, DL\} \sim \{1; 2\}$.

При игре профессионалов столь высокого и при этом почти равного уровня многое решается волею случая. В качестве оценки выигрыша каждого из игроков можно взять вероятность его выигрыша в случае использования ими фиксированных стратегий удара: выигрыш Федерера равен вероятности того, что он выиграет розыгрыш, выигрыш Надаля равен вероятности того, что этого не случится. Сумма выигрышей обоих игроков равна единице при любом профиле стратегий. Обратите внимание, что эта игра формально не является антагонистической, однако, записывая матрицы выигрышей в такой игре, для каждого профиля стратегий достаточно указать только полезность первого игрока. Такие игры называются ***играми с постоянной суммой***, их свойства почти полностью аналогичны свойствам антагонистических игр. Эти классы игровых моделей эквивалентны с точностью до добавления константы, равной половине суммы игры. Действительно, если из обеих матриц вычесть сумму игры, деленную на два, преобразованная игра будет антагонистической (проверьте это самостоятельно!).

Вернемся к теннисистам. Условно запишем их матрицы выигрышей в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Если Надаль правильно угадывает направление удара, то он имеет хорошие шансы отбить мяч, и очень хорошие, если Федерер бьет наискосок. Но если Надаль не угадывает, то вероятность того, что он сумеет «догнать» мяч и спасти игру, невелика.

Наша задача – найти все смешанные равновесия в этой игре. Как нам уже известно, равновесия в чистых стратегиях являются частным случаем равновесий в смешанных стратегиях, поэтому начнем решение задачи с их поиска. Отметим в первой матрице наибольшие элементы в каждом столбце, а во второй – наибольшие в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & \mathbf{0,8} \\ \mathbf{0,9} & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{0,5} & 0{,}2 \\ 0{,}1 & \mathbf{0,8} \end{pmatrix}.$$

Как видим, совпадающих элементов нет – значит, в чистых стратегиях равновесий нет. Найдем равновесия в смешанных стратегиях, используя метод функций наилучших ответов. Для этого найдем функции ожидаемого выигрыша для каждого из игроков:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \end{array}$$

$$u_A(p,q) = 0{,}5pq + 0{,}9(1-p)q + 0{,}8p(1-q) +$$

$$+0{,}2(1-p)(1-q),$$

$$u_B(p,q) = 0{,}5pq + 0{,}1(1-p)q + 0{,}2p(1-q) +$$

$$+0{,}8(1-p)(1-q).$$

Чтобы построить функции наилучшего ответа, найдем производную каждой из этих функций по «своей» переменной:

$$\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) = 0{,}5q - 0{,}9q + 0{,}8(1-q) - 0{,}2(1-q) = 0{,}6 - q,$$

$$\frac{\partial}{\partial q} u_B(p,q) = 0{,}5p + 0{,}1(1-p) - 0{,}2p - 0{,}8(1-p) = -0{,}7 + p.$$

Так как функция $u_A(p,q)$ является линейной по каждой из переменных, то наилучший ответ первого игрока (Надаля) на смешанную стратегию q второго игрока (Федерера) – это либо 0 (если $\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) < 0$), либо 1 (если $\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) > 0$), либо весь отрезок $[0,1]$ – так как если $\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) = 0$, то функция ожидаемого выигрыша первого игрока является константой и любая смешанная стратегия дает ему один и тот же выигрыш (он же и максимальный). Таким образом:

$$p^*(q) = \begin{cases} 0;\text{ если } q > 0{,}6 \\ [0{,}1];\text{ если } q = 0.6. \\ 1;\text{ если } q < 0{,}6 \end{cases}$$

Аналогично получаем функцию наилучших ответов для второго игрока:

$$q^*(p) = \begin{cases} 0;\text{ если } p < 0{,}7 \\ [0{,}1];\text{ если } p = 0{,}7. \\ 1;\text{ если } p > 0{,}7 \end{cases}$$

Изобразим эти функции на одной координатной плоскости.

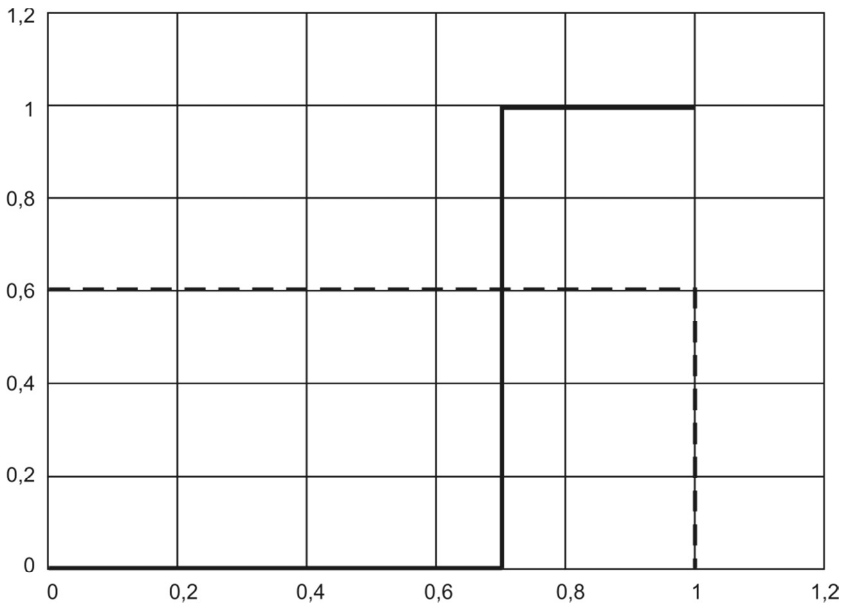


Рисунок 4.1 – Графики наилучших ответов игроков в задаче «Теннисисты» (сплошная линия – Федерер, пунктирная – Надаль)

Графики функций наилучшего ответа имеют лишь одну общую точку – $(p, q) = (0{,}6; 0{,}7)$. Эта точка и дает нам равновесие в смешанных стратегиях в исследуемой игре. В итоге смешанное равновесие в рассматриваемой игре:

$$(p^0, q^0) = \big((0{,}6; 0{,}4); (0{,}7; 0{,}3)\big).$$

Исследуем свойство смешанных расширений биматричных игр задаваемых матрицами $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Смешанные стратегии игроков здесь такие же, как и раньше: $p \in P$; $q \in Q$, где P и Q – симплексы размерностей $m-1$ и $n-1$ соответственно. Ожидаемые выигрыши игроков имеют вид:

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j,$$

$$B(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j.$$

По теореме Нэша в игре существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях (p^0, q^0). Для этого равновесия по определению выполнены неравенства:

$$A(p,q^0) \le A(p^0,q^0) \forall p \in P,$$

$$B(p^0,q) \le B(p^0,q^0) \forall q \in Q.$$

Лемма 4.1. *Для того чтобы ситуация* (p^0, q^0) *была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Г, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие:*

$$\begin{cases} A(i,q^0) \le A(p^0,q^0),\ i = 1,\dots,m \\ B(p^0,j) \le B(p^0,q^0),\ j = 1,\dots,n \end{cases}.$$

Доказательство леммы

→ Пусть (p^0, q^0) − ситуация равновесия. Тогда $A(p,q^0) \le A(p^0,q^0)$. Полагая $p = (0,\ \dots 0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0)$, получим неравенства условия леммы для матрицы *A*. Аналогично выводятся неравенства для матрицы *B*.

← Пусть ситуация (p^0, q^0) удовлетворяет условию леммы. Возьмем произвольную смешанную стратегию p первого игрока, домножим неравенства $A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0)$ на p_i и сложим их. В результате получим неравенство $A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0)$. Для второй матрицы – аналогично. ■

Из доказанной леммы следует одно из важнейших свойств смешанных равновесий – *Условие дополняющей нежесткости*[9].

Теорема 4.2. *Пусть* (p^0, q^0) − *ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда:*

1. Если $p_i^0 > 0$, то $A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$.
2. Если $q_j^0 > 0$, то $B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$.

Следствие. Пусть (p^0, q^0) − ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда:

1. Если $A(i, q^0) < A(p^0, q^0)$, то $p_i^0 = 0$.
2. Если $B(p^0, j) < B(p^0, q^0)$, то $q_j^0 = 0$.

Поясним выражение «дополняющая нежесткость», заимствованное из теории двойственности линейного программирования. Поставим в соответствие неравенству $A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0)$ из условия леммы неравенство $p_i^0 > 0$ с тем же номером. Тогда если одно из этих неравенств выполнено строго («нежестко»), то по теореме соответствующее неравенство выполнено как равенство («жестко»).

Все это можно записать в следующей краткой форме: для решения (p^0, q^0) в смешанных стратегиях игры с матрицами A и B справедливы равенства:

$$p_i^0\big(A(i, q^0) - A(p^0, q^0)\big) = q_j^0\big(B(p^0, j) - B(p^0, q^0)\big) = 0,$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

[9] «Complementary slackness condition».

Теорема 4.3. *Для того, чтобы ситуация* (p^0, q^0) *была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Г, необходимо и достаточно, чтобы нашлись множества* $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ *и числа* v_1, v_2, *для которых выполнены условия:*

$$\text{а}\begin{cases} \sum_{j\in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1 \ \forall i \in X^0 \\ \sum_{j\in Y^0} a_{ij} q_j^0 \le v_1 \ \forall i \notin X^0 \\ \sum_{j\in Y^0} q_j^0 = 1, q_j^0 \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sum_{i\in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2 \ \forall j \in Y^0 \\ \sum_{i\in X^0} p_i^0 b_{ij} \le v_2 \ \forall j \notin Y^0. \\ \sum_{i\in X^0} p_i^0 = 1, p_i^0 \ge 0 \end{cases}$$

В чем смысл теоремы 4.3? Она позволяет (в перспективе) свести поиск равновесий в смешанных стратегиях к решению систем линейных уравнений и неравенств. Проблема в том, что множества X^0, Y^0 заранее не известны. В общем случае необходим перебор всевозможных подмножеств множеств X, Y. Однако в случае небольшой размерности игры (т.е. малого количества стратегий у игроков) это может быть действенным методом решения игры.

Теорема 4.4. *В любой биматричной игре для некоторой ситуации равновесия* (p^0, q^0) *в смешанных стратегиях найдутся такие множества* $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ *и числа* v_1, v_2, *для которых выполнены условия теоремы 2 и* $|X^0| = |Y^0|$.

Эта теорема позволяет свести поиск равновесия к перебору квадратных подматриц $\bar{A} = \left(a_{ij}\right)_{i\in X^0; j\in Y^0}$ и $\bar{B} = \left(b_{ij}\right)_{i\in X^0; j\in Y^0}$ и решению соответствующих систем из условий теоремы 4.3. Вообще говоря, производя перебор квадратных подматриц, мы найдем только часть равновесий. Существует условие, связанное с линейной независимостью строк матрицы A и столбцов матрицы B (условие общности положения матриц, см. Васин, Морозов (2005, с. 105–106), которое гарантирует, что любому равновесию соответствуют множества X^0 и Y^0 одинакового размера, однако оно весьма трудно для проверки в случае матриц выигрыша большого размера.

Рассмотрим метод решения игр, в которых каждый игрок имеет только две стратегии. Это так называемые 2×2-игры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Для первого игрока система из теоремы 2 примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v^1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v^1 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ q_1 \ge 0, q_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 1 - q_1 \\ a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = a_{21}q_1 + a_{22}(1 - q_1). \\ 0 \le q_1 \le 1 \end{cases}$$

Получив из третьего уравнения выражение для q_2 в зависимости от q_1 и исключив из системы v_1, можно перейти к единственному уравнению от одной переменной q_1. Ему можно без труда придать графическую интерпретацию.

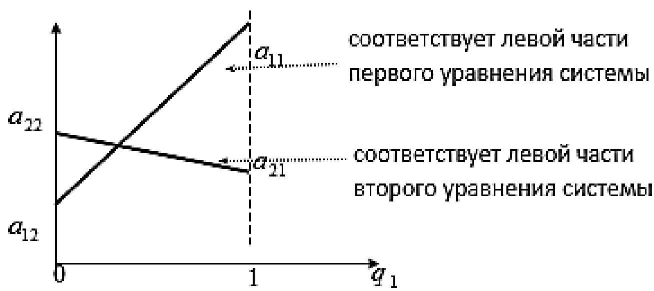


Рисунок 4.2 – Графическая интерпретация метода поиска смешанных равновесий для 2×2-биматричных игр

Решение этого уравнения (и, соответственно, всей исходной системы) существует, когда $sign(a_{22} - a_{12}) = sign(a_{11} - a_{21})$. При выполнении этого условия решение можно выписать в виде:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{22} + a_{12}},\ q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{22} + a_{12}}.$$

Для второго игрока проводятся аналогичные расчеты, откуда получаются его стратегии в равновесии:

$$p_1 = \frac{b_{22} - b_{12}}{b_{11} - b_{21} - b_{22} + b_{12}},\ q_2 = \frac{b_{11} - b_{21}}{b_{11} - b_{21} - b_{22} + b_{12}}.$$

Проиллюстрируем работу алгоритма для игр с матрицами размеров 2×n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ a_{21} & \dots & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{12} \\ b_{21} & \dots & b_{22} \end{pmatrix}.$$

В данном случае смешанная стратегия первого игрока имеет вид $p = (p_1,\ 1 - p_1)$, где $p_1 \in [0,1]$. Перебирать нужно 2×2-подматрицы. Каждая из них задается номерами двух столбцов j_1, j_2. Для выбранных j_1, j_2 запишем систему из теоремы 4.3.

$$\begin{gathered} p_1^0 b_{1j_1} + (1 - p_1^0) b_{2j_1} = v_{\ 2}, \\ p_1^0 b_{1j_2} + (1 - p_1^0) b_{2j_2} = v_{\ 2}, \\ p_1^0 b_{1j} + (1 - p_1^0) b_{2j} \le v_{\ 2} \forall j \ne j_1, j_2; p_1^0 \in [0,1]. \end{gathered} \qquad 4.1$$

Если эта система несовместна, то перейдем к другой паре j_1, j_2. Если решение системы существует, то рассмотрим систему

$$\begin{gathered} q^* a_{1j_1} + (1 - q^*) a_{2j_2} = v_{\ 1} \\ q^* a_{2j_1} + (1 - q^*) a_{2j_2} = v_{\ 1}; q^* \in [0,1]. \end{gathered} \qquad 4.2$$

Пусть у системы 4.2 также существует решение (в ином случае переходим к другой паре). Определим стратегию:

$$q^0 : q_j^0 = \begin{cases} q^*,\ j = j_1 \\ 1 - q^*,\ j = j_2. \\ 0, j \ne j_1, j_2 \end{cases}$$

Тогда ситуация (p^0, q^0) будет смешанным равновесием Нэша в исходной игре.

Предлагаемому алгоритму можно дать геометрическую интерпретацию. На отрезке $p_1 \in [0,1]$ строим прямые $l_j(p_1) = p_1^0 b_{1j} + (1 - p_1^0) b_{2j},\ j\ =\ 1,\ \dots, n$. Точки излома верхней огибающей семейства прямых l_j соответствуют парам j_1, j_2, для которых существует решение системы 4.1. Последовательно перебираем точки верхней огибающей и решаем систему уравнений из 4.2 с проверкой неравенств на q.

Пример 4.2. Рассмотрим пример с игрой в теннис (пример 4.1), и решим его с помощью графического метода. Пусть в арсенале у Федерера есть еще один удар: Lob («свеча»). Матрица его выигрыша игры теперь имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 4.3 показано, как выигрыш Федерера зависит от смешанной стратегии Надаля q для каждой из трех чистых стратегий Федерера, где q, как и раньше, есть вероятность того, что Надаль сыграет DL. Жирная ломаная линия – верхняя огибающая– показывает максимальную полезность, которую может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля.

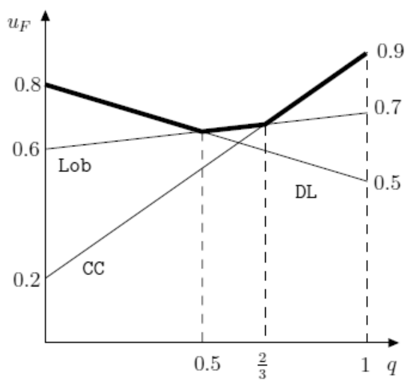


Рисунок 4.3 – Максимальная полезность, которую может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля

На рисунке показано, как выигрыш Надаля зависит от смешанной стратегии Федерера p для каждой из трех чистых стратегий Надаля. Жирная ломаная линия – нижняя огибающая – показывает минимальные потери, которые может понести Надаль в зависимости от стратегии Федерера. По этому графику можно построить функцию наилучшего ответа Федерера: если $q < 0.5$, то Федерер играет DL, если $q = 0.5$ – то смешанную стратегию, в которой используются с любыми ненулевыми вероятностями DL и Lob, если $q \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, то Lob, если $q = \frac{2}{3}$ – то смешанную стратегию, в которой используются с любыми ненулевыми вероятностями Lob и CC, если $q > \frac{2}{3}$ – то CC.

Так как эта игра является антагонистической, то в равновесии стратегия Надаля должна минимизировать максимальную полезность Федерера. Действительно, предположим, что в равновесии $q \neq 0.5$. Тогда (предполагая равновесие) выигрыш Федерера будет максимальным для данного q. Но это означает, что Надаль может увеличить свой выигрыш, выбрав стратегию $q^* = 0.5$. Таким образом, $q^* = 0.5$. Нам остается найти вероятности, с которыми Федерер играет DL и Lob.

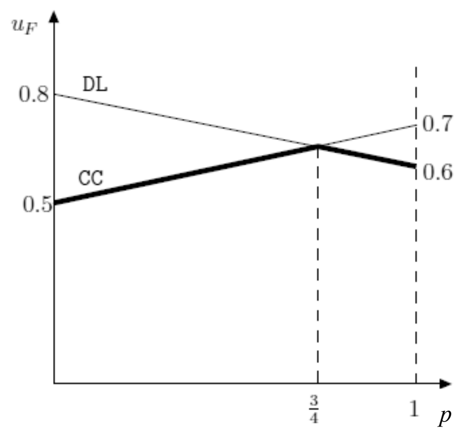


Рисунок 4.4 – Минимальные потери, которые может понести Надаль в зависимости от стратегии Федерера

Рисунок 4.4 показывает выигрыш Федерера и Надаля в зависимости от вероятности p, с которой Федерер играет Lob, при разных чистых стратегиях Надаля. Жирная линия показывает минимальный выигрыш Федерера (и, соответственно, максимальный выигрыш Надаля) в зависимости от p. Из графика видно, что $p = \frac{3}{4}$.

5. Биматричные игры. Доминирование. Процедура последовательного исключения стратегий

Исследуем свойство смешанных расширений биматричных игр, задаваемых матрицами A и B. Мы уже убедились в том, что все свойства чистых стратегий могут быть обобщены на случай смешанных стратегий. При этом не обсужденным остался вопрос доминирования. Оказывается, что мы можем обобщить понятие доминирования и на случай смешанных стратегий. Однако для этого нам потребуется сначала уточнить само понятие доминирования. Приведем ряд таких «уточняющих» определений.

Определение 5.1. *Стратегия первого игрока i* ***строго доминирует*** *стратегию g ($i \succ g$) на множестве $Q^2 \subseteq S^2$, если $a_{ij} > a_{gj}$ для $\forall j \in Q^2$*

Определение 5.2. *Стратегия первого игрока i* ***слабо доминирует*** *стратегию g ($i \succcurlyeq g$) на множестве $Q^2 \subseteq S^2$, если $a_{ij} \geq a_{gj}$ для $\forall j \in Q^2$*

Определение 5.3. *Стратегия второго игрока j* ***строго доминирует*** *стратегию g ($j \succ g$) на множестве $Q^1 \subseteq S^1$, если $b_{ij} > b_{ig}$ для $\forall i \in Q^1$*

Определение 5.4. *Стратегия второго игрока j* ***слабо доминирует*** *стратегию g ($j \succcurlyeq g$) на множестве $Q^1 \subseteq S^1$, если $b_{ij} \geq b_{ig}$ для $\forall i \in Q^1$*

Определим ***процедуру последовательного исключения строго доминируемых стратегий.*** Эта процедура состоит в построении последовательности вложенных множеств Q_l^a, $l = 1, \dots, k$, где $S^a = Q_1^a \supseteq Q_2^a \supseteq \cdots \supseteq Q_k^a = \bar{S}^a$, причем для любого $l = 1, \dots, k$: $\forall g \in Q_l^1 \setminus Q_{l+1}^1 \exists i \in Q_{l+1}^1 : i \succ g$ на множестве Q_l^2, и $\forall g \in Q_l^2 \setminus Q_{l+1}^2 \exists j \in Q_{l+1}^2 : j \succ g$ на множестве Q_l^2.

Шаг 1. Ищем пары стратегий $i,\ g$, такие что $a_{ij} > a_{gj}$ для $\forall j \in Q^2$. Вычеркиваем все такие g в обеих матрицах. Аналогично ищем столбцы в матрице второго игрока, где $b_{ij} > b_{ig}$ для $\forall i \in Q^1$. Вычеркиваем все такие столбцы из обеих матриц.

Шаг 2. Мы получили редуцированные матрицы. Новое множество строк – Q_1^2, новое множество столбцов – Q_2^2. Может получиться так, что в редуцированных матрицах окажутся новые доминируемые строки и столбцы. Вычеркиваем их и переходим к следующему шагу.

Пусть $\bar{S}^a$– пределы последовательностей $Q_1^a \supseteq Q_2^a \supseteq \cdots$, $a = 1,2$. Тогда игра разрешима по доминированию, если каждое множество $\bar{S}^a$ состоит из одного элемента $\bar{s}^a$, а профиль стратегий $\left(\bar{s}^1,\ \bar{s}^2\right)$ называется решением игры по доминированию (равновесие в доминирующих стратегиях).

Определение 5.5. *Множество $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ строго доминирует множество S ($\bar{S} \succ S$), если оно получено из множества S последовательным исключением строго доминируемых стратегий*

Определение 5.6. *Множество $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ слабо доминирует множество S ($\bar{S} \succ S$), если оно получено из множества S последовательным исключением строго доминируемых стратегий.*

Если на каждом следующем этапе мы удаляем сильно доминируемые стратегии, то порядок их удаления не влияет на итоговый результат. Например, если на первом шаге мы удалим доминируемые стратегии игрока 1, а на втором шаге– доминируемые стратегии игрока 2, то от перемены порядка, в котором удаляются доминируемые стратегии игроков, результат не изменится. Мы также получим тот же результат, если на одном шаге удалим доминируемые стратегии сразу нескольких (или даже всех) игроков. Однако, если мы удаляем не только сильно доминируемые, но и слабо доминируемые стратегии, то порядок удаления может быть важен.

Теперь определим понятие доминирования в смешанных стратегиях. Обозначим $f_p^1(j) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ – ожидаемый выигрыш игрока 1, если он использует смешанную стратегию p, а второй игрок – чистую стратегию j.

***Определение 5.7**. Смешанная стратегия p строго доминирует чистую стратегию i на множестве $\bar{S}^2 \subset S^2$, если $f_p^1(j) > a_{ij}\ \forall j \in \bar{S}^2$*

***Определение 5.8**. Смешанная стратегия p слабо доминирует чистую стратегию i на множестве $\bar{S}^2 \subset S^2$, если $f_p^1(j) \geq a_{ij}\ \forall j \in \bar{S}^2$*

Пример 5.1. Рассмотрим пример. Пусть выигрыши игроков задаются следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем в каждом столбце первой матрицы максимальный элемент. Если максимум единственный и стоит в некоторой строке, то она не может быть доминируемой. Следовательно, доминируемой может быть только первая строка. Возьмем вторую и третью строки с коэффициентами ½ – такая комбинация доминирует первую строку! Это означает, что смешанная стратегия вида $p = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ строго доминирует чистую стратегию 1. Это означает, что, скорее всего, в смешанном равновесии первому игроку будет невыгодно играть с любой ненулевой вероятностью его первую стратегию. Такие рассуждения приводят нас к необходимости построения для смешанных стратегий процедуры, аналогичной процедуре последовательного исключения доминируемых стратегий.

Определение 5.9. *Множество ситуаций* $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ *строго доминирует другое множество ситуаций* $S = S^1 \times S^2$ *в смешанных стратегиях, если возможно с помощью процедуры последовательного исключения строго доминируемых стратегий построить систему последовательных ний* $\bar{S} = S_k \subset S_{k-1} \subset \cdots \subset S_1 = S$, *где:* $S_l = S_l^1 \times S_l^2$, *и* $\forall i \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1\ \exists p: p \succ i$ *на* S_l^2, $\forall j \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1\ \exists q: q \succ j$ *н* S_l^2.

Определение 5.10. *Множество ситуаций* $\bar{S} = \bar{S}^1 \times \bar{S}^2$ *слабо доминирует другое множество ситуаций* $S = S^1 \times S^2$ *в смешанных стратегиях, если возможно с помощью процедуры последовательного исключения слабо доминируемых стратегий построить систему последовательных вложений* $\bar{S} = S_k \subset S_{k-1} \subset \cdots \subset S_1 = S$, *где:* $S_l = S_l^1 \times S_l^2$ *и* $\forall i \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1\ \exists p: p \succcurlyeq i$ *на* S_l^2, $\forall j \in S_l^1 \backslash S_{l+1}^1\ \exists q: q \succcurlyeq j$ *н* S_l^2, *кроме того,* $p_s = 0\ \forall s \notin S_{l+1}^1$, $q_k = 0\ \forall k \notin S_{l+1}^2$.

Вернемся к рассмотренному примеру, в нем $\{2,3\} \times \{2,3\} \succ S$. Следующая теорема позволяет нам связывать свойства смешанных равновесий в исходной игре и в редуцированной, полученной в результате последовательного исключения доминируемых стратегий.

Теорема 5.1.

1) Пусть множество $\tilde{S} = \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \succ S$ *(строго доминирует) в смешанных стратегиях. Тогда для любого равновесия Нэша* (p, q) *выполнено:*$\forall i \notin \tilde{S}^1\ p_i = 0, \forall j \notin \tilde{S}^2\ q_j = 0$.

2) Пусть $\tilde{S} = \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \succcurlyeq S$ *(слабо доминирует) в смешанных стратегиях и* $(\bar{p}, \bar{q})$ *– равновесие Нэша в игре* $\bar{\Gamma}$ *с матрицами* $\{(a_{ij}), (b_{ij}); i \in \tilde{S}^1, j \in \tilde{S}^2\}$. *Пусть в исходной игре смешанные стратегии игроков* p *и* q *определены следующим образом:*

$$p_i = \begin{cases} \bar{p}_i, i \in \tilde{S}^1 \\ 0, i \notin \tilde{S}^1 \end{cases}, \qquad q_j = \begin{cases} \bar{q}_j, j \in \tilde{S}^2 \\ 0, j \notin \tilde{S}^2 \end{cases}.$$

Тогда (p, q) *– равновесие Нэша в исходной игре* Γ.

Эта теорема позволяет нам использовать процесс последовательного исключения доминируемых стратегий и для смешанного доминирования. Действительно, из нее следует, что любая строго доминируемая стратегия используется в смешанном равновесии с нулевой вероятностью. Это значит, что мы можем «выбросить» соответствующую строку (если речь идет о первом игроке) или столбец (если о втором) из обеих матриц выигрыша – и подобный «вандализм» никак не скажется на равновесии, так что мы можем перейти от поиска равновесий в исходной игре к «редуцированной», размерность которой будет меньше. Более того, после такого исключения стратегий уже в редуцированной игре могут оказаться доминируемые стратегии (которые в исходной, вообще говоря, могли таковыми и не быть!). Их также можно будет исключить, что дополнительно может снизить размерность задачи.

Пример 5.2. Проиллюстрируем описанный процесс на примере задачи о студенте и преподавателе. Перед началом занятия преподаватель может проверять (или не проверять) выполнение домашнего задания. У него есть три стратегии: S_1 – проверить выполнение ДЗ внимательно; S_2 – проверить наличие ДЗ; S_3 – не проверять ничего. Студент также имеет три стратегии:

- домашнее задание не выполнять;
- домашнее задание списать у соседа перед парой;
- разобраться с задачей и выполнить ДЗ самому.

Выигрыш студента определяется как разность поощрения преподавателя и своих временных затрат. Если студент не делает ДЗ, то его временные затраты нулевые; если списывает – то затраты 1 единица, если делает сам – затраты 4 единицы. В случае внимательной проверки за невыполненное ДЗ студент получает штраф в 5 единиц; за списанное ДЗ штраф в 10 единиц; а за выполненное ДЗ бонус в 10 ед. При невнимательной проверке штраф в 5 единиц, и бонусы по 2 единицы в каждом из оставшихся случаев. Выпишем матрицу выигрыша студента:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выигрыш преподавателя задается следующей матрицей:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Попробуем найти равновесия в чистых стратегиях. Для этого в матрице студента находим максимальные элементы в каждом столбце, а в матрице преподавателя – в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видим, совпадающих элементов нет – значит, в чистых стратегиях равновесий нет. Попробуем исключить какие-либо стратегии по строгому доминированию. В матрице студента этого сделать нельзя – в каждой строке стоит элемент, являющийся максимальным в своем столбце. Однако в матрице преподавателя второй столбец строго доминируется первым, значит, мы можем в обеих матрицах удалить второй столбец.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -11 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь в уже сокращенной матрице $\hat{A}$ вторая строка строго доминируемая – первая строка поэлементно больше ее. Следовательно, теперь мы вычеркиваем в обеих матрицах вторую строку.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На этом процесс последовательного исключения доминируемых стратегий завершен. Теперь найдем равновесия в смешанных стратегиях, используя метод функций наилучших ответов. Для этого найдем функции ожидаемого выигрыша для каждого из игроков

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$u_A(p,q) = -5pq + 6(1-p)q - 4(1-p)(1-q),$$

$$u_B(p,q) = 8pq + (1-p)(1-q).$$

Чтобы построить функции наилучшего ответа, найдем производную каждой из этих функций по «своей» переменной:

$$\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) = -5q - 6q + 4(1-q) = -15q + 4,$$

$$\frac{\partial}{\partial q} u_B(p,q) = 8p - (1-p) = 9p - 1.$$

Так как функция $u_A(p,q)$ является линейной по каждой из переменных, то наилучший ответ первого игрока (студента) на смешанную стратегию q второго игрока (преподавателя) – это либо 0 (если $\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) < 0$), либо 1 (если $\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) > 0$), либо весь отрезок $[0,1]$ – так как если $\frac{\partial}{\partial p} u_A(p,q) = 0$, то функция ожидаемого выигрыша первого игрока является константой и любая смешанная стратегия дает ему один и тот же выигрыш (он же и максимальный). Таким образом,

$$\tilde{p}(q) = \begin{cases} 0; \text{если } q > {}^4/_{15} \\ [0,1]; \text{если } q = {}^4/_{15} \\ 1; \text{если } q < {}^4/_{15} \end{cases}$$

Аналогично получаем функцию наилучших ответов для второго игрока:

$$\tilde{q}(p) = \begin{cases} 0;\, \text{если } p < {}^1/_9 \\ [0,1];\, \text{если } p = {}^1/_9 \\ 1;\, \text{если } p > {}^1/_9 \end{cases}$$

Изобразим эти функции на одной координатной плоскости:

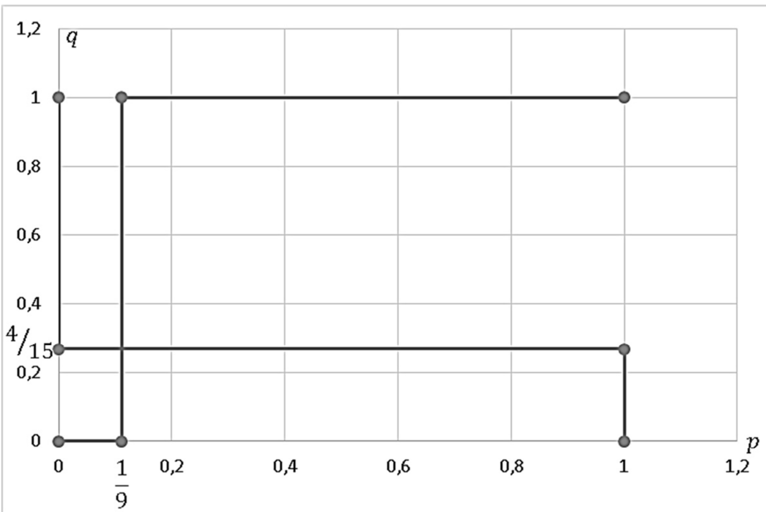


Рисунок 5.1 – Функции наилучшего ответа студента и преподавателя

Графики функций наилучшего ответа имеют лишь одну общую точку – $(p, q) = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{15}\right)$. Эта точка и дает нам равновесие в смешанных стратегиях в исходной игре. Осталось лишь вспомнить, что у каждого из игроков вторая стратегия является доминируемой и в равновесии используется с нулевой вероятностью. Таким образом, ответ в задаче следующий: в исследуемой игре есть единственное равновесие в смешанных стратегиях: $p_0 = \left(\frac{1}{9}, 0, \frac{8}{9}\right)$, $q_0 = \left(\frac{4}{15}, 0, \frac{11}{15}\right)$.

Приложение I. Задачи для самостоятельного решения по темам, входящим в главы 1–5

1. Докажите, что в антагонистической игре любая ситуация оптимальна по Парето.

2. Существует ли равновесие в такой игре 2×2, где для матриц выигрыша выполнено условие:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vee & \vee \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ b_{21} & > & b_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Рассмотрим следующую игру двух лиц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Существуют ли у какого-либо из игроков доминирующие стратегии? Если да, то укажите их. Существует ли в приведенной игре:

a. равновесие в доминирующих стратегиях?

b. равновесие, получаемое исключением доминируемых стратегий?

4. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник также имеет в подчинении три отряда и может принимать такие же решения. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником.

a. Запишите игру в нормальной форме, соответствующую данному конфликту. Найдите в ней равновесия Нэша.

b. Пусть теперь у Блотто в распоряжении четыре отряда, в то время как у его соперника – три. Как изменится нормальная форма игры и равновесия?

c. Пусть сопернику полковника пришло подкрепление и теперь он также располагает четырьмя отрядами. Как изменится равновесный исход их конфликта?

5. Завод выпускает автомобили партиями по 100 штук. За каждую автомашину завод получает от концерна 1,3 ед. оплаты, из которых 1 ед. составляют премиальные, а 0,3 ед. предназначены для операций технического контроля (ОТК). Завод (игрок 1) может выпускать партию автомобилей либо с ОТК (стратегия 1), либо без ОТК (стратегия 2), увеличивая сумму премиальных. При использовании первой стратегии итоговая сумма премиальных, полученная заводом за партию, составляет 100 ед., при использовании второй стратегии − 130 ед. С целью уменьшения производственного брака концерн решил привлечь независимую автомастерскую, осуществляющую технический контроль за качеством продукции. Стоимость проверки автомобиля для фирмы составляет 0.12 ед. Если ОТК заводом не проводится, то автомобиль неисправен с вероятностью 4/5. В случае обнаружения неисправностей завод обязан их устранить, затратив 0.3 ед., и заплатить дополнительно фирме 0.2 ед. из своих премиальных. Головной офис концерна (игрок 2) может либо проверить партию (стратегия 1), либо отказаться от ее проверки (стратегия 2). Выигрышем первого игрока является ожидаемая сумма премиальных, полученная заводом от концерна за партию автомобилей с учетом издержек на ОТК и возможных выплат концерну. Выигрышем второго игрока является ожидаемая сумма штрафных выплат, полученных от завода при проверке партии автомобилей с учетом затрат на эту проверку. Найдите смешанное равновесие в получающейся игре.

6. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 6 \\ 4 & 12 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 9 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 8 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

9. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 15 & 12 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. Провести последовательное исключение по строгому доминированию смешанными стратегиями. Найти все точки равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. На берегу водоема расположены две фабрики. Каждая из фабрик может либо полностью перерабатывать свои отходы (затраты 15 млн. руб.), либо перерабатывать их частично и сбрасывать в реку 5 тонн отходов (затраты 10 млн.руб.), либо не перерабатывать и сбрасывать в реку 10 тонн отходов (нет затрат). Если в реку будет сбрасываться меньше 12 тонн отходов, никто ничего не заметит. Если от 12 до 19 тонн, то обе компании будут оштрафованы на 20 миллионов за загрязнение окружающей среды. Если же в реку будет сбрасываться 19 и более тонн отходов, то компании будут оштрафованы на 40 миллионов каждая. Описать эту ситуацию как биматричную игру, найти равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

12. На станции электрички в двух разных концах перрона стоят два ларька. Торговцы ларьков выбирают, какой товар им реализовывать – пиво, воблу, или же оба товара сразу. Из прибывшего поезда выходят два пассажира, каждому нужно по стакану пива и порции рыбы. За стакан пива пассажир готов заплатить 10 рублей, за порцию рыбы – 5 рублей, а если кто-то предложить им набор «Пиво+рыба», то пассажир готов заплатить 20 рублей (так как он покупает все в одном месте и ему не придется бегать по перрону между ларьками). Если в обоих ларьках продается одно и то же, то первый пассажир идет покупать в первый ларек, а второй – во второй. Если в каком-то из ларьков продается сразу набор «Пиво+рыба», то оба покупателя берут его в этом ларьке, даже не заглядывая в другой. Выигрыш торговцев при этом взаимодействии равен их выручке. Описать эту ситуацию как биматричную игру, найти все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях.

13. Анна и Борис (игроки A и B) играют в следующую игру. Сначала каждый из них кладет в банк 100 долларов. Затем оба одновременно называют число: 1,2 или 3. Если сумма делится на 3, то побеждает Анна, в противном случае выигрывает Борис. Победитель забирает весь банк. Есть ли у игроков доминирующие стратегии? Найдите все равновесия Нэша и выигрыши игроков в равновесии.

14. Близится развязка игры в «Мафию». Осталось три игрока: 1 мирный житель, 1 мафия и 1 маньяк. Всем уже стало понятно, кто есть кто. Каждый хочет победить, в том числе и маньяк, который считается самостоятельным игроком (не мирным жителем и не мафией). Наступила ночь. Маньяк и мафия независимо друг от друга решают, кого этой ночью убить. Чем завершится игра в равновесии Нэша?

15. Четыре парламентские партии работают над необходимым, но крайне непопулярным у населения законом. Все партии одновременно и независимо друг от друга решают, выдвигать ли данный закон от своего имени. Если n партий выдвинут данный закон от своего имени, где $1 \leq n \leq 4$, то каждая партия понесет репутационные издержки в размере 12 единиц. Партии, не выдвинувшие данный закон, за него проголосуют, но репутационных издержек не понесут. Однако если ни одна партия закон не выдвинет, то все закончится плохо: из-за отсутствия необходимого закона каждая партия понесет издержки в размере 15. Найти все равновесия Нэша в этой игре.

16. В стране N приходят президентские выборы. В них участвуют два кандидата – сильный (S = strong) и слабый (W = weak). Стратегией кандидата является его предвыборная программа – левая L, центристская C, или правая R. Матрицы выигрышей таковы:

$$S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ C \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ C \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Пусть $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$. Если слабый кандидат выберет ту же стратегию, что и сильный, то проиграет вчистую; если выберет другую, то проиграет с меньшим отрывом (что лучше), или даже выиграет. Найдите равновесие.

17. Нефтяная компания X имеет монополию на поставку бензина в трех регионах. Компания Y собирается построить сеть своих заправок в одном из этих регионов; компания X намерена ей помешать. Компания Y выбирает, в каком из регионов строить заправки; X выбирает, в каком из регионов бороться с Y путем административного ресурса. Если компания Y выбрала регион i, а компания X – другой регион, то Y выигрывает v_i, X проигрывает ту же величину. Если обе компании выбрали один и тот же регион, то каждая получает нулевой выигрыш. Найдите равновесие в смешанных стратегиях, при условии, что $v_1 > v_2 > v_3 > 0$.

6. Непрерывные игры. Нормальная форма, равновесие Нэша. Теоремы об условиях существования

Как нам с вами уже известно, основной моделью конфликтной ситуации в теории игр является игра в нормальной форме. Игра в нормальной форме является формализацией описываемого конфликта, на математическом языке описывающей все аспекты исследуемого взаимодействия: участников, их возможные действия и последствия этих действий для каждого из них.

Мы вводили определение игры в нормальной форме в наиболее общем виде. Напомним его.

Определение 6.1. *Игра в нормальной форме – это совокупность трех элементов (тройка):* $\Gamma = \langle A; S^a, a \in A;\ u^a(s),$ $s = (s_a, a \in A) \in \bigotimes_{a\in A} S^a \rangle$, *где* A *– множество игроков (участников конфликтной ситуации),* S^a *– множество стратегий игрока* $a \in A$, $\bigotimes_{a\in A} S^a$ *– множество ситуаций игры (прямое произведение множеств стратегий всех игроков),* $u^a(s)$ *– выигрыш игрока* $a \in A$ *в ситуации* $s = (s_a, a \in A)$.

В качестве решения конфликтной ситуации мы рассматривали несколько концепций, однако из них наиболее употребимым является равновесие Нэша. Если говорить неформально («на пальцах»), то равновесие Нэша – это такая ситуация в игре (профиль стратегий), что ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными.

Определение 6.2. *Пусть* $\Gamma = \langle A; S^a;\ u^a(s)\rangle$ *– игра в нормальной форме. Тогда профиль стратегий* $s^* \in S$ *является равновесием Нэша, если для всех* $a \in A$ *и для всех* $s'_a \in S^a$ *справедливо:* $u^a(s^*_a, s^*_{-a}) \geq u^a(s'_a, s^*_{-a})$.

Иными словами, равновесие Нэша является ситуацией, устойчивой к индивидуальному отклонению игроков.

В случае биматричных игр равновесие Нэша искалось на основе матриц выигрышей. При этом его поиск был основан на методе, почти идентичном полному перебору всех возможных ситуаций в игре. Разумеется, совокупность возможных действий всех участников игры редко может быть представимо в виде множеств с конечным числом элементов. Во многих играх, соответствующих реальным конфликтным ситуациям, напротив, удобно считать, что множество стратегий не является конечным или даже счетным. Например, в дуополии Курно стратегия каждой из двух фирм – это объем выпуска их продукции, то есть неотрицательное действительное число. Для таких игр разработанный для биматричных игр аппарат поиска стратегий является неприменимым. Поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим более общий класс игровых моделей – непрерывные игры.

Непрерывные игры – это такие игры, в которых множества стратегий всех игроков предполагаются континуальными. Это могут быть отрезки числовой прямой, интервалы, полуинтервалы или даже вся числовая прямая, а также многомерные множества более сложной природы. Необходимо отметить, что мы сосредоточим наш анализ, в первую очередь, на одномерных множествах, то есть на таких играх, где стратегией каждого игрока является одно число. В случае, если стратегия игрока включает более одного компонента, анализ стратегического поведения заметно усложняется, выкладки удлиняются и становятся менее понятными, однако принцип поиска равновесий Нэша и их свойства остаются в целом аналогичными таковым для одномерного случая. Предполагая множество стратегий игроков континуальным, а их функции выигрыша дифференцируемыми, мы можем находить равновесия и исследовать их свойства, анализируя локальные максимумы функций выигрыша игроков.

Заметим, что нам уже приходилось сталкиваться с непрерывными играми в рамках настоящего курса. Речь идет о смешанных расширениях биматричных игр. Действительно, рассмотрим смешанное расширение биматричной игры Г с матрицами выигрыша A и B размерностей $m \times n$. Стратегии игроков в нем – это вероятностные распределения на множестве чистых стратегий, то есть векторы $p \in P$; $q \in Q$, где P и Q – симплексы размерностей $m-1$ и $n-1$ соответственно. Симплекс есть множество векторов из неотрицательных элементов, в сумме дающих единицу – а это и есть континуальное множество! А в качестве оценки выигрыша игроков выступали математические ожидания их выигрыша $A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ и $B(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$, которые являются непрерывными функциями от аргументов p и q. Таким образом, при анализе смешанных равновесий биматричной игры мы изучали равновесия в непрерывной игре, хотя само это понятие и особенности решения таких игр нам были еще неизвестны.

Для биматричной игры была доказана замечательная теорема Нэша, согласно которой в любой биматричной игре существует равновесие Нэша. На самом деле, эта теорема не является каким-то «отдельным» утверждением, касающимся только смешанных расширений биматричных игр. Теорема Нэша представляет собой следствие более общей теоремы о существовании равновесий Нэша в непрерывных играх. Эта теорема описывает условия, при которых в непрерывной игре существует равновесие, однако перед тем, как сформулировать и доказать ее, нам потребуется ввести (или вспомнить – для тех, кто более подкован в математическом анализе и теории оптимизации) ряд понятий, связанных с ***выпуклостью*** множеств и отображений.

Те из читателей, кто сталкивался с теорией оптимизации, могут помнить, что для поиска локальных экстремумов (а равновесие Нэша, с точки зрения игрока, является локальным максимумом его функции выигрыша при фиксированных стратегиях его соперников) наиболее «приятными» являются вогнутые (или выпуклые – зависит от типа экстремума) функции, экстремум которых ищется на выпуклом и замкнутом множестве. Для остальных приведем определения этих понятий.

Определение 6.3. *Подмножество* X *линейного пространства называется* ***выпуклым****, если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *отрезок* $[x_1, x_2]$ *также принадлежит* X.

Определение 6.4. *Подмножество X Евклидова пространства размерности* n *–* ***компакт*** *тогда и только тогда, когда X замкнуто и ограничено.*

Определение 6.5. *Функция* $f(x)$ *называется* ***выпуклой****, если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.

Определение 6.6. *Функция* $f(x)$ *называется* ***вогнутой****, если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.

Понятия выпуклости и вогнутости функций являются в определенном смысле обратными: выпуклость функции – это ее вогнутость «наоборот». Более того, в ряде учебников и научных работ (особенно выпущенных в советское время – чем раньше, тем чаще) встречаются термины «выпуклая вверх» (это, в нашем понимании, вогнутая) и «выпуклая вниз» (это просто выпуклая) функция. Примеры вогнутых функций:

- линейная функция $f(x) = (a, x) + b$,
- квадратичная функция $f(x) = (x, Ax) + (a, x) + b$,
  где $(x, Ax) \leq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Приятной (для нас) особенностью вогнутых функций является теорема о глобальном максимуме: вогнутая функция имеет на выпуклом множестве единственный локальный максимум, который одновременно является и глобальным. С точки зрения теории игр, это означает, что в случае выигрышей, вогнутых по «своим» аргументам, и выпуклых множеств стратегий, мы можем ожидать, что в рассматриваемой игре существует равновесие Нэша. Однако на самом деле мы можем накладывать на функции выигрыша даже более слабые условия. Речь идет о таком свойстве функций, как квазивогнутость.

Определение 6.7. *Функция* $f(x)$ *называется* квазивогнутой*, если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0,1]$ $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq min\{f(x_1), f(x_2)\}$*.*

Очевидно, что любая вогнутая функция является квазивогнутой. Примером квазивогнутой функции на прямой может служить любая монотонная функция – возрастающая или убывающая.

Необходимое и достаточное условие квазивогнутости функций можно получить, используя понятие множеств Лебега этой функции.

Определение 6.8. *Пусть* $z_0 \in Z$*. Множеством Лебега функции* $h(z)$*, определенной на каком-либо выпуклом множестве* Z*, называется множество* $Z^+(z_0) = \{z \in Z | h(z) \geq h(z_0)\}$*.*

Иными словами, множество Лебега функции, соответствующее точке z_0,– это совокупность таких точек исходной области определения этой функции, значения в которых больше, чем в точке z_0.

Утверждение 6.1. *Для того, чтобы функция* $h(z)$ *была квазивогнутой на выпуклом множестве* Z*, необходимо и достаточно, чтобы ее множества Лебега* $Z^+(z_0)$ *были выпуклыми при любых* $z_0 \in Z$*.*

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю в качестве упражнения**.**

Примеры графиков квазивогнутых, вогнутых и выпуклых функций одной переменной приведены на рисунке 6.1. На нем наглядно показан смысл доказанного утверждения: у квазивогнутых функций одной переменной множества Лебега представляют собой отрезки (они выделены полужирной линией) – выпуклые одномерные множества. У не квазивогнутых функций эти множества могут быть устроены более причудливо.

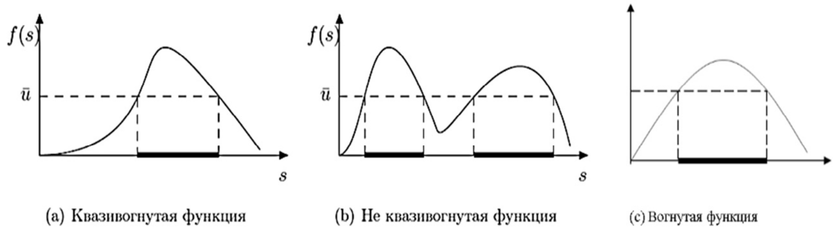


Рисунок 6.1 – Наглядное сравнение графиков квазивогнутых, не квазивогнутых и вогнутых функций

Обсужденное свойство квазивогнутых функций оказывается краеугольным камнем для всей теории непрерывных игр. С ним связана основная теорема существования равновесий.

Теорема 6.1 (о существовании равновесия). *Пусть S^i – выпуклый компакт, φ^i непрерывна по s и квазивогнута по s^i для любого $i \in I$. Тогда существует равновесие по Нэшу в игре Γ.*

Доказательство этой теоремы опирается на одну из теорем о неподвижных точках – теорему Какутани. Для того, чтобы продолжить дальнейшее обсуждение, нам понадобятся дополнительные понятия, обобщающие знакомые нам концепции отображения и непрерывности. Рассмотрим некоторые множества-компакты Z_1 и Z_2 – подмножества евклидовых пространств (размерность не важна). Зададим на множестве Z_1 точечно-множественное отображение $\Phi(z)$, которое каждому элементу z из этого множества ставит в соответствие сразу несколько элементов из Z_2. Таким образом, образ этого элемента представляет собой подмножество Z_2.

Определение 6.9. *Пусть $z_0 \in Z$. Множеством Лебега функции $h(z)$, определенной на каком-либо выпуклом множестве Z, называется множество $Z^+(z_0) = \{z \in Z | h(z) \geq h(z_0)\}$.*

Теорема 6.2 (Какутани). Пусть Z– выпуклый компакт линейного метрического пространства конечной размерности, Φ – замкнутое выпуклозначное точечно-множественное отображение из Z в себя. Тогда существует неподвижная точка $\boldsymbol{z}^*$**,** такая что $z \in \Phi(z^*)$.

Доказательство

Введем ряд необходимых для доказательства определений и обозначений. Так как Φ – замкнутое выпуклозначное точечно-множественное отображение из Z в себя, то для любого $z \in Z \quad \Phi(z)$ – подмножество Z.

Определение 6.10. *Отображение* $\Phi(z)$*– замкнутое, если его график* $\{(z, y)|z \in Z, y \in \Phi(z)\}$ *– замкнутое множество.*

Определение 6.11. *Отображение* $\Phi(z)$*– выпуклозначно, если для любого* $z \in Z$ $\Phi(z)$ *– выпуклое множество. Если* $\Phi(z)$ *– это отображение из* Z *в* Z*, то* $\Phi(z)$ *– замкнуто тогда и только тогда, когда оно непрерывно.*

Теорема Какутани показывает, что для любого непрерывного отображения выпуклого компакта в самого себя существует неподвижная точка $z \quad Z$, такая что $z = \Phi(z)$ (одномерный аналог – теорема Брауэра).

Доказательство теоремы 6.2 *для* $Z \subset \mathbb{R}^1$ *(одномерное множество).*

В одномерном случае Z является просто отрезком: $Z = [a, b]$. Рассмотрим множество $\hat{Z} = \{z \in Z| \max \Phi(z) \geq z\}$. Оно непусто, так как, по крайней мере, $a \in \hat{Z}$. Действительно, по условию отображение $\Phi(z)$ действует из Z в себя, то есть образом отрезка $[a, b]$ является он сам. Отсюда следует, что для любого $x \in Z$ $\Phi(z) \geq a$, в том числе и для самого значения a $\Phi(a) \geq a$.

Пусть $z^* = \sup \hat{Z}$. Покажем, что $z^* \in \Phi(z^*)$. Предположим обратное – что $z^* \notin \Phi(z^*)$. Это возможно в двух случаях: либо $\max \Phi(z^*) < z^*$ (то есть все множество $\Phi(z^*)$ лежит левее точки z^*), либо $\min \Phi(z^*) > z^*$ (все множество $\Phi(z^*)$ лежит правее точки z^*). Первая ситуация невозможна: $\max \Phi(z^*) \geq z^*$, так как отображение $\Phi(z)$– замкнутое, а, следовательно, его точная верхняя грань ему принадлежит. Предположим теперь, что $\min \Phi(z^*) > z^*$. В этом случае существует $z' > z^*$, такое что $\max \Phi(z') \geq z'$, так как $\Phi -$ замкнутое. Но это противоречит определению z^* как точной верхней грани! Таким образом, доказано существование неподвижной точки.

Доказательство теоремы 6.1

Определим отображение $U(s) = \otimes_{i \in I} U^i(s)$, где $U^i(s) = \underset{s_i \in S^i}{Argmax}\, u^i(s_i | s_{-i})$ – общее отображение наилучших ответов, то есть вектор, в котором элемент под номером i есть наилучший ответ i-го игрока на стратегии его соперников, равные элементам, стоящим на других местах. Вектор $U(s)$ имеет размерность, равную количеству игроков, и действует из множества профилей стратегий игроков в него же: $U: S \to S$.

Для того, чтобы продолжить доказательство настоящей теоремы, нам потребуется одно вспомогательное утверждение, которое мы приведем без доказательства (читатель может провести его самостоятельно).

Лемма 6.1. *Для любой непрерывной квазивогнутой функции u^i отображение U^i – замкнуто и выпуклозначно.*

Рассмотрим вновь отображение $U(s)$. Как следует из леммы 6.1, оно является замкнутым и выпуклозначным. Это означает, что можно применить теорему Какутани: существует неподвижная точка s^* отображения U такая, что $U(s^*) = s^*$. Иными словами, для любого i $s_i^* \in \underset{s_i \in S^i}{Argmax}\, u^i(s_i | s_{-i}^*)$, то есть s^* – равновесие Нэша игры Г. ■

Обсудим полученные результаты. Квазивогнутость и непрерывность функций полезности является условиями, гарантирующими непрерывность функций реакции игроков.

Пример 6.1. Пусть $S_1 = S_2 = [0,\ 1]$. Функции выигрыша игроков:

$$u_1(s_1, s_2) = max\{s_2 - s_1; s_1 - s_2\},$$

$$u_2(s_1, s_2) = -(s_2)^2 + \left(\frac{1}{2} + s_1\right) s_2.$$

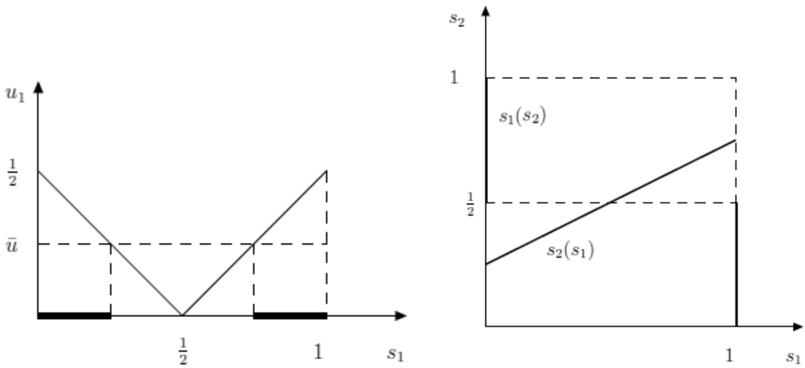


Рисунок 6.2 – Пример отсутствия равновесий при не квазивогнутых функциях выигрыша

Здесь обе функции выигрыша непрерывны, но первая не квазивогнута. Для первого игрока функция наилучшего ответа не является непрерывной, поэтому равновесия здесь нет (см. рисунок 6.2).

7. Непрерывные игры. Методы поиска равновесий

Для поиска равновесий в непрерывных играх используется подход, аналогичный тому, что применялся при поиске равновесий в биматричных играх – как при поиске чистых равновесий, так и при поиске смешанных. Речь идет о построении функций/отображений наилучшего ответа и поиске стационарной точки многомерного отображения наилучшего ответа. Иными словами, в конечном счете поиск равновесия Нэша сводится к решению системы уравнений или, в более общем случае, вложений, получаемых из условий первого порядка максимума для функции выигрыша каждого игрока. При этом функция/отображение наилучшего ответа игрока i является ничем иным, как отображением, ставящим в соответствие каждому возможному набору s_{-i} такое значение s_i, при котором условия первого порядка для максимума выполнены.

Для игрока $i \in I$ отображение наилучших ответов $U^i(s)$, упоминавшееся в доказательстве теоремы 6.1 (о существовании равновесия): пусть S^i – выпуклый компакт, φ^i непрерывна по s и квазивогнута по s^i для любого $i \in I$. Тогда равновесие по Нэшу в игре Г фактически зависит от s_{-i} и определяет множество его наилучших ответов на стратегии партнеров. Поиск равновесий Нэша сводится к решению относительно вектора переменных $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ системы уравнений:

$$s_i = U^i(s_{-i}), i = 1, \dots, N.$$

В наиболее простом случае, когда игроков всего двое, в эту систему войдут всего два уравнения:

$$\begin{cases} s_1 = U^1(s_2) = \operatorname*{Argmax}_{x \in S_1} u_1(x, s_2) \\ s_2 = U^2(s_1) = \operatorname*{Argmax}_{y \in S_2} u_2(s_1, y) \end{cases}$$

В силу своей невысокой размерности, эта система может иметь достаточно простое решение для довольно широкого класса функций выигрыша. С другой стороны, решению этой системы можно придать весьма наглядную геометрическую интерпретацию – аналогично тому, как это делалось для поиска смешанных равновесий в биматричных играх 2×2. В частности для класса игр «на прямоугольнике», в которых множества стратегий обоих игроков – отрезки числовой прямой ($S_i = [c_i, d_i] \subset \mathbb{R}, i = \{1,2\}$), то достаточно построить в прямоугольнике $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ графики $U^1(s_2)$ и $U^2(s_1)$ и найти их пересечения.

Как уже говорилось, здесь наблюдается полная аналогия с обсужденным ранее в настоящем пособии методом поиска смешанных равновесий в биматричных играх 2×2. На самом деле, это не только не совпадение, даже само слово «аналогия» здесь не совсем применимо. Это тот же самый метод!

В самом деле, в смешанном расширении биматричной игры функции выигрыша игроков $A(p,q), B(p,q)$ представляют собой матожидание выигрыша, а стратегии p и q – это вероятности выбора каждым из игроков первой из двух его чистых стратегий. Имеем:

$$A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q),$$

$$B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q).$$

Эти функции линейны по каждой из переменных – то есть не просто квазивогнуты, но даже вогнуты. Множества стратегий обоих игроков – единичные интервалы: $p, q \in [0,1]$. Следовательно, условия теоремы 1 применимы, а указанный общий метод поиска равновесий Нэша превращается в уже знакомый нам метод поиска смешанных равновесий биматричной игры 2×2.

Пример 7.1. Проиллюстрируем на примере предложенный метод поиска равновесия в непрерывной игре на прямоугольнике. Рассмотрим игру двух лиц $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$. Здесь X, Y − множества стратегий первого и второго игроков, а

$F(x,y)$ и $G(x,y)$ – их функции выигрыша. Пусть множества стратегий игроков одинаковы: $X = Y = [0,1]$, а выигрыши задаются следующими функциями:

$$F(x,y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy,$$
$$G(x,y) = -(x + y - 1)^2.$$

Начнем решение с проверки условий теоремы 6.1. Обе функции вогнуты по «своим» переменным – значит, по крайней мере одно равновесие есть.

Теперь перейдем к поиску равновесий. Найдем функции наилучших ответов игроков на стратегии их соперников. У первого игрока:

$$x^*(y) = \begin{cases} \frac{7}{6}y, \text{если } 0 \le y \le \frac{6}{7} \\ 1, \text{если } y > \frac{6}{7} \end{cases}, \text{ у второго игрока } y^*(x) = 1 - x.$$

Решая систему $\begin{cases} x^*(y) = x \\ y^*(x) = y \end{cases}$, находим решение – равновесие Нэша. На координатной плоскости это решение является точкой пересечения графиков функций наилучших ответов игроков (см. рисунок 7.1).

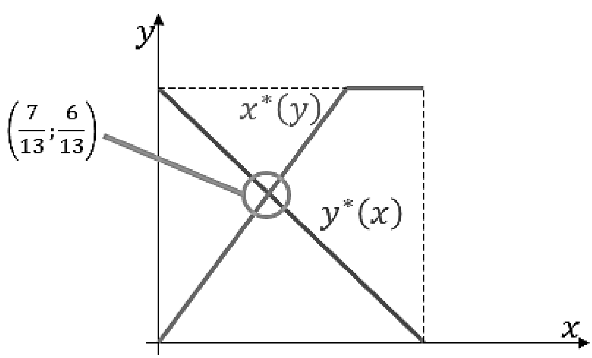


Рисунок 7.1 – Иллюстрация равновесия в примере 7.1

Рассмотрим еще несколько более сложных примеров непрерывных игр – уже не на прямоугольнике, а с неограниченными множествами стратегий двух игроков. Первый такой пример – модель дуополии Курно, с которой некоторые из читателей наверняка сталкивались в рамках курса Микроэкономики. Более того, первой формальной задачей, исследованной с помощью нахождения равновесия, была именно модель конкуренции двух фирм на рынке бесконечно делимого однородного товара, предложенная французским экономистом и математиком А.А. Курно в XIX веке.

Пример 7.2 (модель олигополии Курно)

Рассмотрим некий рынок, на котором работают две фирмы, они выпускают бесконечно делимый товар и продают его покупателям. Пусть x и y − количества товара, выпускаемого первой и второй фирмами, а $c_1, c_2 \geq 0$ − затраты на его производство, т.е. себестоимости единицы товара для обеих фирм. Покупатели предполагаются бесконечно малыми, а цена товара $p(x+y)$ зависит от общего выпуска $x+y$. Объем выпуск товара каждой фирмой есть ее стратегия. В наиболее простой модели предполагается, что у фирм нет производственных или иных ограничений на объем выпуска, так что множества стратегий у них не ограничены: $x, y \in [0, +\infty)$. Функции выигрыша фирм – это прибыль каждой из них от реализации произведенной продукции: $F(x,y) = (p(x+y) - c_1)x$ и $G(x,y) = (p(x+y) - c_2)y$. Пусть цена на продукцию является линейной функцией от общего объема товара, предлагаемого рынку обеими игроками: $p(x+y) = a - b \cdot (x+y)$. Подставив функцию цены (то есть обратную функцию спроса) в выражения для функций выигрыша, получим:

$$F(x,y) = (a - b \cdot (x+y) - c_1)x;$$

$$G(x,y) = (a - b \cdot (x+y) - c_2)y.$$

Мы получили непрерывную игру в нормальной форме, для которой выполнены условия теоремы о существовании равновесия. Следовательно, в ней существует ситуация равновесия, которую мы обозначим (x_0, y_0). В отличие от предыдущего примера, для поиска ее на этот раз применим не отображение наилучшего ответа, а условия первого порядка. Для этого нам потребуется рассмотреть четыре случая.

1. Пусть $x_0 > 0, y_0 > 0$. Тогда условия первого порядка представляют собой просто требования равенства нулю производных обеих функций выигрыша по «своим» аргументам:

$$F'_x(x,y) = a - 2bx_0 - by_0 - c_1 = 0,$$

$$G'_y(x,y) = a - 2by_0 - bx_0 - c_2 = 0.$$

Это система из двух линейных уравнений, которую можно легко решить. Выразим из первого уравнения y_0 и подставим во второе уравнение, получаем:

$$y_0 = \frac{a - 2bx_0 - c_1}{b} = \frac{a}{b} - 2x_0 - \frac{c_1}{b},$$

$$0 = a - 2by_0 - c_2 - bx_0 = a - 2b\left(\frac{a}{b} - 2x_0 - \frac{c_1}{b}\right) - c_2 - bx_0 =$$

$$= a - 2a + 4bx_0 + 2c_1 - c_2 - bx_0 = -a + 3bx_0 + 2c_1 - c_2\,.$$

Отсюда получаем выражение для x_0: $x_0 = \frac{-2c_1 + c_2 + a}{3b}$. Для того, чтобы получить выражение для y_0 необходимо подставить это выражение в первое уравнение. После того, как мы сделаем это и приведем подобные слагаемые, получим: $y_0 = \frac{-2c_2 + c_1 + a}{3b}$. Для завершения рассмотрения данного случая необходимо проверить исполнение условия $x_0 > 0, y_0 > 0$. Имеем: $2c_1 - c_2 - a < 0$, $2c_2 - c_1 - a < 0$, или, что эквивалентно, $c_1 \in \left(2c_2 - a, \frac{c_2 + a}{2}\right)$. Эти условия касаются коэффициентов задачи, если они ему удовлетворяют, то найденное решение системы уравнений дает равновесие Нэша: $\left(\frac{c_2 - 2c_1 + a}{3b}, \frac{c_1 - 2c_2 + a}{3b}\right)$.

2. Пусть $x_0 > 0, y_0 = 0$. В этом случае условия первого порядка примут вид:

$$a - 2bx_0 - by_0 - c_1 = 0,$$

$$a - 2by_0 - bx_0 - c_2 \leq 0.$$

Подставим сюда $y_0 = 0$:

$$a - 2bx_0 - c_1 = 0,$$

$$a - bx_0 - c_2 \leq 0.$$

Из первого уравнения получаем: $x_0 = \frac{a-c_1}{2b}$. Второе условие первого порядка – неравенство, необходимо проверить его выполнение для найденного x_0:

$$0 \geq a - b\frac{a - c_1}{2b} - c_2 = \frac{a + c_1 - 2c_2}{2}.$$

Отсюда получаем: $c_1 \in (0, 2c_2 - a)$ – если коэффициенты модели удовлетворяют этому условию, то равновесие имеет вид $\left(\frac{a-c_1}{2b}, 0\right)$.

3. Пусть $x_0 = 0, y_0 > 0$. Здесь рассуждения аналогичны тем, что приведены в предыдущем пункте. Этот случает приводит к равновесию в рассматриваемой модели, если $c_1 \in \left(\frac{c_2+a}{2}, +\infty\right)$, а получающееся равновесие имеет вид: $\left(0, \frac{a-c_2}{2b}\right)$.

4. Пусть $x_0 = 0, y_0 = 0$. Точка $(0,0)$ может быть равновесием Нэша, только в том случае, когда:

$$a - 2bx_0 - by_0 - c_1 \leq 0,$$

$$a - 2by_0 - bx_0 - c_2 \leq 0.$$

Это приводит нас к паре неравенств: $a - c_1 \leq 0$, $a - c_2 \leq 0$. Иными словами, если предельные издержки обеих фирм относительно высокие ($c_1 \geq a, c_2 \geq a$), то равновесием в модели Курно является ситуация, когда ни одна фирма ничего не производит.

Квазивогнутость функций полезности является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия. Она лишь гарантирует, что хотя бы одно равновесие найдется – однако из того, что у какого-либо игрока функция выигрыша не квазивогнута, не следует, что в игре равновесия нет. Существует большое количество примеров непрерывных игровых моделей, в которых функции выигрыша игроков не квазивогнуты, однако равновесие существует. Один из таких примеров – это игра «Лоббирование», приводимая Захаровым.

Пример 7.3 (модель «Лоббирование»)

Пусть две фирмы соревнуются за право построить магазин на центральной площади города. Чтобы получить контракт, необходимо потратить некоторую сумму денег на лоббирование своего проекта в органах власти. Успех лоббирования не гарантирован, но чем больше денег будет потрачено каждой из фирм, тем больше вероятность, что именно эта фирма получит контракт.

Пусть прибыль, которую может приносить магазин, фиксирована и равна R. Пусть вероятность того, что фирма i = 1,2 получит контракт, равна: $p\_i = \frac{(r_i)^\gamma}{(r_1)^\gamma + (r_2)^\gamma}$, где r_i– стратегия фирмы i – количество средств, потраченное ей, $\gamma \geq 0$ − параметр, отражающий эффективность лоббирования. Таким образом, функция полезности фирмы $i = 1{,}2$ равна:

$$u_i(r_1, r_2) = R\frac{(r_i)^\gamma}{(r_1)^\gamma + (r_2)^\gamma} - r_i.$$

Чтобы найти равновесие, как и в прошлом примере, не будем строить функции наилучших ответов, а воспользуемся условиями первого порядка локального максимума.

Функции полезности являются дифференцируемыми по r_1 и r_2. Соответственно, если точка (r_1, r_2) – равновесие, то в нем должны выполняться необходимые условия первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} = 0, \text{при } r_i > 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_i} < 0, \text{при } r_i = 0 \end{cases}.$$

Производная функции выигрыша для игрока $i = 1,2$ имеет вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = R \frac{\gamma (r_i)^{\gamma-1} (r_{-i})^{\gamma}}{(r_1)^{\gamma} + (r_2)^{\gamma}} - 1.$$

Условия первого порядка дают нам единственное решение (r_1^*, r_2^*), где $r_1^* = r_2^* = \frac{\gamma R}{4}$. Легко проверить, что условия максимума второго порядка в этой точке также будут выполнены. Однако найденная ситуация будет равновесием Нэша только если $\gamma \leq 2$. В обратном случае равновесия не существует: $u_1(r_1^*, r_2^*) = \frac{R}{2} - \frac{\gamma R}{4} < 0 = u_1(0, r_2^*)$, то есть первому игроку выгодно в одностороннем порядке изменить свою стратегию с r_1^* на 0. Если $\gamma > 0$, то (r_1^*, r_2^*) является всего лишь локальным равновесием – то есть в этой точке функция полезности каждого игрока имеет локальный (но не обязательно глобальный) максимум на множестве стратегий этого игрока.

Почему же равновесие есть в рассматриваемой модели не всегда? Потому что функции полезности являются квазивогнутыми только при $\gamma \in [0,1]$, а при $\gamma \in (1,2]$ – нет. Примерный вид графика функций полезности игроков приведен на рисунке 7.2, наглядно показывающем их качественно различных вид при различных значениях параметра γ.

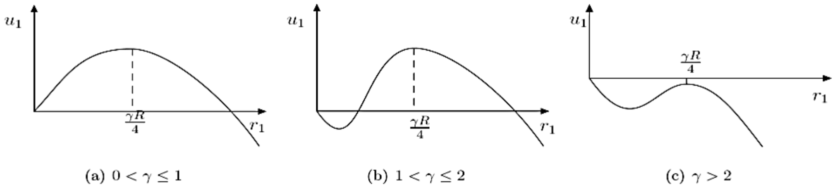


Рисунок 7.2 – Модель «Лоббирование»: качественный вид графика функции выигрыша в зависимости от параметра γ

Здесь мы четко видим три области для параметра γ, в которых картина «происходящего» в модели принципиально различная. Так, при $\gamma \in [0, 1]$ функции выигрыша игроков квазивогнуты, точнее, даже строго вогнуты – что дает единственное равновесие в точке $r_1^* = r_2^* = \frac{\gamma R}{4}$. При $\gamma \in (1, 2]$ функции выигрыша теряют свойство квазивогнутости, однако локальное равновесие по-прежнему существует. При $\gamma > 2$ в игре не существует равновесия.

Обратим внимание, что найденное равновесие в теоретико-игровой модели дает дам довольно много пищи для размышлений над экономическим смыслом всей модели. Так, при борьбе за благо оба игрока тратят значительные ресурсы. Например, при $\gamma = 1$, что соответствует обычной лотерее, общий объем затрачиваемых ресурсов будет равен половине от стоимости блага. Кроме того, можно показать, что при увеличении числа игроков общий объем затрат на лоббирование стремится к ценности самого блага, за которое ведется борьба (R в нашей модели), а объем ресурсов, затрачиваемых на состязательную деятельность, возрастает при улучшении технологии лоббирования (величины γ).

Проведенный анализ показывает, что при отсутствии прозрачных механизмов распределения лицензий на ведение многих прибыльных видов экономической деятельности (импортные квоты, строительство в условиях ограниченного предложения земли и т.д.) общество несет значительные (и часто невидимые) потери.

8. Игровые модели, учитывающие неравенство игроков. Информационная асимметрия: иерархические игры

Во всех предыдущих случаях мы рассматривали игры, в которых игроки принимали решения одновременно и не зная о выборе своих соперников. Однако в ряде случаев такое допущение оказывается неверным – часто игроки принимают решения последовательно, и к моменту принятия решения очередным индивидом уже известно, как повели себя те, кто уже «сделал ход». Многие реальные конфликтные ситуации имеют длительный характер. Их участники действуют последовательно и с учетом информации о предшествующем развитии конфликта. Таким образом, это приводит к необходимости построения игровых моделей, учитывающих последовательность принятия решений игроками, а также информационную асимметрию. В теории игр для этого используются различные модели с «неравенством» игроков – как в смысле различной очередности хода, так и в смысле разной степени осведомленности о поведении их соперников.

Первый класс подобных теоретико-игровых моделей, который нам предстоит рассмотреть,– это **иерархические игры.** В этом разделе мы рассмотрим игры двух лиц, в которых игроки прежде, чем выбрать стратегии $x \in X, y \in Y$, предварительно обмениваются информацией о своих выборах. Такого рода игры описывают взаимодействие между верхним и нижним звеньями управления (начальником и подчиненным, центром и производителем продукции и т.п.). Далее, не ограничивая общности, предполагается, что первый игрок осуществляет управление вторым игроком и делает сообщение первым. Для более краткого описания таких схем взаимодействия будем дальше использовать краткий вариант записи, просто называя первого игрока «игрок-лидер», а второго – «игрок-ведомый».

В основе любой иерархической игры лежит статическая игра в нормальной форме $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$. Это может быть как биматричная игра, так и непрерывная, при этом функции

$F(x, y)$ и $G(x, y)$ непрерывны на произведении $X \times Y$ компактов метрических пространств. Прежде, чем выбрать стратегию, первый игрок сообщает о своем выборе второму. Нас интересует наилучший гарантированный результат, который может получить игрок-лидер. Типы иерархических игр отличаются порядком ходов и формой сообщений.

Первый важный пример иерархических игр – Игра Γ_1. Игрок-лидер выбирает стратегию $x \in X$ и сообщает ее ведомому. Затем ведомый выбирает стратегию $y \in Y$, уже зная x. Смысл подобных сообщений очевиден в тех случаях, когда интересы игроков близки. Например, если вы решили с кем-нибудь встретиться, то сообщаете, куда придете (вспомните, например, игру «Встреча в городе» или «Семейный спор»). Игра Γ_1 является неантагонистической одношаговой игрой с полной информацией. Подобные игры могут иметь и несколько вариантов экономической интерпретации. Одна из них: игрок-лидер (центр) сообщает ведомому игроку (производителю продукции) цену x на продукцию. Второй игрок выпускает продукцию в количестве y, зная цену x. Еще один вариант применения игры Γ_1 в математической экономике – классическая микроэкономическая модель дуополии Штакельберга, в которой действует фирма-лидер, первой определяющая объем выпуска товара, и фирма-ведомая, которая выбирает стратегию уже после нее – и работает, по сути, с остаточным спросом на товар.

Игру Γ_1 можно записать и в привычной нам нормальной форме. Второй игрок использует стратегии-отображения вида $g: X \to Y$, по своему смыслу являющиеся функциями реакции на стратегию игрока-лидера. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{g\}$. Тогда $\Gamma_1 = \langle X, \{g\}, F(x, g), G(x, g) \rangle$, где $F(x, g) = F(x, g(x))$, $G(x, g) = G(x, g(x))$ – функции выигрыша игроков в «базовой» игре, где на место стратегии второго игрока подставлена функция реакции второго игрока на стратегию первого.

Найдем наилучший гарантированный результат F_1 первого игрока в игре $Г_1$. Так как все игроки преследуют цель максимизации собственного выигрыша, ведомый игрок, зная x, выбирает $y \in Y(x) = \mathrm{Argmax}_{y \in Y} G(x, y)$ – произвольную стратегию из своего множества наилучшего ответа на этот x (если таких стратегий несколько, то все они должны давать одинаковый выигрыш, поэтому можно выбрать любую из них). Первый игрок знает функцию выигрыша второго игрока, ему также известно, что второй будет выбирать стратегию из множества $Y(x)$, но он не знает конкретного выбора $y \in Y(x)$. Для того, чтобы оценить эффективность стратегии x, игрок-лидер должен найти свой наименьший выигрыш при использовании ведомым наилучшего с его точки зрения ответа на эту стратегию: $W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$. Эта величина называется оценкой эффективности (гарантированным результатом) стратегии x. Тогда наилучший гарантированный результат игрока-лидера – это максимальное значение выигрыша, которого он может добиться, управляя своими стратегиями. Иными словами, это максимальная оценка эффективности среди его стратегий:

$$F_1 = \max_{x \in X} \quad W(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y).$$

Другой тип иерархических игр – это игра типа Γ_2. Первый игрок перед выбором x имеет полную информацию об y. Он ходит первый и сообщает второму игроку стратегию вида $f: Y \to X$. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{f\}$.

Схема сообщений в игре Γ_2: $f \overset{2}{\to} y \overset{1}{\to} x = f(y)$. Экономическая интерпретация такой игры может быть следующей. Представим себе некое предприятие, разделенное на две структурных единицы – управляющую компанию (центр) и производство (завод). Тогда можно интерпретировать y как объем продукции, произведенной заводом, а стратегию центра $f(y)$ – как схему оплаты управляющей компанией произведенного объема продукции y.

Найдем выражение для наилучшего гарантированного результата F_2 первого игрока в игре Γ_2. Предположим, что ведомый игрок, зная f, выбирает y из множества $Y(f) = \mathrm{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y)$ – множества тех стратегий, которые максимизируют его выигрыш при условии, что игрок-лидер, зная стратегию y, сыграет $x = f(y)$. Множество $Y(f)$ может оказаться пустым, если функция f разрывна. В случае пустого $Y(f)$ второй игрок может выбрать любую стратегию $y \in Y$. Определим множество наилучшего ответа второго игрока на стратегию $f(\cdot)$ первого:

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), Y(f) \neq \emptyset \\ Y, Y(f) = \emptyset \end{cases}.$$

В сделанных предположениях второй игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии f для игрока-лидера задается формулой $W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y)$. Наилучший гарантированный результат первого игрока – это точная верхняя грань множества оценок эффективности доступных ему стратегий, она имеет вид

$$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Поскольку на этот раз, в отличие от предыдущих, мы имеем дело не с оптимизацией на компактах числовой природы, а с поиском супремумов и инфимумов на множествах функций, то наилучший гарантированный результат, вообще говоря, может не достигаться вовсе. Тем не менее, как читатель должен помнить из курса математического анализа, мы всегда можем приблизиться к точным граням множества с любой наперед заданной точностью. Это означает, что, несмотря на возможную недостижимость оптимальной стратегии, мы всегда можем найти «почти оптимальную».

Определение 8.1. *Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия f_ε называется ε-оптимальной в игре Γ_2, если $W(f_\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$.*

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве функций $\{f\}$. Однако Юрием Борисовичем Гермейером был получен замечательный результат, который позволяет для поиска наилучшего гарантированного результата ведущего игрока оптимизацию по исходным множествам X и Y.

Для того, чтобы сформулировать этот результат, потребуются следующие величины и множества:

- $G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$ – наилучший гарантированный результат второго игрока при условии, что первый применяет стратегию «наказания» $f^H: f^H(y) \in \operatorname{Arg} \min_{x \in X} G(x, y)$, которая на любую стратегию $y \in Y$ второго игрока предписывает отвечать так, чтобы минимизировать его выигрыш;
- $E = \operatorname{Arg} \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$ – множество максиминных стратегий второго игрока;
- $D = \{(x, y) \in X \times Y | G(x, y) > G_2\}$ – множество ситуаций в игре, в которых второй игрок может получить больше, чем наилучший гарантированный результат;
- $M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$ – гарантированный результат первого игрока;
- $K = \begin{cases} \sup_{(x,y)} F(x, y), D \neq \emptyset \\ -\infty, D = \emptyset \end{cases}.$

Теорема 8.1 (Ю.Б. Гермейер). *Наилучший гарантированный результат в игре Γ_2 равен $F_2 = max\{K, M\}$.*

Доказательство данной теоремы носит конструктивный характер, то есть его процесс совпадает с процессом построения решения. Так, найдем стратегию, дающую игроку-лидеру наилучший гарантированный результат. Всего возможно два случая:

1. $K > M$. Найдется пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D$, такая, что $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. Положим

$$f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, y = y^\varepsilon \\ f^H(y), y \neq y^\varepsilon \end{cases}.$$

Если первый игрок будет играть эту стратегию, то для второго единственным «выгодным» вариантом остается выбрать $y = y^\varepsilon$, ведь в противном случае он получит $G(f^H(y), y) = \min_{x\in X} G(x, y) \leq G_2 < G(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – что значительно меньше наилучшего гарантированного результата.

2. $K \leq M$. В этом случае рассмотрим для первого игрока стратегию

$$f^\varepsilon(y) = \begin{cases} \arg\max\limits_{x\in X} F(x, y), y \in E \\ f^H(y), y \notin E \end{cases}.$$

Аналогично предыдущему случаю, если первый игрок будет играть эту стратегию, то для второго единственным «выгодным» вариантом остается выбрать $y \in E$, ведь в противном случае он опять будет «наказан» первым игроком и получит $G(f^H(y), y) = \min_{x\in X} G(x, y) \leq G_2 < G(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – что значительно меньше наилучшего гарантированного результата. ■

Рассмотрим на примерах, как можно искать решения иерархических игр. Как уже говорилось, иерархическая игра строится на основе игры в нормальной форме. Рассмотрим биматричную игру с матрицами выигрышами:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решим для нее игры Γ_1 и Γ_2. Первую из них – Γ_1 – будем решать по определению наилучшего гарантированного результата:

$$F_1 = \max_{x\in X} \min_{y\in Y(x)} F(x, y) = \max_{i=1,2,3} \min_{j\in J(i)} a_{ij}.$$

Найдем множество $J(i)$ наилучших ответов второго (ведомого) игрока на стратегию i игрока-лидера: $J(i) = Arg\max_{j=1,2,3} b_{ij}$. Для первой стратегии первого игрока во множество $J(1)$ войдут номера столбцов, где стоят наибольшие элементы в первой строке ($i = 1$) матрицы B: $J(1) = Arg\max_{j=1,2,3} b_{1j} = Arg\max\{7,4,3\} = \{1\}$. Аналогично получаем и $J(2) = \{1,2\}$, и $J(3) = \{2,3\}$. Используя найденные множества, найдем оценки эффективности для каждой из стратегий игрока-лидера:

$$W(1) = \min_{j\in J(1)} a_{1j} = \min_{j\in\{1\}} a_{1j} = a_{11} = 3;\ W(2) = \min_{j\in J(2)} a_{2j} = \min_{j\in\{1,2\}} a_{2j} = \min\{4,3\} = 3;\ W(3) = \min_{j\in J(3)} a_{3j} = \min_{j\in\{2,3\}} a_{3j} = \min\{-5,-1\} = -5.$$

В результате наилучший гарантированный результат игрока-лидера равен $F_1 = \max\{3,3,-5\} = 3$, а реализуют его сразу две стратегии– $i_0 = 1, 2$.

Далее, для той же биматричной игры найдем наилучший гарантированный результат лидера в игре Γ_2. Для этого воспользуемся теоремой Ю.Б. Гермейера. Найдем фигурирующие в ней величины K и M, а для этого нам нужно определить «промежуточные» величины. Начнем с наилучшего гарантированного результата второго игрока при условии, что первый применяет стратегию «наказания» (т.е. ставит себе задачу не максимизировать свой выигрыш, а минимизировать выигрыш соперника):

$$G_2 = \max_{1\le j\le 3}\min_{1\le i\le 3} b_{ij} =$$
$$= \max\left\{\min\{b_{11}, b_{21}, b_{31}\}, \min\{b_{12}, b_{22}, b_{32}\}, \min\{b_{13}, b_{23}, b_{33}\}\right\} =$$
$$= \max\left\{\min\{7,7,4\}, \min\{4,7,6\}, \min\{3,3,6\}\right\} = \max\{4,4,3\} = 4.$$

Стратегии, которые обеспечивают ведомому игроку этот результат, формируют множество $E = \mathrm{Arg}\max_{1\le j\le 3} \min_{1\le i\le 3} b_{ij} = \{1,2\}$. Далее необходимо найти множество $D_2 = \left\{(i,j)|b_{ij} > G_2\right\}$ тех исходов игры, которые дают второму игроку результат, превосходящий наилучший гарантированный. Таких ситуаций довольно много, отметим в матрицах выигрыша соответствующие элементы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Величина K представляет собой наибольший выигрыш игрока-лидера в этих ситуациях: $K = \max_{(i,j)\in D} a_{ij} = 4$. Последняя из величин, фигурирующих в условии теоремы Гермейера,– это величина $M = \min_{j\in E} \max_{1\le i\le 3} a_{ij} = \min_{1\le j\le 2} \max_{1\le i\le 3} a_{ij} = 6$. Так как, согласно этой теореме, $F_2 = \max\{K, M\} = \max\{4{,}6\} = 6$. Задача решена!

В следующем примере применим аналогичные подходы для поиска наилучшего гарантированного результата игрока-лидера в иерархических играх Γ_1 и Γ_2 для непрерывной «базовой» игры: $X = Y = [0{,}1], F(x,y) = \frac{3x}{4} + \frac{y}{2}, G(x,y) = (x-y)^2$.

Начнем с решения игры Γ_1: $F_1 = \max_{x\in X} \min_{y\in Y(x)} F(x,y)$. Найдем множество наилучших ответов ведомого: $Y(x) =$ $= \mathrm{Arg}\max\limits_{y\in[0,1]} (x-y)^2$. Для того, чтобы найти для каждого возможного x максимальное значение функции выигрыша второго игрока, обратим внимание на ее вид: это квадратичная функция, ее график – это парабола с ветвями вверх и вершиной в $y = x$ (см. рисунок 8.1).

Максимум этой функции достигается на одном из концов отрезка [0,1]:

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \{0;1\}, x = \dfrac{1}{2} \\ \{0\}, \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}.$$

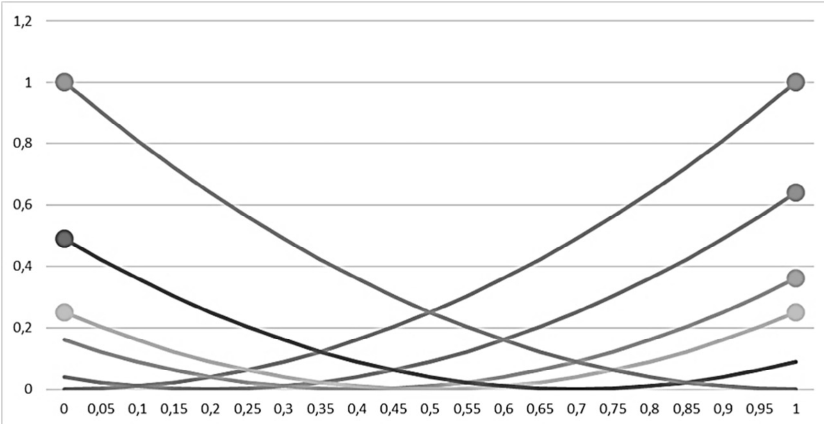


Рисунок 8.1 – Игра Γ_1: множество наилучших ответов ведомого игрока, в зависимости от стратегии лидера, равно $\{0\}$ (если $x < \frac{1}{2}$), $\{0; 1\}$ (если $x = \frac{1}{2}$) или $\{1\}$ (если $x > \frac{1}{2}$) (наилучшие стратегии отмечены жирными точками)

Оценка эффективности стратегий игрока-лидера, таким образом, имеет вид:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2} \right) = \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \min\left\{ \frac{3x}{4}; \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{3x}{4}, x = \frac{1}{2} \\ \frac{3x}{4}, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}.$$

На рисунке 8.2 приведен ее график.

Мы видим, что оценка эффективности стратегий игрока-лидера является разрывной функцией, и ее точная верхняя грань $F_2 = \frac{7}{8}$ на множестве его стратегий не достигается. Максимум, что мы можем сделать – это указать ε-эффективную стратегию, с точностью ε аппроксимирующую оптимальную стратегию: $x_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{4\varepsilon}{3}$.

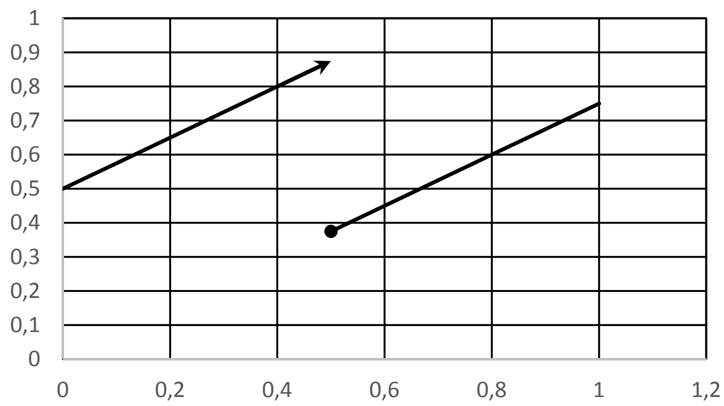


Рисунок 8.2 – Игра Γ_1: график функции оценки эффективности стратегий игрока-лидера

Теперь решим игру Γ_2 для той же базовой игры. Наилучший гарантированный результат ведомого:

$$G_2 = \max_{y\in[0,1]} \min_{x\in[0,1]} (x-y)^2 = 0,$$

а множество D ситуаций, дающих ведомому больший выигрыш, имеет вид: $D = \{(x,y)|G(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] | x \neq y\}$. Множество $E = [0,1]$, а величина $M = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Осталось найти $K = \sup_{(x,y)\in D} F(x,y) = \sup_{x\neq y} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{5}{4} > \frac{3}{4} = M$. Именно эта величина и дает оценку наилучшего гарантированного результата игрока-лидера, однако, как и в случае игры Γ_1, она не достигается (реализующая ее ситуация $(1,1) \notin D$). При этом можно указать ε-оптимальную ситуацию $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = \left(1 - \frac{4\varepsilon}{3}, 1\right)$, реализовать которую игрок-лидер может, используя стратегию вида:

$$f_\varepsilon(y) = \begin{cases} x_\varepsilon, y = y_\varepsilon \\ y, y \neq y_\varepsilon \end{cases}.$$

Это стратегия «принуждает» ведомого игрока использовать именно ту стратегию, которая «нужна» лидеру (то есть y_ε) – потому что в том случае, если он попытается использовать какую-либо иную стратегию, ответом на нее будет $f_\varepsilon(y) = y$, снижающая его выигрыш до минимума.

Помимо абстрактных игровых взаимодействий двух неравных партнеров, иерархические игровые модели находят применение и в микроэкономике. Так, классическая модель дуополии Штакельберга, по сути, представляет собой иерархическую игру типа Γ_1 между двумя фирмами-дуополистами на рынке одного товара. Модель Штакельберга предполагает лидерство по объему выпуска. Предположим, что фирма 1 – лидер и что она решает производить объем выпуска y_1. Фирма 2 в ответ на это выбирает объем выпуска y_2. По сути, для модели Штакельберга «базовой» стационарной игрой является модель дуополии Курно.

Как и в примере модели Курно в предыдущем разделе, рассмотрим рынок бесконечно делимого товара, на котором работают две фирмы. Как и раньше, обозначим $x, y \in [0, +\infty)$ количества товара, выпускаемого первой и второй фирмами соответственно, а $c_1, c_2 \geq 0$ − себестоимости единицы товара для обеих фирм. Пусть спрос является линейным, а предельные издержки обеих фирм одинаковы: $c_1 = c_2 = c$. Кроме того, дополнительно будем предполагать, что $a \geq c$ (в противном случае фирме-ведомой невыгодно было бы производить какой-либо положительный объем товара). Функции выигрыша фирм – это прибыль каждой из них от реализации произведенной продукции: $F(x, y) = (a - b(x + y) - c)x$; $G(x, y) = (a - b(x + y) - c)y$.

По определению решения игры Γ_1, наилучший гарантированный результат лидера: $F_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$. Найдем множество наилучших ответов ведомого:

$$Y(x) = \mathrm{Arg} \max_{y \in [0, +\infty)} (a - b(x + y) - c)y.$$

Максимизируемая прибыль ведомого игрока – это квадратичная функция, ее график – это парабола с ветвями вниз, следовательно, ее максимум достигается либо в вершине (экстремум, точка нуля производной), либо в точке $y = 0$ (условия первого порядка). Найдем производную прибыли ведомого:

$$\frac{\partial}{\partial y}(a - b(x + y) - c)y = a - 2by - bx - c.$$

Приравняем ее к нулю, найдем экстремум: $a - 2by - bx - c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a-bx-c}{2b}$. Это условие дает нам наилучший результат ведомого тогда и только тогда, когда $a - bx - c \geq 0$, то есть при $x \leq \frac{a-c}{b}$. Для x, б**о**льших порогового значения $\frac{a-c}{b}$, наилучший ответ ведомого – ноль. Таким образом, мы нашли $Y(x)$ – так как функция выигрыша ведомого игрока строго вогнутая, оно для любой стратегии ведущего игрока состоит только из одного элемента:

$$Y(x) = y(x) = \begin{cases} \dfrac{a - bx - c}{2b}, x \leq \dfrac{a - c}{b} \\ 0, x > \dfrac{a - c}{b} \end{cases}.$$

Так как это множество состоит только из одного элемента, то оценка эффективности любой стратегии ведущего игрока можно получить, просто подставив $y = y(x)$ в его прибыль:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y) = F\big(x, y(x)\big).$$

Имеем: $W(x) = \begin{cases} \left(a - b\left(x + \frac{a-bx-c}{2b}\right) - c\right)x, x \leq \frac{a-c}{b} \\ (a - bx - c)x, x > \frac{a-c}{b} \end{cases}.$

Преобразуем это выражение:

$$W(x) = \begin{cases} (a - bx - c)\dfrac{x}{2}, x \leq \dfrac{a - c}{b} \\ (a - bx - c)x, x > \dfrac{a - c}{b} \end{cases}.$$

Максимум функции $W(x)$ достигается в точке $x = \frac{a-c}{2b}$, и этой точке соответствует выигрыш фирмы лидера, равный $\left(\frac{a-c}{2}\right)\frac{a-c}{4b} = \frac{(a-c)^2}{8b}$ – это и есть его наилучший гарантированный результат. Таким образом, используя модель иерархической игры Γ_2, мы проанализировали модель дуополии Штакельберга.

Замечание. Полезно сравнить полученные результаты с моделью дуополии Курно. Воспользуемся полученным ранее результатом для равновесия Нэша в модели Курно, положив $c_1 = c_2 = c$. Если $c < a$, то равновесие симметричное, и равновесные стратегии обеих фирм (которые в этом случае равноправны) имеют вид $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$. Прибыли фирм также равны между собой и составляют $\frac{(a-c)^2}{9b}$. В модели Штакельберга прибыль фирмы-лидера равна $\frac{(a-c)^2}{8b}$, а объем выпуска– $\frac{a-c}{2b}$ (и то, и другое больше, чем в модели Курно), прибыль ведомой фирмы $\frac{(a-c)^2}{16b}$, а ее объем производства – $\frac{a-c}{4b}$ (и то, и другое больше, чем в модели Курно). При этом общий объем производства в модели Штакельберга выше, чем в модели Курно: $\frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$ против $\frac{2}{3}\frac{a-c}{b}$.

9. Позиционные игры с полной информацией

Многие реальные конфликтные ситуации имеют длительный характер. Их участники действуют неоднократно и с учетом информации о предшествующем развитии конфликта. Очевидно, что для моделей подобных взаимодействий общие теоремы существования решения для игр в нормальной форме не позволяют находить или даже конкретизировать оптимальное поведение из-за большого числа возможных стратегий.

Для решения динамических игр с конечным числом игроков часто удобно использовать позиционное представление игры. Наиболее простым классом позиционных игр является класс конечношаговых позиционных игр с полной информацией. В такой игре на каждом шаге игры делает ход лишь один игрок, имеющий полную информацию о текущем состоянии, всех происходящих действиях и общей структуре игры. Это предположение обычно характеризуется как полная информация. Хорошо известными примерами таких игр являются шашки и шахматы.

Позиционное представление игры означает, что все взаимодействие записывается в виде конечного ориентированного графа – дерева, вершины (узлы) которого соответствуют ситуациям, в которых течение игры может измениться. Более конкретно, вершины дерева – это либо ситуации принятия решения каким-либо одним игроком, либо ситуации, когда течение игры может измениться из-за каких-либо неподконтрольных игрокам факторов, обобщенно называемых Природой. Наконец, листьям дерева – финальным вершинам – соответствуют исходы игры, когда взаимодействие игроков завершено и определяются их итоговые выигрыши.

В качестве примера рассмотрим динамическую модификацию игры «Обман на рынке», которая впервые упоминалась еще в самом начале учебного пособия (пример 3.1). Покупатель приходит на рынок за яблоками. Продавец, торгующий яблоками, использует пружинные весы и может либо честно взвесить для покупателя 1 кг яблок, либо подкрутить пружинку и обвесить его (стратегии «честность» и «обман»). Покупатель также имеет две стратегии – поверить продавцу или проверить результат взвешивания на контрольных весах. Выигрыши игроков записываются в виде матриц[10]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть покупатель способен заметить, обвешивает его продавец или нет, и принять решение о своем поведении, уже зная стратегию продавца. Иными словами, в рассматриваемой игре возникает последовательность ситуаций принятия решения – и можно изобразить в виде дерева процесс взаимодействия покупателя и продавца:

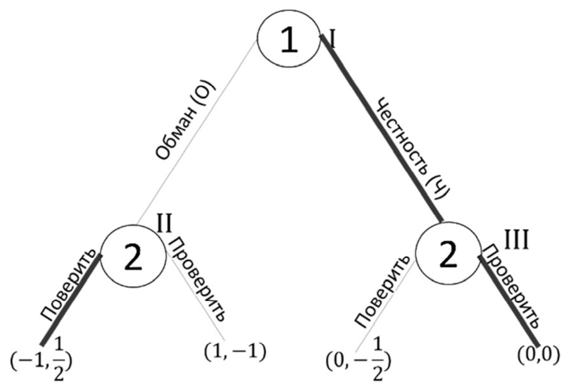


Рисунок 9.1 – Дерево игры для позиционного варианта игры «Обман на рынке»

Такая запись очень удобна для записи игр с конечным количеством ходов. Взаимодействие стартует в вершине дерева под

---

[10] Внимательный читатель может заметить, что эти матрицы немного отличаются от приводившихся в начале пособия: по сравнению с первым появлением рассматриваемой модели, они поменялись местами и были транспонированы. Это произошло из-за того, что теперь мы рассматриваем в качестве игрока 1 продавца, а в качестве игрока 2 – покупателя.

номером I (договоримся обозначать вершины деревьев римскими цифрами), где решение принимает игрок 1 (продавец, его номеру соответствует число в вершине). У него есть две стратегии, каждой из которых соответствует свое ребро, ведущее из данной вершины в следующую. Выбор им той или иной стратегии приводит к тому, что взаимодействие перемещается по соответствующему ребру к следующей ситуации принятия решения. Таким образом, описываются все возможные ситуации в виде узлов (т.е. нефинальных вершин) дерева. Когда возможности для выбора у игроков исчерпаны, их взаимодействие заканчивается и определяются выигрыши. Таким ситуациям соответствуют листья дерева – финальные вершины, из которых не исходит ни одного ребра. Каждая финальная вершина соответствует одному профилю стратегий – исходу игры, ей приписываются выигрыши игроков при таком исходе.

Интуитивно понятно, что рациональным поведением покупателя и продавца является выбор стратегий, соответствующих отмеченным ребрам. Однако для того, чтобы понять, почему это на самом деле так и определить в целом, что значит «решить позиционную игру», необходимо произвести строгую математическую формализацию понятия позиционной игры, подобно тому, как это делается при построении игры в нормальной форме.

Сначала приведем определение конечного ориентированного дерева – как основного объекта, описывающего процесс взаимодействия игроков и их иерархию. Классическое определение дерева в теории графов следующее (оно интуитивно понятно).

> ***Определение 9.1.*** *Ориентированное дерево – это ориентированный граф, не содержащий циклов, в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в нее не ведут дуги), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведет ровно по одной дуге). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются концевыми вершинами или листьями.*

Нам это определение понадобится в несколько измененном виде.

Определение 9.2. *Конечным деревом называется пара* $\langle X, \sigma \rangle$*, где* X *– конечное множество вершин,* $\sigma: X \to X$ *– отображение, которое сопоставляет каждой вершине ее ближайшего предшественника, причем:*

- *существует единственная начальная вершина* x_0*, такая, что* $\sigma(x_0) = x_0$ *(ей не предшествует никакая друга);*
- *существует целое* l*, такое, что* $\sigma^{-1}(x) = x_0$ *для всех* $x \in X$.

Второе условие, по сути, является требованием конечности дерева, так как минимальное из чисел l, удовлетворяющих указанному требованию, является *высотой* дерева, то есть количеством ярусов в нем.

Любая вершина x, для которой $\sigma^{-1}(x) = \emptyset$, называется *финальной вершиной*. Множество таких вершин обозначается через T. А для любой нефинальной вершины (*позиции*) x множество $\sigma^{-1}(x)$ представляет собой совокупность последующих за ней вершин. Ребра дерева $\langle X, \sigma \rangle$ называются *альтернативами*.

Теперь можно ввести определение позиционной игры с полной информацией.

Определение 9.3. *Позиционной игрой с полной информацией называется следующая совокупность:*

$$G = \langle A; \langle X, \sigma \rangle; \quad u^a(x), x \in T, a \in A; \quad X \backslash T = \bigcup_{a \in A} X^a; \quad \forall x \in$$
$$\in X^0 \exists p(x'|x), \quad x' \in \sigma^{-1}(x) \rangle.$$

Как и в случае с игрой в нормальной форме, позиционная игра с полной информацией есть совокупность нескольких разнородных элементов:

- $A = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков,
- $\langle X, \sigma \rangle$ – конечное дерево с начальной вершиной x_0 и множеством $T = \{x | \sigma^{-1}(x) = \emptyset\}$ финальных вершин;
- множество $X \backslash T$ – множество нефинальных вершин, на котором задано разбиение $R = \{X^0, X^1, \dots, X^n\}$ на попарно непересекающиеся множества:
  - $X^a, a \in A$ – множество позиций, в которых делает ход игрок a,
  - X^0 – множество позиций, в которых делает ход случай, для каждого x из этого множества заданы вероятности $p(x'|x) > 0$, $\sum_{x' \in \sigma^{-1}(x)} p(x'|x) = 1$ перехода из позиции x в позиции $x' \in \sigma^{-1}(x)$.
- $u^a: T \to R$ – функция выигрыша игрока a.

Разбиение $R = \{X^0, X^1, \dots, X^n\}$ описывает, кто именно принимает решение в каждой из нефинальных вершин – либо это будет игрок $a \in A$ (для вершин $x \in X^a$), либо случай (для вершин $x \in X^0$). Если корень x_0 дерева, согласно разбиению, попал в множество X^a, то игра начинается с выбора игроком a какой-либо из следующих за x_0 вершин, например, $x_1 \in \sigma^{-1}(x_0)$. Если x_1 оказался финальной вершиной (листом дерева), то игра окончена, а игроки получают выигрыши в размере $u^a(x_1), a \in A$. Если же x_1 – нефинальная вершина, то игра продолжается дальше. Решение принимает игрок b, для которого $x_1 \in X^b$, он выбирает следующую за x_1 вершину $x_2 \in \sigma^{-1}(x_1)$ и т.д. Если же в какой-то момент мы попадаем в вершину $x \in X_0$, где делает ход случай, то с вероятностью $p(x'|x)$ мы переходим к одной из вершин $x' \in \sigma^{-1}(x)$, в которой продолжаем действовать способом, описанным выше. Если игрок a в вершине $x \in X^a$ выбирает вершину $x' \in \sigma^{-1}(x)$, то будем говорить, что он выбирает соответствующую альтернативу – ребро дерева, соединяющего вершины x и x'.

Рассмотрим дерево, изображенное на рисунке 9.2:

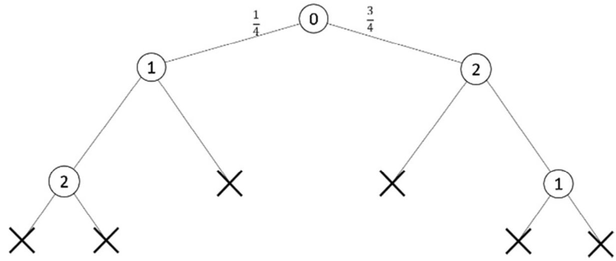


Рисунок 9.2 – Пример дерева позиционной игры

В нем крестиками отмечены финальные вершины, в корне дерева делает ход случай, а в остальных вершинах – игроки, при этом каждая вершина помечена номером игрока, принимающего в ней решение. Очевидно, что для определения хода игры необходимо, чтобы для каждой вершины, где ход принадлежит игроку, было определено, куда он перейдет дальше. Это приводит к необходимости формализации стратегий игроков.

Определение 9.4. *Стратегия игрока* $a \in A$ *– это отображение* μ^a*, определяющее для каждой вершины* $x \in X^a$ *позицию, в которую он перейдет:* $\forall x \in X^a \ \mu^a(x) \in \sigma^{-1}(x)$. *Множество всех стратегий игрока а обозначим через* $\{\mu^a\}$.

Набор стратегий $\mu = \{\mu^a, a \in A\}$ называется профилем стратегий или ситуацией. Для каждого $x \in X$ в любой ситуации μ можно определить вероятность $p(x|\mu)$ прихода в эту позицию x. При этом $p(x_0|\mu) = 1$ для любого допустимого μ – так как игра всегда начинается из вершины дерева. Зная стратегии каждого из игроков, мы можем для любой вершины (неважно, терминальной или «промежуточной») определить вероятность прихода в нее, для этого используется следующая формула.

Для каждого $x \in X$ вероятность прихода $p(x|\mu)$ в вершину x определяется рекуррентно: $p(x|\mu) = p(\sigma(x)|\mu) \cdot p(x|\sigma(x), \mu)$, где $p(\sigma(x)|\mu)$ – вероятность прихода в вершину-предшественник x, а $p(x|\sigma(x), \mu)$ – вероятность перехода из этого предшественника в x. Эта вероятность определяется по-разному для вершин, где ходит случай, и вершин, где ход принадлежит игроку. Если в вершине $\sigma(x)$ ходит игрок $a \in A$ ($\sigma(x) \in X^a$), то вероятность перейти из $\sigma(x)$ в x определяется стратегией этого игрока:

$$p(x|\sigma(x), \mu) = \begin{cases} 1, \text{если } \mu^a\big(\sigma(x)\big) = x \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases} \quad 9.1$$

То есть, если стратегия μ^a предписывает игроку a выбрать в вершине $\sigma(x)$ альтернативу, ведущую в x, то вероятность такого перехода равна единице (детерминированный переход), в противном случае вероятность нулевая. При это, как уже говорилось, $p(x_0|\mu) = 1$ для любого допустимого μ. Если же $\sigma(x) \in X^0$ – то есть в предшествующей x вершине ходит случай – то вероятность перехода в нее определяется в соответствии с вероятностями выбора альтернатив, заданными для этой вершины, и не зависят от стратегий игроков: $p(x|\sigma(x), \mu) = p\big(x\big|\sigma(x)\big)$.

Проиллюстрируем на примере, как определить вероятность попадания в любую вершину дерева позиционной игры. Рассмотрим игру, задаваемую деревом:

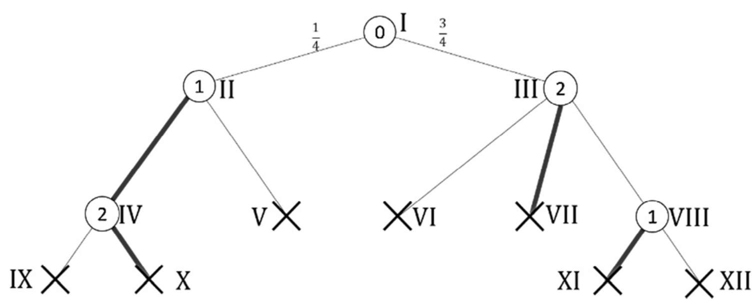


Рисунок 9.3 – Дерево позиционной игры с пронумерованными вершинами и выделенными ребрами (альтернативами), соответствующими профилю стратегий $\tilde{\mu} = \big((\mu^1_{II}, \mu^1_{VIII}), (\mu^2_{III}, \mu^2_{IV})\big) = \big((\text{Л}, \text{Л}), (\text{Ц}, \text{П})\big)$

Все вершины в этом дереве пронумерованы римскими цифрами, а выделенные ребра (альтернативы) соответствуют профилю стратегий $\tilde{\mu} = \left(\left(\mu^1_{\mathrm{II}}, \mu^1_{\mathrm{VIII}}\right), \left(\mu^2_{\mathrm{III}}, \mu^2_{\mathrm{IV}}\right)\right) = \left((\text{Л}, \text{Л}), (\text{Ц}, \text{П})\right)$. Стратегия первого игрока здесь – это пара $\left(\mu^1_{\mathrm{II}}, \mu^1_{\mathrm{VIII}}\right) = (\text{Л}, \text{Л})$, то есть в вершине II первый игрок выбирает левую альтернативу, и в вершине VIII – также левую. У второго игрока стратегия $\left(\mu^2_{\mathrm{III}}, \mu^2_{\mathrm{IV}}\right) = (\text{Ц}, \text{П})$: в вершине III он выбирает «центральную» альтернативу, а в вершине IV – идет «направо». Таким образом, стратегии каждого игрока описывают выбираемые им альтернативы в каждой из вершин, где он делает ход – вне зависимости от того, попадет ли он в нее на самом деле или нет.

Определим вероятности попадания в каждую вершину дерева. Корнем дерева является вершина I, и вероятность попасть в нее не зависит от $\tilde{\mu}$: $p(\mathrm{I}|\tilde{\mu}) = 1$. Зная это, определим вероятности перехода в вершины, последующие за корнем. В корне ход делает случай, поэтому: $p(\mathrm{II}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{I}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{II}|\mathrm{I}) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; $p(\mathrm{III}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{I}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{III}|\mathrm{I}) = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

Вершины первого яруса дерева (то есть те, куда ведут альтернативы из корня) принадлежат множествам выбора разных игроков. В вершине II ход делает игрок 1, в его стратегии за поведение в данной вершине отвечает элемент $\mu^1_{\mathrm{II}} = \text{Л}$.

Таким образом, он выбирает левую альтернативу, которая ведет в вершину IV. Отсюда, согласно формуле 9.1, получаем, что
$p(\mathrm{IV}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{II}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{IV}|\mathrm{II}, \tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$;
$p(\mathrm{V}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{II}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{V}|\mathrm{II}, \tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$,
(то есть, в вершину V при рассматриваемом наборе стратегий мы не попадем никогда. По аналогичной схеме можно найти вероятности прихода во все остальные вершины. Для вершин, последующих за III, вероятность перехода определяется в соответствии с элементом $\mu^2_{\mathrm{III}} = \text{Ц}$ стратегии второго игрока:

$$p(\mathrm{VI}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{III}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{VI}|\mathrm{III},\tilde{\mu}) = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0,$$

$$p(\mathrm{VII}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{III}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{VII}|\mathrm{III},\tilde{\mu}) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4},$$

$$p(\mathrm{VIII}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{III}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{VIII}|\mathrm{III},\tilde{\mu}) = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0.$$

Рассуждая в том же ключе, для вершин нижнего яруса имеем (в вершинах-последователях IV вероятности определяются из $\mu^2_{\mathrm{IV}} = \Pi$, в вершинах-последователях VIII – из $\mu^1_{\mathrm{VIII}} = Л$):

$$p(\mathrm{IX}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{IV}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{IX}|\mathrm{IV},\tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0,$$

$$p(\mathrm{X}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{IV}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{X}|\mathrm{IV},\tilde{\mu}) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4},$$

$$p(\mathrm{XI}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{VIII}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{XI}|\mathrm{VIII},\tilde{\mu}) = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$p(\mathrm{XII}|\tilde{\mu}) = p(\mathrm{VIII}|\tilde{\mu}) \cdot p(\mathrm{XII}|\mathrm{VIII},\tilde{\mu}) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Итак, мы нашли вероятности перехода в любую из вершин при использовании игроками стратегий из заданного профиля $\tilde{\mu}$. Если рассмотреть только терминальные вершины, то, зная вероятности прихода в них, можно определить исход игры для любого профиля стратегий. В рассматриваемом примере для профиля $\tilde{\mu}$ с вероятностью $\frac{1}{4}$ исход игры будет соответствовать терминальной вершине X, а с вероятностью $\frac{3}{4}$ – терминальной вершине VII.

Вспомним, что терминальным вершинам приписаны выигрыши игроков при соответствующем исходе игры. Таким образом, для любого набора стратегий μ для каждого игрока $a \in A$ можно определить вероятностное распределение его выигрыша (который, вообще говоря, является случайной величиной). А в качестве функции выигрыша игрока, зависящей от всего профиля стратегий, разумно взять математическое ожидание его выигрыша при соответствующем распределении вероятностей:

$$f^a(\mu) = \mathbb{E}\left(u^{a(x)}\middle|\mu\right) = \sum_{x\in T} u^a(x)p(x|\mu).$$

Обратите внимание, что получилось у нас после построения функций $f^a(\mu)$– определены множества игроков (A) стратегий игроков ($\{\mu^a\}$, $a \in A$), функции выигрыша на множестве стратегий (а не исходов!) игры ($f^a(\mu), a \in A$). Если мы вспомним определение игры в нормальной форме (определение 1.2), то обнаружим, что построенных нами элементов достаточно, чтобы определить нормальную форму позиционной игры.

Определение 9.5. *Игра* $\Gamma(G) = \langle A;\ \{\mu^a\}, a \in A;\ f^a(\mu), a \in A\rangle$ *называется нормальной формой позиционной игры* G.

По сути, мы преобразовали позиционную игру как отдельный тип математического объекта к уже знакомому нам виду игры в нормальной форме. При это в качестве множества стратегий уже выступает не числовое множество довольно простой природы (конечное множество, как в биматричной игре, или компакт, как в непрерывной игре), а совокупность отображений из множества вершин в себя. Именно с этим связана основная сложность при поиске равновесий Нэша в позиционных играх – для каждого игрока $a \in A$ его стратегия μ^a включает описание поведения в каждой вершине из множества X^a путем задания альтернативы, исходящей из этой вершины. Пусть разбиение дерева $\langle X, \sigma\rangle$ на множества, где делают ход игроки, таково, что у игрока a во множество X^a входит n_a вершин (пронумеруем их как $(a, 1), \dots (a, n_a)$), и в каждой вершине j ($j = 1, \dots, n_a$) игроку a предстоит выбор из $k(a, j)$ альтернатив. Тогда стратегии игрока a представляют наборы из n_a элементов вида $\mu^a = \left(\mu^a_1, \dots, \mu^a_{n_a}\right)$, где на i-м месте стоит номер альтернативы, выбираемой игроком в вершине i. Таким образом, мощность множества стратегий игрока $a \in A$ составляет:

$$|\{\mu^a\}| = \prod_{j=1}^{n_a} k(a, j).$$

Тем не менее, для позиционных игр, в которых деревья состоят из не слишком большого количества вершин и альтернатив, возможно построить множество стратегий и, следовательно, привести игру к нормальной форме – а потом найти равновесия Нэша. В случае с позиционными играми двух лиц нормальной формой будет являться биматричная игра, методы решения которой хорошо знакомы читателю.

Рассмотрим, как строить нормальную форму позиционной игры, на примере. Рассмотрим дерево игры, приведенное на рисунке 9.3, дополненное выигрышами игроков в каждой из терминальных вершин.

Пример 9.1. Пусть позиционная игра задана следующим деревом:

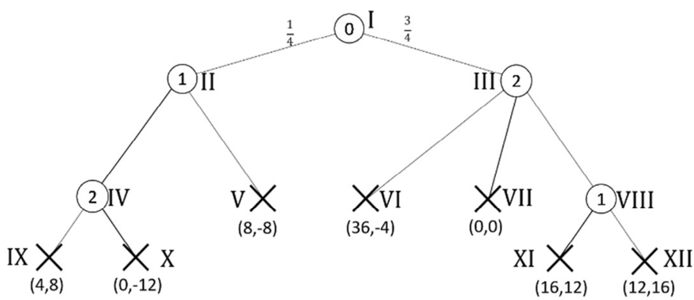


Рисунок 9.4 – Дерево игры (см. рисунок 9.3) с заданными для каждой терминальной вершины выигрышами

Построим ее нормальную форму и найдем равновесия Нэша. Для этого надо вначале задать множества стратегий каждого игрока. Оценим, сколько стратегий имеет каждый игрок. Оба они делают ход в двух вершинах. При этом у первого игрока в обеих вершинах по две альтернативы, что приводит к 4 стратегиям: $\{\mu^1\} = \{\text{ПП}, \text{ПЛ}, \text{ЛП}, \text{ЛЛ}\}$, где каждая стратегия представляет собой пару, на первом месте в которой стоит альтернатива, выбираемая в вершине II, а на втором – в вершине $VIII$. В свою очередь, у второго игрока – три альтернативы в вершине III и две в вершине IV, что приводит в итоге к 6 стратегиям:

$\{\mu^2\} = \{ПП, ПЛ, ЦП, ЦЛ, ЛП, ЛЛ\}$. Таким образом, нормальная форма рассматриваемой позиционной игры представляет собой биматричную игру размерности 4×6. Для каждой из возможных ситуаций игры (всего их $4 \times 6 = 24$) найдем ожидаемые выигрыши игроков.

1. (ПП, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ – в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8) + \frac{3}{4}(12,16) = (2,-2) + (9,12) = (11,10).$$

2. (ПП, ПЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, так как они отличаются лишь выбором вторым игроком альтернативы в вершине IV. Однако вероятность перейти в эту вершину равна нулю: если ход случая приводит к переходу в вершину II, то там стратегия первого игрока приводит в вершину V, если в вершину III, то «совместными усилиями» обоих игроков игра заканчивается в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков: $(11,10)$.

3. (ПП, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ – в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8) + \frac{3}{4}(0,0) = (2,-2).$$

4. (ПП, ЦЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(2,-2)$.

5. (ПП, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ – в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8,-8) + \frac{3}{4}(36,-4) = (2,-2) + (27,-3) = (29,-5).$$

6. (ПП, ЛЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(29, -5)$.

7. (ПЛ, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ – в вершине XI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8, -8) + \frac{3}{4}(16,12) = (2, -2) + (12,9) = (14,7).$$

8. (ПЛ, ПЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая. Ожидаемый вектор выигрышей игроков: $(14,7)$.

9. (ПЛ, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ – в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8, -8) + \frac{3}{4}(0,0) = (2, -2).$$

10. (ПЛ, ЦЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(2, -2)$.

11. (ПЛ, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине V, с вероятностью ¾ – в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(8, -8) + \frac{3}{4}(36, -4) = (2, -2) + (27, -3) = (29, -5).$$

12. (ПЛ, ЛЛ). Эта пара стратегий приводит к тому же исходу, что и предыдущая, поэтому вектор ожидаемых выигрышей игроков тот же: $(29, -5)$.

13. (ЛП, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(12,16) = (0, -3) + (9,12) = (9,9).$$

14. (ЛП, ПЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ – в вершине XII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}\ (4{,}8) + \frac{3}{4}\ (12{,}16) = (1{,}2) + (9{,}12) = (10{,}14).$$

15. (ЛП, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(0{,}0) = (0, -3).$$

16. (ЛП, ЦЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ – в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4{,}8) + \frac{3}{4}(0{,}0) = (1{,}2).$$

17. (ЛП, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(36, -4) = (0, -3) + (27, -3) = (27, -6).$$

18. (ЛП, ЛЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ – в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4{,}8) + \frac{3}{4}(36, -4) = (1{,}2) + (27, -3) = (28, -1).$$

19. (ЛЛ, ПП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине XI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0, -12) + \frac{3}{4}(16{,}12) = (0, -3) + (12{,}9) = (12{,}6).$$

20. (ЛЛ, ПЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ – в вершине XI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8)+\frac{3}{4}(16,12)=(1,2)+(12,9)=(13,11).$$

21. (ЛЛ, ЦП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0,-12)+\frac{3}{4}(0,0)=(0,-3).$$

22. (ЛЛ, ЦЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине IX, с вероятностью ¾ – в вершине VII. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8)+\frac{3}{4}(0,0)=(1,2).$$

23. (ЛЛ, ЛП). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(0,-12)+\frac{3}{4}(36,-4)=(0,-3)+(27,-3)=(27,-6).$$

24. (ЛЛ, ЛЛ). С вероятностью ¼ эта пара стратегий приведет к завершению игры в вершине X, с вероятностью ¾ – в вершине VI. Ожидаемый вектор выигрышей игроков:

$$\frac{1}{4}(4,8)+\frac{3}{4}(36,-4)=(1,2)+(27,-3)=(28,-1).$$

Таким образом, рассмотрены все 24 ситуации в игре, полученные при этом выигрыши игроков в каждой из ситуаций можно свести в две следующие матрицы:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array} & \begin{pmatrix} 11 & 11 & 2 & 2 & 29 & 29 \\ 14 & 14 & 2 & 2 & 29 & 29 \\ 9 & 10 & 0 & 1 & 27 & 28 \\ 12 & 13 & 0 & 1 & 27 & 28 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 10 & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 7 & 7 & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 9 & 14 & -3 & 2 & -6 & -1 \\ 6 & 11 & -3 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для каждого игрока можно найти и отметить в матрице его выигрыша отображение его наилучшего ответа на стратегии соперника:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array} & \begin{pmatrix} 11 & 11 & 2 & 2 & 29 & 29 \\ 14 & 14 & 2 & 2 & 29 & 29 \\ 9 & 10 & 0 & 1 & 27 & 28 \\ 12 & 13 & 0 & 1 & 27 & 28 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{ПП} & \text{ПЛ} & \text{ЦП} & \text{ЦЛ} & \text{ЛП} & \text{ЛЛ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ПП} \\ \text{ПЛ} \\ \text{ЛП} \\ \text{ЛЛ} \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 10 & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 7 & 7 & -2 & -2 & -5 & -5 \\ 9 & 14 & -3 & 2 & -6 & -1 \\ 6 & 11 & -3 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Применяя обсуждавшийся еще в разделе 2 способ поиска равновесий в биматричных играх, получаем, что в рассматриваемой игре два равновесия в чистых стратегиях – (ПЛ, ПП) и (ПЛ, ПЛ). Они приводят к одинаковому завершению игры (вероятностью ¼ в вершине V, с вероятностью ¾ в вершине XI) и гарантируют игрокам одинаковый ожидаемый выигрыш – 14 единиц первому игроку, 7 единиц второму игроку.

Приведенный способ поиска равновесий в позиционных играх с полной информацией крайне трудозатратен и, вообще говоря, его результат получается неоднозначным. Как правило, после приведения позиционной игры к нормальной форме (что само по себе занимает много времени) в получающейся биматричной игре существует довольно большое количество равновесий Нэша, соответствующих одному и тому же исходу игры. Это может запутать исследователя, желающего понять, как должны вести себя игроки: ведь есть сразу несколько равновесных ситуаций в игре, дающих игрокам один и тот же выигрыш – как среди них выбрать «наилучшее», наиболее «равновесное» равновесие? Оказывается, для этого необходимо «ужесточить» требования к концепции решения игры, и вместо обычного равновесия Нэша искать совершенное подыгровое равновесие (эквивалентный термин– равновесие, совершенное по подыграм). Это более сильное понятие, чем просто равновесие Нэша – всякое СПР является равновесием Нэша, однако, чтобы стать совершенным подыгровым, «простое» равновесие Нэша должно удовлетворять дополнительным требованиям. Для того, чтобы их сформулировать, введем понятие ***подыгры*** для позиционной игры G.

Определение 9.6. *Для любой вершины* $z \in X$ *позиционной подыгрой, начинающейся из* z, *называется совокупность* $(\langle X_z, \sigma_z\rangle, X_z^0, X_z^a, u_z^a, a \in A)$, *где* $X_z = \{x \in X \mid \exists l \geq 0 \colon \sigma^l(x) = z\}$, σ_z *есть сужение* σ *на* X_z, $X_z^a = X^a \cap X_z, a \in A \cup \{0\}$, *а* $u_z^a(x) = u^a(x)$ *для всех* $x \in X^z \cap T$.

Смысл этого определения прост, несмотря на некоторую его громоздкость. Позиционная подыгра соответствует «редуцированному» взаимодействию игроков, которое начинается не из корня дерева исходной игры, а их вершины z. Иными словами, подыгра – это позиционная игра, деревом которой является поддерево $\langle \mathrm{X_z}, \sigma_{\mathrm{z}}\rangle$ исходного дерева $\langle X, \sigma\rangle$ с корнем в $z \in X$.

Например, если рассмотреть игру, приведенную на рисунке 9.4, то для нее подыгрой, начинающейся в вершине III, будет позиционная игра с деревом, выделенным сплошным овалом. В свою очередь, дерево подыгры, начинающейся в вершине II, выделено пунктиром (см. рисунок 9.5).

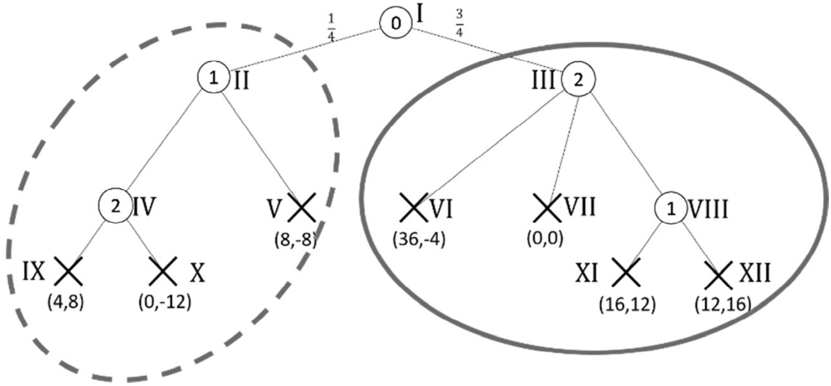


Рисунок 9.5 – Подыгры G_{II} и G_{III} для игры G, дерево которой было представлено на рисунке 9.4

Таким образом, любая подыгра сама по себе является позиционной игрой. Поэтому для нее необходимо также задать стратегии игроков – ими будут являться сужения исходных стратегий игроков (в «большой» игре) на редуцированное множество вершин, где они принимают решения в рамках подыгры. Пусть $\mu = (\mu^a, a \in A)$ – ситуация в исходной игре, тогда через μ_z обозначим ее «сужение» на X_z, а через $u^a(\mu_z)$ – выигрыш игрока a в ситуации μ_z. Так мы получили нормальную форму подыгры:

$$\Gamma(G_z) = \langle A; \{\mu_z\}, u_z^a(\mu_z), a \in A \rangle.$$

Например, нормальная форма подыгры $\mathrm{G_{II}}$ (см. рисунок 9.5) имеет следующий вид. Множество игроков $A = \{1,2\}$, каждый из них ходит в одной вершине и имеет там две альтернативы. Таким образом, множество стратегий первого игрока – $\{Л, П\}$, такой же вид имеет и множество стратегий второго игрока. Матрицы выигрыша игроков:

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} Л & П \end{array} \\ \begin{array}{c} Л \\ П \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} Л & П \end{array} \\ \begin{array}{c} Л \\ П \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В этой подыгре можно найти равновесие – им является ситуация $(П, Л)$ – то есть в вершине II первый игрок выбирает правую альтернативу, а в вершине IV второй игрок выбирает левую альтернативу. Внимательный читатель в этот момент вспомнит, что в исходной игре было равновесие (ПЛ, ПЛ), в котором в вершинах II и IV игроки вели себя точно также, как и в найденном равновесии подыгры, включающей эти вершины. Более того, если мы рассмотрим подыгру, начинающуюся из вершины IV (там будет всего один игрок – второй), то в ней оптимальной стратегией единственного игрока будет выбор левой альтернативы, что также совпадает с сужением равновесия (ПЛ, ПЛ) на эту подыгру. Таким образом, особенностью ситуации (ПЛ, ПЛ) в исходной игре является то, что она не только сама по себе является равновесием, то и ее сужение на любую подыгру также будет в этой подыгре равновесием. Именно в этом и заключается «подыгровое совершенство» равновесия (ПЛ, ПЛ).

Определение 9.7. *Набор стратегий* $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^a, a \in A)$ *называется* ***совершенным подыгровым равновесием*** *в игре* G, *если для каждого* $z \in X$ *набор* $\bar{\mu}_z = (\bar{\mu}_z^a, a \in A)$, *где* $\bar{\mu}_z^a$ *– сужение стратегии* $\bar{\mu}^a$ *на подыгру* G_z, *является равновесием Нэша в игре* $\Gamma(G_z)$.

В отличие от равновесия (ПЛ, ПЛ), второе равновесие – (ПЛ, ПП) – подобным свойством не обладает. Более того, наиболее распространенной являются ситуации, когда в позиционной игре много «обычных» равновесий Нэша, однако совершенное подыгровое равновесие всего одно. Это позволяет воспринимать как решение позиционной игры, в первую очередь, именно СПР, отдавая ему предпочтение по сравнению с прочими равновесиями.

Помимо того, что СПР является своего рода «суперравновесием», и того, что количество СПР обычно заметно меньше, чем количество равновесий Нэша в нормальной форме позиционной игры, у СПР есть еще одно «достоинство». Дело в том, что для его поиска не обязательно строить нормальную форму игры, и достаточно ограничиться деревом развернутой формы. Благодаря замечательному алгоритму, разработанному

Гарольдом Куном[11] в 1953 году (а для случая многошаговых антагонистических игр – в 1913 году Эрнстом Цермело[12]), поиск совершенного подыгрового равновесия можно проводить прямо «на дереве» игры в развернутой форме.

Алгоритм определения совершенного подыгрового равновесия (алгоритм Куна)

Алгоритм Куна представляет собой последовательность редукций игры G.

Шаг 1. Рассмотрим множество Z_1 предфинальных вершин – то есть таких, для которых все последующие вершины являются финальными:

$$Z_1 = \{x | \sigma^{-1}(x) \subseteq T\}.$$

Для каждой вершины $x \in Z_1$ действуем следующим образом.

1) Если в данной вершине ходит игрок $a \in A$ (то есть $x \in Z_1 \cap X^a$), то находим его наилучший выбор в этой вершине: $\mu^a(x) \in Arg\max_{y \in \sigma^{-1}(x)} u^a(y)$ и доопределяем вектор выигрышей игроков в вершине $u(x) = \left(u^b(x), b \in A\right) \stackrel{\text{def}}{=} u^b\left(\mu^a(x)\right)$, $b \in A)$.

2) Если в данной вершине ходит случай ($x \in Z_1 \cap X^0$), то приписываем этой вершине среднее значение вектора выигрышей среди возможных альтернатив:

$$u(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} p(y|x) u(y).$$

---

[11] Гарольд Уильям Кун (29 июля 1925 – 2 июля 2014) – американский математик, известный работами в теории игр, лауреат премии фон Неймана в 1980 году (совместно с Д. Гейлом и А.У. Таккером). Помимо приводимого здесь алгоритма, а также Теоремы об эквивалентности смешанных и поведенческих стратегий, его имя носят условия Каруша-Куна-Таккера и теоретико-игровая модель покера Куна.

[12] Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (27 июля 1871 – 21 мая 1953) – немецкий математик, внесший значительный вклад в теорию множеств и создание аксиоматических оснований математики.

После этого переходим к следующей предфинальной вершине x', проделываем аналогичную процедуру для нее, и т.д. В результате получена редуцированная игра с множеством финальных вершин Z_1 – то есть на один «ярус» меньше, чем было в исходной игре. По сути дела, мы «сыграли» последний шаг игры за игроков, определив их оптимальное поведение на этом шаге. А полученное дерево представляет собой позиционную игру, укороченную на один шаг по сравнению с исходной, однако выигрыши игроков в ней таковы, как если бы этот «исключенный» шаг в игре был, и они действовали бы на нем оптимально с точки зрения исходной игры.

Шаг 2. Для редуцированной игры действуем аналогично шагу 1: находим множество нефинальных вершин Z_2, для которых все последующие вершины в новом дереве являются финальными. В это множество войдут все вершины из множества Z_1, а также некоторые финальные вершины исходной игры: $Z_2 = \{x|\sigma^{-1}(x) \subseteq T \cup Z_1\}$. Для каждой вершины x этого множества аналогично пунктам 1) и 2) определяем выборы $\mu^a(x)$ при $x \in X^a$ и вектор выигрышей $u(x)$. Далее аналогично продолжаем этот процесс для множеств $Z_3 = \{x|\sigma^{-1}(x) \subset T \cup Z_1 \cup Z_2\}$, $Z_4 = \{x|\sigma^{-1}(x) \subset T \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3\}$ и т.д., пока очередное множество Z_l не будет состоять только из начальной вершины x_0. При этом полученная ситуация $\mu = (\mu^a, a \in A)$ будет совершенным подыгровым равновесием исходной игры G.

Теорема 9.1. *В любой конечной позиционной игре с полной информацией существует совершенное подыгровое равновесие. Соответствующие стратегии и выигрыши игроков задаются алгоритмом Куна.*

Доказательство этой теоремы носит конструктивный характер и базируется как раз на самом алгоритме Куна. На каждом шаге алгоритма мы в явном виде указываем элементы равновесных стратегий игроков, а завершение алгоритма гарантирует конечность дерева – ведь максимальное число итераций в алгоритме Куна не может превышать высоту дерева игры в развернутой форме.

Проиллюстрируем работу алгоритма Куна на примере той же самой игры, что и раньше (ее дерево – на рисунке 9.4).

На первом шаге рассматриваем предфинальные вершины на предпоследнем ярусе дерева – вершины IV и XIII. В вершине IV ходит второй игрок, и для него наиболее выгодной из двух возможных альтернатив является левая – ведь там он получает 8 единиц полезности против –12 для правой альтернативы. Поэтому в СПР-стратегии второго игрока выбором второго игрока в вершине IV является альтернатива Л, а самой вершине при редукции дерева приписывается вектор выигрышей $(4,8)$. Для вершины XIII действуем аналогично: в ней ходит первый игрок, для которого предпочтительной альтернативой является левая (16 единиц выигрыша против 12). При редукции дерева вершине припишется вектор выигрышей $(16,12)$. На этом первый шаг алгоритма окончен, в редуцированном дереве множество терминальных вершин – $\{\mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}\}$. Выигрыши в вершинах $\mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}$ те же, что и в исходном дереве, а в вершинах IV и VIII они были только что определены. На рисунке 9.6 первому шагу алгоритма соответствуют выделенные ребра дерева и векторы выигрышей.

На шаге 2 множество предфинальных вершин – II и III. В вершине II ходит первый игрок, выбирающий из двух альтернатив: левая дает ему выигрыш 4 единицы, правая – 8 единиц (ее он и выбирает). В вершине III ходит второй игрок, выбирающий из трех альтернатив: левая дает ему выигрыш –4 единицы, центральная – 0 единиц, а правая – 12 единиц. Поэтому второй игрок выберет именно правую альтернативу. Этому шагу алгоритма соответствуют ребра и выигрыши, выделенные на рисунке 9.6.

На третьем шаге остается только одна предфинальная вершина – корень дерева, в котором ходит случай. Таким образом, вектор выигрышей игроков равен математическому ожиданию выигрышей: $\frac{1}{4}(8,-8)+\frac{3}{4}(16,12)=(14,7)$, а совершенное подыгровое равновесие – это ситуация (ПЛ, ПЛ). Таким образом, алгоритм Куна позволил нам подтвердить полученный ранее результат.

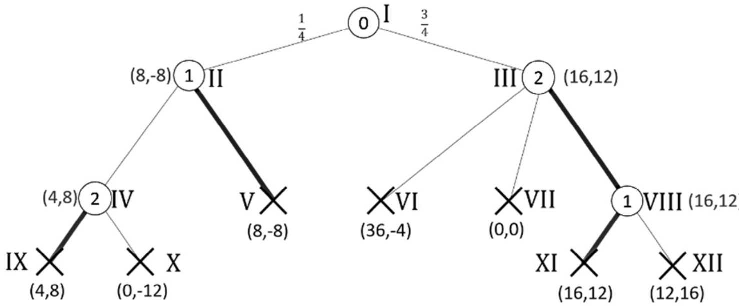


Рисунок 9.6 – Применение алгоритма Куна к игре, дерево которой приводилось на рисунке 9.4. Выделены элементы, выбиравшиеся на первом и втором шагах

Совершенное подыгровое равновесие является устойчивым к малым случайным ошибкам игроков. Иными словами, если игроки могут ошибаться, принимая решения в «своих» вершинах, с небольшой вероятностью выбирая не ту альтернативу, которую запланировали, то в «новой» игре с возможностью ошибки СПР будет по-прежнему соответствовать равновесию в исходной. Формально, рассмотрим возмущение игры G. В каждой позиции игрока a с вероятностью $1 - \varepsilon$ реализуется намеченная им альтернатива, а с вероятностью ε равновероятно реализуется любая другая альтернатива (т.е. после данной вершины «появляется» еще одна, где делает ход случай, а вероятности перехода определены указанным образом). Любая вершина исходной игры в возмущенной игре G_ε реализуется с положительной вероятностью при любых стратегиях игроков.

Теорема 9.2. *Пусть в исходной позиционной игре G существует единственное совершенное подыгровое равновесие. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ в игре G_ε существует единственное равновесие Нэша, совпадающее с совершенным подыгровым равновесием исходной игры.*

Доказательство повторяет схему алгоритма Куна. В любой предфинальной позиции $x \in Z_1 \cap X^a$ существует единственный наилучший выбор $\mu^a(x)$ игрока a, отвечающий совершенному подыгровому равновесию. В любой ситуации равновесия $\hat{\mu}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\hat{\mu}^a(x) = \mu^a(x)$, поскольку вероятность перехода в вершину x положительна и любой другой выбор приведет к строго меньшему выигрышу. Далее рассматриваются вершины из $Z_2, Z_3, \ldots$, проводятся аналогичные рассуждения по индукции и доказывается, что $\hat{\mu}^a \equiv \mu^a$.

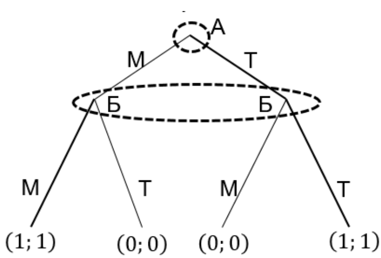
Следствие. Пусть в позиционной игре G существует единственное совершенное подыгровое равновесие. Тогда игра в нормальной форме $\Gamma(G)$ разрешима по доминированию, а выигрыши $f^a(\mu)$, соответствующие совершенному подыгровому равновесию, задаются алгоритмом Куна.

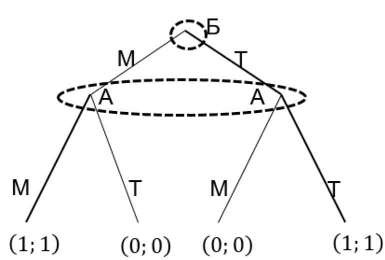
10. Позиционные игры с неполной информацией

Рассмотрим задачу «Встреча в городе». Два студента, Аня и Боря (игроки А и Б), договорились пойти в Малый Театр. Билеты куплены, и за час до встречи они садятся в метро в разных районах Москвы. Театр находится на станции метро Площадь Революции. К сожалению, они забыли договориться, где встречаться: в метро или у входа в театр. Телефонов у них нет. Что они будут делать? У каждого два варианта действий: ждать в метро (М) или у театра (Т). Если они пойдут в разные места, то опоздают на спектакль. Матрицы выигрышей имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой игре два равновесия: (М, М) и (Т, Т), причем ни у одного из игроков нет доминирующих стратегий. При расчете равновесий мы предполагали, что когда Аня и Боря принимают решения, между ними отсутствует связь; следовательно, на момент принятия решения Боря не знает о решении Ани, и наоборот. Есть два эквивалентных способа записать эту игру как позиционную:





Слева – дерево игры, в которой Аня делает первый ход, но Боря не знает, какой ход она сделала. Т.е. на момент принятия решения Боря не различает, в какой из своих двух вершин он находится. Это предположение достигается объединением двух вершин, в которых Боря делает ход, в одно информационное множество.

Справа показан альтернативный способ записи той же игры, где первый ход делает Боря, а Аня не различает вершины.

Определение 10.1. *Пусть Г – игра в развернутой форме.* ***Информационное множество*** *игрока i есть совокупность вершин, в которых этот игрок делает ход, со следующими свойствами:*

1. *Каждая вершина игрока i содержится в одном и ровно одном информационном множестве*

2. *Пусть h_i– информационное множество игрока i. Во всех вершинах, входящих в h_i, игроку доступен один и тот же набор действий $Al(h_i)$.*

Информационное множество − это совокупность состояний игры, которые игрок не различает между собой. Информационное множество не должно содержать двух позиций, принадлежащих одному пути, соединяющему начальную вершину с некоторой финальной. Пронумеруем эти множества для каждого игрока и обозначим И.М. под номером j игрока a как Z^{aj}.

Как и в игре с полной информацией, в произвольной позиционной игре:

$$G = \langle A; \langle X, \sigma\rangle;\ u^a(x), x \in T, a \in A;\ X\backslash T = \bigcup_{a\in A} X^a\ ;\ \forall x \in X^0\ \exists p(x'|x), x' \in \sigma^{-1}(x)\rangle.$$

Обозначения те же, что и раньше, однако для каждого $a \in A$ задано разбиение на информационные множества:

$$X^a = \bigcup\nolimits_{j\in J^a} Z^{aj}.$$

Каждое из множеств Z^{aj} содержит позиции с одинаковым числом $k(j)$ альтернатив (последующих вершин). Альтернативы в каждой позиции $x \in Z^{aj}$ пронумерованы слева направо числами от 1 до $k(j)$.

Обозначим $Al^{aj} = \{1, \ \dots, \ k(j)\}$ множество альтернатив для информационного множества Z^{aj} игрока $a \in A$.

Определение 10.2. Чистой стратегией *игрока $a \in A$ называется отображение μ^a, определяющее для каждого информационного множества Z^{aj} альтернативу $\mu^a(Z^{aj}) \in Al^{aj}$, которую игрок выбирает в любой из вершин этого множества. Набор таких стратегий $\mu = (\mu^a, a \in A)$ называется* ***ситуацией****.*

Для позиционных игр общего вида определение совершенного подыгрового равновесия имеет такой же вид, как и в случае позиционных игр с полной информацией. Однако в этом случае подыгры перебираются с учетом информационных множеств.

Для иллюстрации того, как будет выглядеть поиск СПР в позиционных играх общего вида, рассмотрим пример применения теории игр к военному делу, приведенный Захаровым – игра «Сжигание мостов». Генерал должен защищать город на берегу реки. До того, как враг нападает, генерал принимает решение, сжигать мост, соединяющий город с другим берегом (B), или нет (N). В городе расквартированы два подразделения, которыми командуют подчиненные генерала. Они могут наблюдать действия начальника, однако поведение друг друга им остается неизвестным до момента завершения сражения. После того, как генерал решает, что делать с мостом, решение принимает первый командир: он решает, бежать или нет с поля боя. Последним решение принимает командир второго подразделения, он также решает, следует ли его бойцам отступить или сражаться до конца, однако решение первого командира при этом ему неизвестно. Для защиты города достаточно хотя бы одного отряда: если город прикрывает один отряд, он ценой собственных жизней удерживает его, если же отрядов два, то они оба несут потери, но значительно менее тяжелые, чем понесли бы, защищаясь в одиночку. Выигрыш генерала равен 1 единице полезности, если город удается удержать (т.е., в нем остается хотя бы одно подразделение), и 0, если город сдается врагу (все защитники бежали).

В случае, когда мост не разрушен, отступить из города не составляет труда. Взаимодействие командиров в этом случае представляет собой игру на координацию: если они оба отступят, то получат по 3 единицы полезности (все будут живы, но покрыты позором), если оба решат биться – по 3 единицы (бой будет выигран, но не все солдаты в подчинении командиров выживут). Если же один командир бежит с поля боя, а другой останется сражаться в одиночку, то бежавший командир получит 5 единиц полезности (город все равно выстоит, но его подразделение не пострадает), а сражающийся – лишь 2 единицы (он удержит город, но потеряет своих людей). Если же генерал разрушает мост, то отступление связано с потерей дополнительных двух единиц полезности: ведь теперь им необходимо восстанавливать мост, чтобы бежать. При этом на потери и выигрыши оставшегося в городе подразделения состояние моста не влияет.

Изобразим взаимодействие игроков в виде дерева:

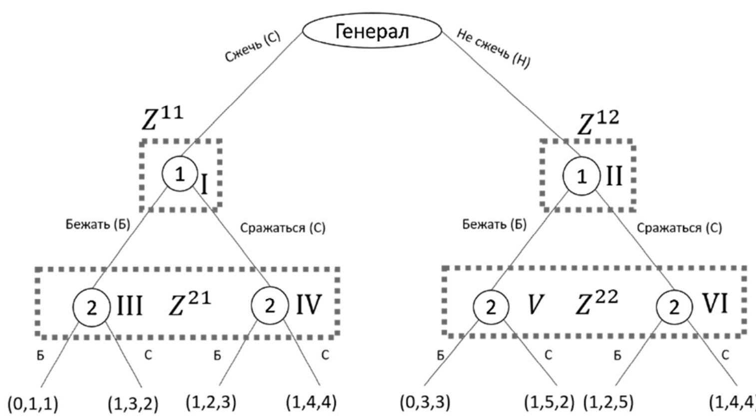


Рисунок 10.1 – Дерево игры «Сжигание мостов»

Здесь возможны всего две подыгры – одна соответствует решению Генерала сжечь мост (левое поддерево, корень – вершина I), другая – решению оставить мост (правое поддерево, корень – вершина II). Так как второй командир не различает между собой вершины, входящие в одно информационное множество (это пары вершин III/IV из множества Z^{21} и пара V/VI из множества Z^{22}), то подыгр с деревьями, начинающихся из любой из этих вершин, не существует.

Для каждой из этих подыгр запишем нормальную форму и найдем равновесие. Если генерал не сжигает мост, выигрыши командиров в зависимости от принимаемых ими решений таковы:

$$A_{\mathrm{C}} = \begin{array}{c} \\ \text{Б} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B_{\mathrm{C}} = \begin{array}{c} \\ \text{Б} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ \mathbf{5} & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В этой биматричной игре равновесием Нэша (и равновесием в доминирующих стратегиях) является ситуация, в которой оба командира предпочитают бежать. Если же мост сожжен, выигрыши командиров можно записать в виде другой пары матриц:

$$A_{\mathrm{H}} = \begin{array}{c} \\ \text{Б} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} B_{\mathrm{H}} = \begin{array}{c} \\ \text{Б} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Б} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

А вот в этой игре равновесием Нэша (и – вновь! – равновесием в доминирующих стратегиях) является ситуация, в которой оба командира предпочитают сражаться. Таким образом, сжигание генералом моста приведет при использовании его подчиненными СПР-стратегий к его выигрышу в 1 единицу (город удержан), а сохранение моста – к нулевому выигрышу (город потерян), очевидно, что его равновесная стратегия – сжечь мост. На дереве игры СПР будет иметь вид, представленный на рисунке 10.2.

Обратите особое внимание на отмеченные ребра дерева для вершин III–VI, в которых ход делает второй командир. Так как вершины III и IV входят в одно информационное множество, то игрок в них делает один и тот же ход. То же справедливо и для пары вершин V и VI. При этом если бы второй командир мог различать вершины в рамках каждого информационного множества, СПР (и исход взаимодействия) был бы тем же! Так в чем же отличие?

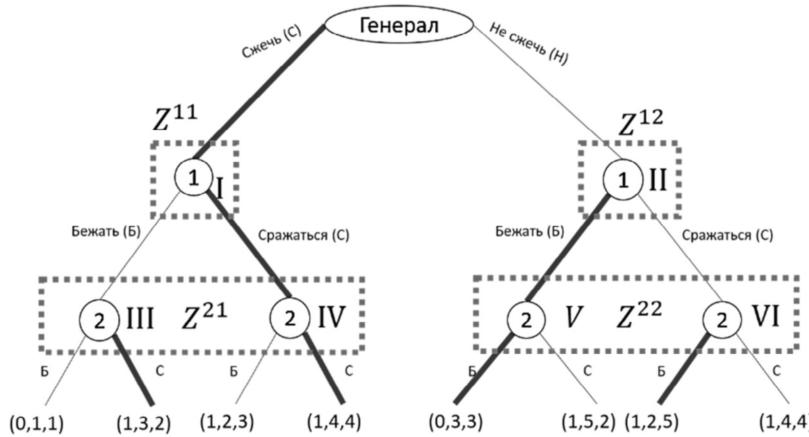


Рисунок 10.2 – Дерево игры «Сжигание мостов» с отмеченным на нем совершенным подыгровым равновесием

Для ответа на этот вопрос полезно будет записать множества стратегий всех игроков как для рассматриваемой игры, так и для ее модификации с полной информацией. Для Генерала это $S_{\Gamma} = \{\text{С}, \text{Н}\}$, для Первого командира – $S_1 = \{\text{ББ}, \text{БС}, \text{СБ}, \text{СС}\}$, где на первом месте стоит его решение в вершине I, а на втором в вершине II. В обеих модификациях игры эти множества стратегий одинаковые. А вот у Второго командира они множества стратегий разные. В игре общего вида имеем: $S_2 = \{\text{ББ}, \text{БС}, \text{СБ}, \text{СС}\}$, где на первом месте стоит его решение в информационном множестве $Z^{21} = \{\text{III}, \text{IV}\}$, а на втором в информационном множестве $Z^{22} = \{\text{V}, \text{VI}\}$. Если же он в состоянии различать вершины, то множество его стратегий увеличивается в четыре раза (квадратично!):

$$\tilde{S}_2 = \left\{\begin{matrix} \text{ББББ, БББС, ББСБ, ББСС,} \\ \text{БСББ, БСБС, БССБ, БССС,} \\ \text{СБББ, СББС, СБСБ, СБСС,} \\ \text{ССББ, ССБС, СССБ, СССС,} \end{matrix}\right\}.$$

В этой записи буквы последовательно «кодируют» поведение игрока в каждой из теперь уже четырех ситуаций, где он принимает решение, соответствующих вершинам III–VI. Например, стратегия СББС означает следующее: *«В вершине III сдаваться, в вершине IV биться, в вершине V биться, в вершине VI сдаваться»*.

В свете полученных результатов на первый взгляд «одинаковые» СПР в исходной игре и ее модификации с полной информацией приобретают абсолютно различный вид – хотя на дереве они соответствует набору из одних и тех же ребер. Запишем их формально: в исходной игре СПР имеет вид $(С, СБ, СБ)$, а в модифицированной – $(С, СБ, ССББ)$. «Удвоение» стратегий у второго командира произошло как раз из-за того, что в модифицированной игре он различает вершины.

Смешанные стратегии в позиционных играх

Для позиционных игр, так же, как и для стационарных, можно определить понятие смешанных стратегий.

Определение 10.3. *Смешанной стратегией π^a игрока $a \in A$ называется вероятностное распределение на множестве $\{\mu^a\}$ его чистых стратегий, ставящее в соответствие каждой стратегии μ^a вероятность $\pi^a_{\mu^a}$ ее выбора.*

Ситуация в смешанных стратегиях определяет вероятностное распределение на множестве T финальных позиций:

$$p(x|\pi) = \sum_{\mu}\left(\prod_{a\in A}\pi^a_{\mu^a}\right)p(x|\mu).$$

Выигрыш игрока a в ситуации π определяется как мат.ожидание $u^a(\pi) = \mathbb{E}(u^a(x)|\mu) = \sum_{x\in T} u^a(x)p(x|\pi)$. Этот способ введения смешанных стратегий аналогичен случаю игр в нормальной форме. Он здесь не слишком эффективен, поскольку даже для небольших деревьев число возможных чистых стратегий может быть очень велико.

Более эффективным является следующий подход, связанный с понятием стратегии поведения (поведенческой стратегии). Рассмотрим ситуацию, когда игрок выбирает вероятностное распределение на альтернативах для каждого своего информационного множества. Определившись с распределением, он проводит рандомизацию, пользуясь им. При этом предполагается, что случайный выбор альтернатив в различных информационных множествах производится независимо.

Определение 10.4. *Стратегией поведения a игрока a называется отображение, которое каждому информационному множеству Z^{aj}, $j \in J^a$, сопоставляет набор*

$$\left(p_k^{aj}; k = 1, \dots k(j)\right): \sum_{k=1}^{k(j)} p_k^{aj} = 1; p_k^{aj} \geq 0; k = 1, \dots k(j),$$

причем p_k^{aj} – вероятность выбора альтернативы $k \in Al^{aj}$ в любой позиции множества Z^{aj}.

Любая ситуация $\beta = (\beta^a; a \in A)$ в стратегиях поведения определяет вероятностное распределение на множестве позиций:

$$\begin{gathered} \sigma(x) \in Z^{aj}; x = \xi(\sigma(x), k); k \in Al^{aj} \\ \Downarrow \\ p(x|\beta) = p(\sigma(x)|\beta) p_k^{aj} \end{gathered} .$$

Определение 10.5. *Позиция $x \in X^a$ игрока a называется* ***возможной*** *для смешанной стратегии* π^a (*чистой стратегии* μ^a)*, если существует такая ситуация* π (μ)*, содержащая* π^a (μ^a)*, что* $p(x|\pi) > 0$ ($p(x|\mu) > 0$).

Определение 10.6. *Информационное множество Z^{aj} игрока a называется* ***существенным*** *для смешанной стратегии* π^a (*чистой стратегии* μ^a)*, если некоторая позиция $x \in Z^{aj}$ возможна для* π^a (μ^a).

Обозначим множество позиций, возможных для стратегии μ^a, через $\mathrm{Poss}\mu^a$, а семейство информационных множеств, существенных для μ^a, через $\mathrm{Rel}\mu^a$. Аналогично вводятся множество $\mathrm{Poss}\pi^a$ и семейство $\mathrm{Rel}\pi^a$.

Каждая смешанная стратегия однозначно определяет соответствующую стратегию поведения. В то же время, каждой стратегии поведения соответствует много смешанных стратегий. Но одну из них всегда можно задать следующим образом.

Лемма 10.1. *Если дана стратегия поведения β^a игрока a и смешанная стратегия π^a определена по формуле*

$$\pi^a_{\mu^a} = \prod_{j \in J^a} p^{aj}_{i_j},$$

где $\mu^a\left(Z^{aj}\right) = i_j \in Al^{aj}$, то β^a есть стратегия поведения, соответствующая π^a.

Приведенная лемма утверждает, что мы можем получить каждую стратегию поведения из некоторой смешанной стратегии.

Для иллюстрации полученных выше результатов рассмотрим простую карточную игру двух игроков, описанную Васиным. Это антагонистическая игра, в ней игрок 1 представляет собой команду из двух агентов, играющих по очереди («Стартующий» и «Финиширующий»). В начале игры игрокам сдаются две карты – старшая и младшая, а от лица игрока 1 первым решение принимает Стартующий. Два возможных расклада карт (расклад 1: старшая – игроку 1, младшая – игроку 2; расклад 2: старшая – игроку 2, младшая – игроку 1) считаются равновероятными. Игрок со старшей картой получает доллар от игрока с младшей картой и имеет альтернативы либо закончить, либо продолжить партию. Если партия продолжается, то Стартующий выходит из игры и его место в качестве игрока 1 занимает Финиширующий. Он не знает расклада карт и исхода первого тура игры (т.е., полученной суммы) и может либо «вслепую» поменяться картой с игроком 2, либо сохранить свою карту. После этого происходит второй тур игры – игроки вскрывают карты и снова имеющий старшую карту получает доллар от игрока, имеющего младшую (см. дерево игры, где в каждой финальной позиции записан выигрыши игроков).

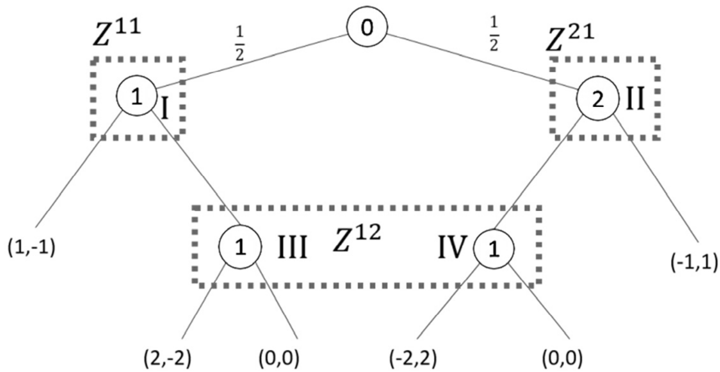


Рисунок 10.3 – Дерево «Карточной игры»

В дереве этой игры множества вершин, где делают ход игрок 1 (либо Стартующий, либо Финиширующий), имеет вид: $X_1 = Z^{11} \cup Z^{12}$, множество вершин второго игрока – $X_2 = Z^{21}$. Исходя из этого, стратегии двух игроков имеют вид: $\mu_1 = \left(\mu_1(Z^{11}), \mu_1(Z^{12})\right)$ – у первого игрока (первый элемент соответствует его выбору в информационном множестве Z^{11}, второй – во множестве Z^{12}) и $\mu_2 = \mu_2(Z^{21})$ – у второго игрока (он принимает решение только в одном информационном множестве). У игрока 1 множество стратегий состоит из 4 элементов:

$$S_1 = \left\{ \begin{matrix} (\text{закончить игру, менять карту}); \\ (\text{закончить игру, оставить карту}); \\ (\text{продолжить игру, менять карту}); \\ (\text{продолжить игру, оставить карту}) \end{matrix} \right\}.$$

Для сокращения записи обозначим эти четыре стратегии по первым буквам действий игрока (З = закончить, П = продолжить, М = менять карту, О = оставить карту):

$$S_1 = \{\text{ЗМ};\ \text{ЗО}; \text{ПМ}; \text{ПО}\}.$$

Аналогично, у второго игрока множество стратегий включает в себя два элемента:

$$S_2 = \{\text{Закончить игру};\ \text{Продолжить игру}\} = \{\text{З};\ \text{П}\}.$$

Приведем нашу игру к нормальной форме. У нас должна получиться биматричная игра с матрицами выигрыша размера 4×2 – но так как наша игра антагонистическая, то мы можем обойтись только одной матрицей:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{ЗО} \\ \text{ЗМ} \\ \text{ПО} \\ \text{ПМ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{З} & \text{П} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Обсудим, почему матрица имеет именно такой вид. Всего в игре возможно восемь профилей стратегий. Разберем их по отдельности.

1. Рассмотрим первый профиль стратегий – (ЗО; З), он соответствует описанию поведения игроков: «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве Z^{11}, завершает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». К какому исходу игры приведет такое поведение (т.е., в какой финальной вершине дерева мы окажемся)? В самом начале сдаются карты, и с вероятностью $\frac{1}{2}$ дальнейшее взаимодействие игроков пойдет по левому поддереву игры (старшая карта оказалась у первого игрока), а с вероятностью $\frac{1}{2}$ – по правому (старшая карта оказалась у второго игрока):

$$\begin{aligned} u_1(\text{ЗО};\ \text{З}) = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З}) \\ &= \frac{1}{2} u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{левое п/д}) \\ &+ \frac{1}{2} u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{правое п/д}). \end{aligned}$$

Переход в левое поддерево означает попадание в множество Z^{11}, где первый игрок, согласно своей стратегии, заканчивает игру, получая один доллар:

$u_1(\text{ЗО; З}|\text{левое п/д}) = 1 = -u_2(\text{ЗО; З}|\text{левое п/д}).$

Переход в правое поддерево приводит игру в множество Z^{21}, где игру завершает второй игрок, и доллар получает именно он:

$u_1(\text{ЗО; З}|\text{правое п/д}) = -1 = -u_2(\text{ЗО; З}|\text{правое п/д}).$

Таким образом, имеем:

$$u_1(\text{ЗО; З}) = -u_2(\text{ЗО; З}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0.$$

2. (ЗО; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве Z^{11}, завершает игру, оказавшись в информационном множестве Z^{21}, оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Рассуждаем по той же схеме, что и раньше:

$$\begin{aligned} u_1(\text{ЗО; П}) = -u_2(\text{ЗО; П}) \\ &= \frac{1}{2} u_1(\text{ЗО; П}|\text{левое п/д}) \\ &+ \frac{1}{2} u_1(\text{ЗО; П}|\text{правое п/д}). \end{aligned}$$

Переход в левое поддерево означает попадание в множество Z^{11}, где первый игрок, согласно своей стратегии, заканчивает игру, получая один доллар:

$u_1(\text{ЗО; П}|\text{левое п/д}) = 1 = -u_2(\text{ЗО; П}|\text{левое п/д}).$

Переход в правое поддерево приводит игру в множество Z^{21}, где решение принимает второй игрок, и продолжает игру. После этого игра переходит в информационное множество Z^{12}, где первый игрок (им оказывается уже Финиширующий) «вслепую» оставляет себе карту. Поскольку мы находимся в левом поддереве, то из информационного множества Z^{12} фактической вершиной, где принимается решение, является вершина IV, и стратегия игрока 1 «оставить карту» приводит к повторной потере им доллара и общим потерям в 2 доллара, и выигрышу этой суммы вторым игроком:

$$u_1(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{правое п/д}) = -2 = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З}|\text{правое п/д}).$$

Таким образом, имеем:

$$u_1(\text{ЗО};\ \text{З}) = -u_2(\text{ЗО};\ \text{З}) = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}(-2) = -0{,}5.$$

По аналогичной схеме можно рассчитать выигрыши игроков и в остальных ситуациях, для них подробные рассуждения уже можно опустить.

3. (ЗМ; З): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}, *завершает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}, *меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». Выигрыш:

$$\begin{aligned} u_1(\text{ЗМ};\ \text{З}) = -u_2(\text{ЗМ};\ \text{З}) = \\ &= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ЗМ};\ \text{З}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}u_1\left(\text{ЗМ};\ \text{З}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0. \end{aligned}$$

4. (ЗМ; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}, *завершает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}, *меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Выигрыш:

$$\begin{aligned} u_1(\text{ЗМ};\ \text{П}) = -u_2(\text{ЗМ};\ \text{П}) = \\ &= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ЗМ};\ \text{П}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}u_1\left(\text{ЗМ};\ \text{П}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 0{,}5. \end{aligned}$$

5. (ПО; З): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}*, продолжает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}*, оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПО; З}) = -u_2(\text{ПО; З}) =$$
$$= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПО; З}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}u_1\left(\text{ПО; З}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(-1) = 0{,}5.$$

6. (ПО; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}*, продолжает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}*, оставляет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПО; П}) = -u_2(\text{ПО; П}) =$$
$$= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПО; П}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}u_1\left(\text{ПО; П}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(-2) = 0.$$

7. (ПМ; З): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}*, продолжает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}*, меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве завершает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПМ; З}) = -u_2(\text{ПМ; З}) =$$
$$= \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; З}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; З}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}(-1) = -0{,}5.$$

8. (ПМ; П): «*Первый игрок, оказавшись в информационном множестве* Z^{11}, *продолжает игру, оказавшись в информационном множестве* Z^{21}, *меняет карту. Второй игрок в своем единственном информационном множестве продолжает игру*». Выигрыш:

$$u_1(\text{ПМ; П}) = -u_2(\text{ПМ; П}) = \\ = \frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; П}|\text{левое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) \\ +\frac{1}{2}u_1\left(\text{ПМ; П}|\text{правое}\frac{\text{п}}{\text{д}}\right) = \\ = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

В полученной биматричной игре равновесия в чистых стратегиях нет (проверьте самостоятельно!). При этом ее можно решить рассмотренным в первой части учебного пособия методом поиска смешанных равновесий в биматричных играх и с помощью процесса последовательного исключения доминируемых стратегий. Сам по себе процесс поиск равновесия предоставляется читателю, а результат его таков: равновесием в рассматриваемой игре является профиль стратегий $(p_0, q_0) = \left(\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$, а значение игры (ожидаемый выигрыш первого игрока) равен $\frac{1}{4}$.

Построим для нашей игры множество стратегий поведения первого игрока. Пусть в информационном множестве Z^{11} он с вероятностью s выбирает вариант «закончить игру» (а с вероятностью $1 - s$, соответственно, «продолжить»), а в множестве Z^{12} – с вероятностью r он сохраняет карты. Запишем его ожидаемые выигрыши при такой стратегии поведения:

$$\frac{s}{2} + 2\left((1-s)\frac{r}{2}\right) + 0 - \frac{1}{2} = (s-1)\left(\frac{1}{2} - r\right), \text{если } \mu^2 = (3),$$

$$\frac{s}{2}+2\left((1-s)\frac{r}{2}\right)+0+(-2)\frac{r}{2}+0=s\left(\frac{1}{2}-r\right), \text{если } \mu^2=(\Pi).$$

Наилучшим гарантированным результатом первого игрока является минимум из этих двух значений – так как при любой, даже самой неблагожелательной к нему стратегии второго игрока, первый не получит меньше этого значения. Следовательно, максимальная сумма, которую игрок 1 может себе обеспечить, равна:

$$\max_{r,s\in[0,1]}\min\left\{(s-1)\left(\frac{1}{2}-r\right), s\left(\frac{1}{2}-r\right)\right\}.$$

Так как $s\in[0,1]$, то $s-1<0$, и минимум из двух выражений внутри фигурных скобок достигается на выражении $(s-1)\left(\frac{1}{2}-r\right)$. По сути, это означает, что с точки зрения первого игрока, неблагожелательной к нему стратегией второго игрока является стратегия «закончить игру», и логически это объяснимо: если у второго игрока оказалась старшая карта, то эта стратегия сразу приводит к проигрышу первого игрока, если же у него оказалась младшая, то он просто не получает возможности принять решение.

Максимизируем минимальный выигрыш первого игрока: $\max_{r,s\in[0,1]}(s-1)\left(\frac{1}{2}-r\right)=0$, и достигается он при $r=\frac{1}{2}$ (а s уже не играет роли и может быть любым). Здесь важно обратить внимание на один (на самом деле, кажущийся) парадокс: гарантированный выигрыш первого игрока при использовании им смешанных стратегий существенно выше, чем при использовании стратегий поведения. В чем же дело и каковы причины этого противоречия?

Для ответа на этот вопрос полезно преобразовать оптимальную смешанную стратегию к «поведенческому» виду, а оптимальную стратегию поведения – к полному «смешанному» виду. Согласно лемме 10.1, смешанной стратегии $\pi_1=\left(\pi^1_{1,1},\pi^1_{1,2},\pi^1_{2,1},\pi^1_{2,2}\right)$

соответствует стратегия поведения $\beta_1 = (s, r) = \left(\pi^1_{1,1} + \pi^1_{1,2}, \pi^1_{1,1} + \pi^1_{2,1}\right)$. Таким образом, оптимальной смешанной стратегии первого игрока $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ соответствует стратегия поведения $s = r = \frac{1}{2}$, и, в то время как оптимальная смешанная стратегия обеспечивает первому игроку выигрыш $\frac{1}{4}$, даже соответствующая стратегия поведения дает ему только 0. «Корень» этого кажущегося противоречия в независимости принятия решений в каждом информационном множестве, содержащейся в природе стратегии поведения. Действительно, стратегия поведения по своей сути не задает заранее единую «программу действий» игрока на случай любых возможных ситуаций, в которых он может принимать решение, а просто набор рекомендаций, куда перейти из каждого информационного множества – и неважно, каким образом он туда попадет.

Тем не менее, существует класс позиционных игр, в которых поведенческие стратегии и смешанные стратегии эквивалентны, и парадоксов, подобных приведенному выше, не возникает. Интуитивно понятно, что к такому классу игр должны относиться, например, позиционные игры с полной информацией. Однако для того, чтобы понять, почему это так, введем следующе определение.

> ***Определение 10.7***. *Игра G является игрой с полной памятью для игрока с номером a, если из того, что $Z^{aj} \in \mathrm{Rel}\pi^a$ и $x \in Z^{aj}$ следует, что $x \in \mathrm{Poss}\mu^a$ для всех Z^{aj}, x и μ^a.*

Смысл этого определения очень прост – игра является игрой с полной памятью для игрока a, если у него любая вершина из существенного информационного множества является возможной. Название «игра с полной памятью» означает, что каждый игрок, в каждом информационном множестве, помнит всю последовательность сделанных им ходов, а также не забывает все однажды увиденные им ходы его соперников.

Обратите внимание, что рассмотренная ранее модель карточной игры не является игрой с полной информацией с точки зрения игрока 1. Дело в том, что информационное множество Z^{12} существенно для стратегии $\mu^1 = (1{,}2)$, поскольку, если игрок 2 использует стратегию $\mu^2 = (2)$, то позиция $y \in Z^{12}$ реализуется с вероятностью $\frac{1}{2}$. Однако другая позиция $x \in Z^{12}$ не является возможной для стратегии μ^1, так как Играющий, получив старшую карту, заканчивает игру.

Очевидно, что игра с полной памятью для всех игроков превращается в игру с полной информацией, если все ее информационные множества содержат по одной вершине. Для игр с полной информацией, как уже было указано выше, очевидна эквивалентность смешанных стратегий и стратегий поведения. Следующая теорема, доказанная Гарольдом Куном в 1953 году, устанавливает факт такой эквивалентности для любых игр с полной памятью для всех игроков.

Теорема 10.1. *Для всех игр с полной памятью, смешанные и поведенческие стратегии эквивалентны. Точнее говоря: пусть $\beta -$ ситуация в стратегиях поведения, соответствующая произвольной ситуации π в смешанных стратегиях в игре G, в которой все позиции имеют по крайней мере две альтернативы. Тогда для того чтобы $u^a(\beta) = u^a(\pi), a \in A$, для всех π и для любых значений функций выигрыша $u^a(w), a \in A, w \in T$, необходимо и достаточно, чтобы G была игрой с полной памятью для всех игроков.*

Доказательство этой теоремы весьма сложно для восприятия и выходит за рамки вводного курса Теории игр. Тем не менее, заинтересованный читатель может найти его в книге Васина (2005).

Таким образом, в играх с полной памятью при поиске равновесий можно ограничиться поиском только в стратегиях поведения.

Приложение II. Задачи для самостоятельного решения по темам, входящим в главы 6–10

1. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [0,2]$, $y \in [0,1]$ задана функциями выигрыша $F(x,y) = 8xy - x^2$, $G(x,y) = (x-y)^2 - x^2 + 3xy - 2y$. Найти равновесия Нэша.

2. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,1]$, $y \in [-2,2]$ задана функциями выигрыша

$$F(x,y) = 2xy - x^2,\ G(x,y) = 2y^2 + 6xy - 7.$$

Найти равновесия Нэша.

3. (Захаров, 2010). На необитаемом острове живут два туземца. Их единственное богатство – бананы. У первого туземца в наличии 8 бананов, у второго – 10. Каждый туземец может либо съесть банан, либо принести его в жертву местному божеству, ответственному за хорошую погоду на острове. Пусть x_i – количество съеденных бананов, g_i – количество бананов, принесенных в жертву. Выигрыш каждого туземца равен $U_i = a_i \ln x_i + \ln(g_1 + g_2)$. Сформулируйте конфликт туземцев в виде игры в нормальной форме и найдите получающиеся в ней равновесия Нэша.

4. Рассмотрим игру на плоскости ($X = Y = \mathbb{R}$) со следующими функциями выигрыша игроков:

$$F(x,y) = -x^2 - xy - \beta x,$$

$$G(x,y) = -y^2 + \alpha xy + y,$$

где $x \in X$ – стратегия первого игрока, $y \in Y$ – стратегия второго. При каких значениях параметров α и β существует равновесие по Нэшу? При каких значениях параметров оно будет единственным? В каком случае в равновесии будет максимизирована суммарная полезность игроков (то есть $\max_{x,y\in\mathbb{R}}\{F(x,y) + G(x,y)\}$)?

5. (Модель горизонтальной конкуренции Гарольда Хотеллинга). Между некоторыми городами A и B построена дорога длиной 100 километров. По дороге едет очень большое количество автомобилей. Формально будем полагать, что автомобилей континуум, а их общий «вес» равен единице. Введем на дороге систему координат с началом отсчета в городе А: городу А соответствует координата 0, городу В – 100 км. Будем считать, что автомобили распределены по дороге равномерно: то есть для каждого $x \in [0,100]$ доля автомобилей с координатами $v \leq x$ равна $x\%$. Две фирмы намереваются построить на этой дороге по заправке, их стратегиями является выбор координаты $x_i \in [0,100]$ – то есть на каком километре трассы следует расположить их АЗС. Цена на бензин у обеих фирм одинаковая (не ограничивая общности, положим ее равной единице) и не зависит от их местоположения. Предположим, что каждый автомобилист предъявляет спрос ровно на одну единицу топлива. При этом он купит бензин у той фирмы, чья заправка расположена ближе к его координате. В том случае, если заправки равноудалены от автомобилиста, он с равной вероятностью может выбрать любую из фирм. Пусть выигрыш фирмы равен доле автомобилистов, которые приобрели у нее бензин.

a. Построить игру в нормальной форме для данного взаимодействия и найти равновесные координаты для обеих заправок.
b. Как изменится равновесное расположение заправок, если распределение водителей задается функцией $F(x)$, описывающей долю автомобилей с координатами $v \leq x$?

6. На рынке действует фирма-лидер и фирма-ведомый. Каждая из них характеризуется технологией производства, при которой издержки производства являются линейной функцией от производимого объема: $c_1(q) = 5q$ у лидера и $c_2(q) = q$ у ведомого. Прибыль фирм определяется обычным образом – как разность выручки за проданный товар (произведение объема проданного товара на цену за его единицу) и издержек производства.

Записать взаимодействие фирм как иерархическую игру, найти наилучший гарантированный результат лидера и стратегию, его реализующую, если спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0; 11 - p\}$.

7. На рынке действует фирма-лидер и фирма-ведомый. Каждая из них характеризуется технологией производства, при которой издержки производства являются линейной функцией от производимого объема: $c_1(q) = 2q$ у лидера и $c_2(q) = 4q$ у ведомого. Прибыль фирм определяется обычным образом – как разность выручки за проданный товар (произведение объема проданного товара на цену за его единицу) и издержек производства. Записать взаимодействие фирм как иерархическую игру, найти наилучший гарантированный результат лидера и стратегию, его реализующую, если спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0; 36 - p\}$.

8. На рынке действует фирма-лидер и фирма-ведомый. Каждая из них характеризуется технологией производства, при которой издержки производства являются линейной функцией от производимого объема: $c_1(q) = 3q$ у лидера и $c_2(q) = 5q$ у ведомого. Прибыль фирм определяется обычным образом – как разность выручки за проданный товар (произведение объема проданного товара на цену за его единицу) и издержек производства. Записать взаимодействие фирм как иерархическую игру, найти наилучший гарантированный результат лидера и стратегию, его реализующую, если спрос на рынке задан функцией $D(p) = \max\{0; 23 - p\}$.

9. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [0,2]$, $y \in [0,1]$ задана функциями выигрыша

$$F(x,y) = 4xy - \frac{x^2}{2} + 3,\ G(x,y) = -2y + xy + y^2.$$

Найти наилучший гарантированный результат игрока-лидера в играх Γ_1, Γ_2.

10. Игра двух лиц на прямоугольнике $x \in [-1,1]$, $y \in [-2,2]$ задана функциями выигрыша

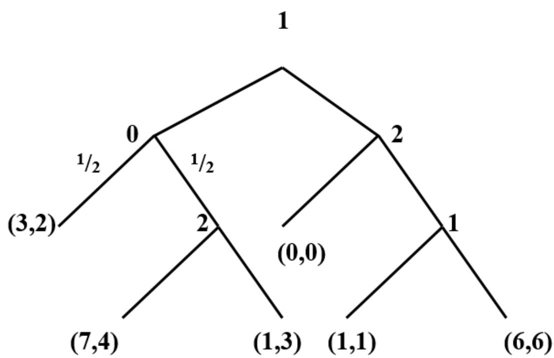
$$F(x,y) = xy - \frac{x^2}{2} + 2,\ G(x,y) = y^2 + 3xy + 5.$$

Найти наилучший гарантированный результат игрока-лидера в играх Γ_1, Γ_2.

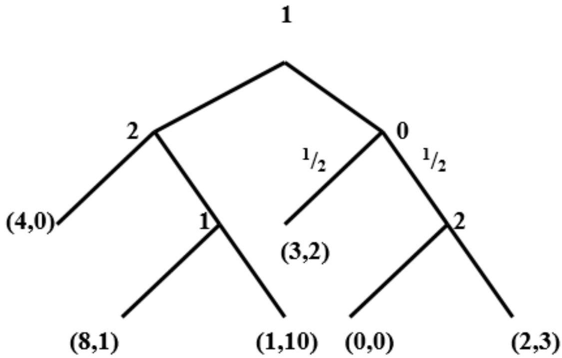
11. Построить функции наилучшего ответа и найти все ситуации равновесия игры на прямоугольнике $X = [-1,1], Y = [-1,1]$ с функциями выигрыша $F(x,y) =- 3x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x$, $G(x,y) =- 2x^2 - 5xy - 3y^2 - y$.

Найти наилучший гарантированный результат игрока-лидера в играх Γ_1, Γ_2, используя данную игру как «базовую», сравнить с его выигрышем в равновесии Нэша в «базовой» игре.

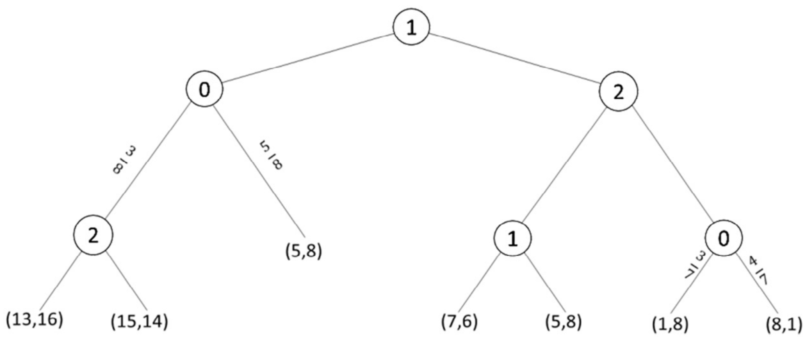
12. Для позиционной игры, заданной деревом, написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша:



13. Для позиционной игры, заданной деревом, написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша:

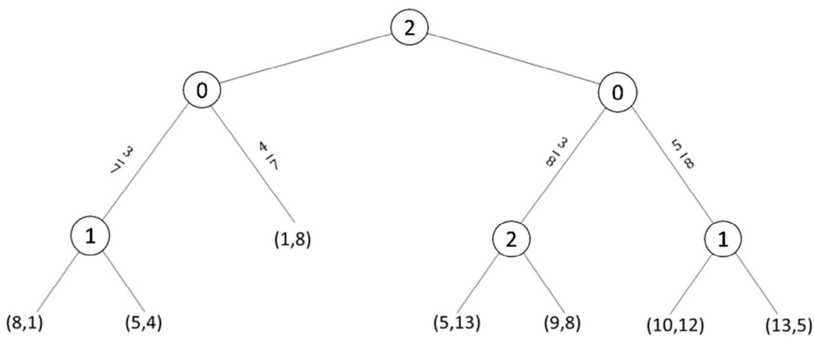


14. Для позиционной игры, заданной деревом:



написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша.

15. Для позиционной игры, заданной деревом:



написать нормальную форму, найти совершенное подыгровое равновесие и другие равновесия Нэша.

16. Каждое из пяти предприятий, использующих воду из природного водоема, располагают двумя стратегиями: построить сооружения для полной очистки отработанной воды, затратив при этом 2 условных единицы, или же сбросить ее через имеющиеся очистные сооружения без биологической очистки и не понести затрат на дополнительную очистку воды. Особенности водоема и технологических процессов предприятий таковы, что в случае, когда не полностью очищенную воду сбрасывает не более двух предприятий, вода в водоеме остается пригодной для использования и предприятия убытка не несут. Если же не полностью очищенную воду сбрасывают не менее трех предприятий, то каждый пользователь водоема несет убытки в размере семи единиц. Найдите совершенное подыгровое равновесие в получающейся игре, если предполагается, что фирмы принимают решение о своей экологической стратегии последовательно (с 1 по 5), и каждая последующая фирма может наблюдать решения всех предыдущих.

17. Три эрудита – Вассерман, Друзь и Козлов – вышли в финал «Своей игры». На этот момент Вассерман набрал 20 тысяч рублей, Друзь – 15 тысяч, а Козлов – 12 тысяч. Игрокам предлагается 5 возможных тем финального раунда на выбор: «Автомобили», «Политика», «Спорт», «Искусство» и «Математика». Игроки по очереди (по возрастанию сумм на счете, начиная с отстающего) убирают по одной не понравившейся им теме до тех пор, пока не останется одна. Все игроки идут «ва-банк» и ставят все свои выигрыши на кон, после чего ведущий задает вопрос на оставшуюся тему. Знания игроков в различных областях отличаются, поэтому в зависимости от темы вероятности правильно ответить на вопрос различаются. Вероятности правильного ответа игроками на вопрос по каждой из тем приведены в следующей таблице:

Игрок	Авто-мобили	Политика	Спорт	Искусство	Матема-тика
Вассерман	40%	80%	20%	50%	90%
Друзь	50%	20%	50%	90%	60%
Козлов	80%	50%	70%	60%	20%

Если игрок правильно отвечает на вопрос, то его ставка выигрывает, и он удваивает свой исходный выигрыш, если ошибается – теряет все.

a. Найдите совершенное подыгровое равновесие в получающейся позиционной игре.

b. Пусть на первом шаге вместо одного из игроков делает ход случай – Ведущий случайным образом с равной вероятностью убирает одну из пяти исходных тем. Каким будет СПР в модифицированной таким образом игре?

18. Пять студентов должны пересдавать зачет по теории игр. Чтобы усложнить профессору жизнь, они за день до сдачи решают не подписывать свои работы. Узнав об этом, профессор сообщает, что не собирается выяснять, кто является автором каждой из работ. Однако он готов поставить зачеты всем пятерым, если более половины работ будут оценены на проходной балл и выше. Если же таких работ будет меньше половины, то зачет не получит никто. В день сдачи студенты пишут свои работы последовательно, при этом каждый из них на момент начала работы уже знает, как написали его предшественники. Написать работу выше проходного балла для каждого студента стоит определенных усилий, потери от которых студент оценивает в 2 единицы. Если же студент принимает решение «не напрягаться», то он не несет никаких потерь. При этом получение зачета принесет каждому из студентов 5 единиц полезности, а неполучение – столько же единиц потерь. Найдите совершенное подыгровое равновесие в получающейся позиционной игре.

19. На кафедре экономики в некотором университете пять профессоров. Секретарь кафедры просит каждого скинуться по 100 рублей для фуршета после заседания кафедры. Для того, чтобы фуршет состоялся, необходимо, чтобы скинулось как минимум три профессора. Деньги, отданные на организацию фуршета, профессорам не возвращаются. Ценность фуршета для каждого профессора – 500 рублей. Профессора 1 и 2 сдают деньги первыми (по очереди). Затем, решение (сдавать или не сдавать) одновременно принимают профессора 3–5, причем они не наблюдают решения 1 и 2. Найдите совершенное подыгровое равновесие.

20. («Сжигание мостов»; Захаров, 2010). Генерал командует армией, который защищает город, находящийся на берегу реки. Между городом и другим берегом проложен мост, по которому армия может, при необходимости, отступить. На город готовится напасть вражеская армия. Генерал имеет возможность уничтожить мост до того, как враг решится атаковать (B), или не уничтожать мост (N). После того, как враг наблюдает действие генерала, он решает, атаковать город (A), или нет (S). Если враг напал и мост не уничтожен, то генерал может либо принять решение сражаться (F), либо отступить (R). Если мост уничтожен и враг напал, то генерал может только сражаться. Выигрыш каждой стороны составляет 10, если на конец игры она обладает городом, но сражения не произошло; 0 если сражения не было, но сторона осталась без города; и -5, если было сражение. Найти совершенное подыгровое равновесие, привести игру к нормальной форме и найти остальные равновесия Нэша (или продемонстрировать, что их нет).

21. Правительство некоторого государства хочет оказать финансовую помощь одному из двух крупнейших университетов страны. Для того, чтобы определить, какому университету достанется финансовая помощь и в каком объеме, ректорам этих университетов предлагается сыграть в следующую игру. Сначала правительство предлагает первому ректору 1 доллар. Если ректор соглашается, то на этом игра заканчивается, причем первый уни-

верситет получает 1 доллар, а второй – ничего. Если первый ректор отказывается, то правительство предлагает второму ректору 10 долларов. Если второй ректор соглашается, то на этом игра заканчивается, второй университет получает 10 долларов, а первый – ноль. И так далее до тех пор, пока правительство предложит 100 000 000 долларов. Если первый ректор откажется от этой суммы, то на этом все закончится, и ни один университет ничего не получит. Найти совершенное подыгровое равновесие в игре.

22. («Девятнадцать»; Захаров, 2010). Два игрока по очереди называют числа от 1 до 3. Все названные числа суммируются. Когда сумма стала равна или превысила 19, игра останавливается. Игрок, на котором остановилась игра, объявляется проигравшим, другой игрок – победителем. Найдите совершенное подыгровое равновесие.

23. Фирма 1 является монополистом на рынке некоторого товара. Фирма 2 рассматривает возможность входа на этот рынок. Она может либо войти на рынок, либо отказаться от этой идеи. Если она принимает решение конкурировать с монополистом, то обе фирмы должны одновременно решить, высокую или низкую цену на свои услуги они устанавливают.

Платежи в этой игре устроены следующим образом. Если фирма-новичок решает не входить на рынок, то она получает 0, а монополист продолжает получать прибыль в размере 2. Если новичок входит на рынок, то все зависит от установленных фирмами цен на свадебные услуги. Если обе фирмы устанавливают одинаковые цены, то каждая из них получает 1 в случае выбора высоких цен и –1 в случае выбора низких цен. Если же одна фирма устанавливает высокую цену, а другая – низкую, то фирма, установившая высокую цену, получает 0, а фирма, установившая низкую цену, получает –1.

Запишите данную игру в виде игры в нормальной форме и в виде игры в развернутой форме. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях и совершенные подыгровые равновесия.

24. («Хороший, Плохой, Злой»; Захаров, 2010). Три искателя приключений – Блондин, Ангельские Глазки и Туко – устроили дуэль на кладбище, где зарыт миллион долларов. Туко попадает в цель с вероятностью 40%. Ангельские Глазки попадает с вероятностью 80%. Блондин никогда не промахивается. Дуэль реализуется как двухпериодная игра. Каждый выбирает, в кого выстрелить, и стреляет. Оставшиеся в живых после первого выстрела делают еще один выстрел. Затем те, кто остался жив, делят золото поровну между собой. Ценность всего золота для одного игрока равна единице. Выигрыш погибшего равен нулю. Найдите совершенное подыгровое равновесие.

25. (Васин, 2005). Рассмотрим модификацию карточной игры, рассмотренной в примере 9.1. Первым делает ход игрок 2. Он выбирает вариант расклада двух карт (старшей и младшей) Стартующему и себе. Стартующий, не зная расклада, может оставить карты в прежнем положении, либо поменять их местами. Затем, Финиширующий, наблюдавший за действиями Играющего, также может выбрать одну из двух альтернатив: не трогать карты, либо поменять их местами. Игрок, имеющий в итоге старшую карту, получает от другого игрока доллар и дополнительную сумму, определяемую по следующему правилу. Если игрок 1 имеет старшую карту в результате одного (или двух) ее перемещений, то он получает от игрока 2 дополнительно два (или три) доллара. В аналогичной ситуации игрок 2 получает от игрока 1 дополнительно один доллар (или два доллара). Если после раздачи, карты не перемещались, то дополнительные выплаты не производятся. Найти равновесные стратегии игроков.

26. («Семейный совет»; Дагаев, Сонин и др., 2017). Папа, мама и Вовочка решают, что смотреть по единственному на даче телевизору. По Первому каналу показывают шоу «Голос», по НТВ – футбольную Лигу Чемпионов, а по «Культуре» – запись спектакля «Юнона и Авось» 1983 года. Предпочтения у всех различаются. Папа больше всего хочет смотреть «Голос», а меньше

всего – «Юнону и Авось», которую он уже однажды посмотрел в Ленкоме в 1983 году – зачем же смотреть второй раз? Маме очень дорог ее 1983 год, год свадьбы, и все связанные с этим событием воспоминания. Поэтому она хочет снова пережить тот вечер, когда они познакомились с папой на спектакле «Юнона и Авось». А меньше всего маму интересует футбол. Вовочка больше всего хочет посмотреть футбол – он и сам мечтал в детстве сыграть однажды в Лиге Чемпионов. При этом Вовочка терпеть не может непрофессиональное, на его вкус, пение любителей из «Голоса». Решение о том, что сегодня смотреть, принимается голосованием. Каждый член совета должен проголосовать ровно за одну из них. Если есть альтернатива, которая набрала больше одного голоса, то она реализуется, в противном случае реализуется та альтернатива, за которую проголосовал папа. Выигрыши каждого участника голосования задаются одним и тем же образом: если выбирается наиболее подходящая ему альтернатива, то он получает одну единицу полезности, если вторая по предпочтительности – то ноль, если наименее подходящая, то минус одну единицу. Голосование открытое и последовательное: сначала свой выбор объявляет вслух один член семьи, после него – второй и, наконец, третий. Порядок голосования определяет папа. Какой порядок он выберет, если ожидает, что после оглашения порядка голосование проходит в виде позиционной игры с полной информацией?

Литература

1. Алескеров Ф.Т. Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций − Доклады Российской академии наук. 2007. Т. 414. № 5. С. 594–597.
2. Блекуэл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. − М.: Иностранная литература, 1958.
3. Васин А.А. Модели процессов с несколькими участниками. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
4. Васин А.А. Модели динамики коллективного поведения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
5. Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС Пресс, 2005.
6. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2005.
7. Вартанов С.А. Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций – Математическая теория игр и ее приложения, 2012, Т. 4. Вып. 1. С. 3–21.
8. Вартанов С.А. Модель электорального поведения – Математическая теория игр и ее приложения, 2013, Т. 2. Вып. 1. С. 3–26.
9. Вартанов С.А., Васин А.А., Сосина Ю.В. Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций – Математическое моделирование, 2012 – Т. 25. Вып. 4. С. 44–64.
10. Вартанов С.А., Васин А.А., Сосина Ю.В. Об устойчивости равновесий в модели эндогенного формирования коалиций – XIII Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. В четырех книгах. Книга 1. Отв. ред. Е. Ясин. М.: НИУ ВШЭ, 2012, С. 203–215.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. − М.: Советское радио, 1981.
12. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. − М.: Наука, 1990.
13. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.

14. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

15. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

16. Гермейер Ю.Б. Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов. ДАН, 1971, v. 198, т. 5, с. 1001–1004.

17. Горелик В.А. Теория игр и исследование операций. М: Изд-во МИНГП, 1978.

18. Давыдов Э.Г. Исследование операций. − М.: Высшая школа, 1990.

19. Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках: учебник для вузов. М.:НИУ ВШЭ, 2015.

20. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

22. Кононенко А.Ф., Новикова Н.М. Обзор развития игр Гермейера. В сб. «Программное оборудование и вопросы принятия решений». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989, с. 201–210.

23. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

24. Кун Г.У. Позиционные игры и проблема информации. В сб. [36], с. 13–40.

25. Льюс Р. и Райфа Х. Игры и решения. Введение и критический обзор. М.: Иностранная литература, 1961.

26. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1960.

27. Матричные игры. Сб. статей под ред. Н.Н.Воробьева. М.: Физматгиз, 1961.

28. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

29. Мулен Э. Теория игр. С примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 273

30. Нейман Дж. фон., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

31. Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр. В сб. [27], с. 174–204.

32. Нэш Дж. Бескоалиционные игры. В сб. [27] , с. 205–221.

33. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

34. Петров А.А.Б, Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.

35. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.

36. Позиционные игры. Сб. статей под ред. Н.Н. Воробьева. М.: Наука, 1967.

37. Савватеев А.В. Анализ коалиционной устойчивости «биполярного мира» – Журнал Новой экономической ассоциации, 2012, № 1(17), с. 10–43.

38. Савватеев А.В. Миграционно-устойчивая организация одномерного мира: теорема существования решения – Известия Иркутского государственного университета, Серия «Математика», 2013. Т. 6, № 2. С. 57–68.

39. Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г. Л.: Наука, 1976.

40. Теория игр. Аннотированный указатель публикаций отечественной и зарубежной литературы за 1969−1974 гг. Л.: Наука, 1980.

41. Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры. В сб. [27], с. 167–172.

42. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules – Economic Theory. 2008. V. 34(3). P. 525–543.

43. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. Stability under unanimous consent, free mobility and core – International Journal of Game Theory. 2007. V. 35(2). P. 185–204.

44. Borel E. 1) The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels. 2) On games that involve chance and skill of the players. 3) On system of linear forms of skew symmetric determinants and the general theory of play. Econometrica, 1953, v. 21, № 1, p. 97–117.

45. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions of surfaces. Amsterdam Proc., 1909, v. 11, continued in 1910, v. 12,13.

46. Cournot A.A. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des riches. Paris, 1838.

47. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. "Almost" subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting – Journal of Economic Theory. 2008. V. 143. P. 275–291.

48. Dreze J., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. A Problem of Football Bars: Vertically and Horizontally Differentiated Public Goods – X Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. Т. 2. М.: ИД ГУ ВШЭ. 2010. С. 86–90.

49. Fundenberg D., Tirole J. Game Theory. − Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1996.

50. Gilles D.B. Solutions to general non-zero-sum games. Contributions to the theory of games. IV (Kuhn H.W., Tucker A.W. eds.). Ann. Math. Studies, № 40, Princeton: Princeton Univ. Press, 1959, p. 47–86.

51. Handbook of Game Theory with economic applications, Vol. I and II. (R.J. Aumann and S. Hart eds.). Amsterdam − Lausanne − New York − Oxford − Shannon − Tokyo: Elsevier, 1994.

52. Kakutani S. A generalization of Brower's fixed point theorem. Duke Math. J., 1941, v. 8, № 3, p. 457–459.

53. Knaster B., Kuratowski C., Masurkievicz S. Ein Beweis des Fixpunktsatzes fur n-dimensionale Simplexe. Fund. Math., 1929, B. 14, S. 132–137.

54. Lemke C.E., Howson J.J.Jr. Equilibrium points of bimatrix games. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1961, v. 47, p. 1657–1662.

55. Novchek W. On the existence of Cournot equilibrium. Review of Economic Studies, 1985, v. 52, p. 85–98.

Учебное издание

Вартанов Сергей Александрович

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Учебное пособие для студентов 2 курса специальности 38.03.01 «Экономика» (уровень бакалавриата)

Подготовка оригинал-макета
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н. С. Давыдова*
Корректор : *А. А. Лиманов*
Обложка: *М. А. Еронина*

Подписано в печать 03.04.2018 г.
Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 8,75.
Тираж 116 экз. Изд. № 070.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.