МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ (факультет)

Учебная программа утверждена
решением Ученого совета МШЭ МГУ
Протокол №_____ от «__» _____ 20__ г.

Рабочая программа дисциплины

«СОВРЕМЕННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

Направление подготовки 38.04.01 Экономика

для подготовки магистров очного отделения

Авторы -- составители программы:

Полтерович Виктор Меерович, академик РАН, д.э.н., профессор

Пресман Эрнст Львович, д.ф.- м.н.

Учебная программа утверждена
решением кафедры _____МШЭ МГУ
Протокол №_____ от «__» _____ 20__ г.

МОСКВА
- 2019 -

I. Название дисциплины: «СОВРЕМЕННЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»;

II. Шифр дисциплины:

III. Цели и задачи дисциплины:

А. Цели дисциплины;

Целями освоения дисциплины «Современный математический инструментарий экономического анализа» являются формирование и усвоение знаний, умений и навыков в области применения современного математического аппарата к экономической теории и практике, которые необходимы для работы в государственных и частных структурах, а также развитие профессиональных качеств, компетенций, необходимых для выполнения функциональных обязанностей в сфере экономики.

Б. Задачи дисциплины;

В результате освоения дисциплины «Современный математический инструментарий экономического анализа» студент должен:

- Знать основные математические методы, применяемые при моделировании экономических явлений, такие как выпуклое программирование, принцип максимума, динамическое программирование, векторная оптимизация, теоремы о неподвижных точках.
- Уметь грамотно пользоваться этими методами при разработке и исследовании экономико-математических моделей.
- Иметь навыки решения обыкновенных дифференциальных уравнений, решения конкретных задач оптимального управления и динамического программирования, нахождения равновесий.

IV. Место дисциплины в структуре ООП

А. Информация об образовательном стандарте и учебном плане:

— тип образовательного стандарта и вид учебного плана: ММ
– направление подготовки (в соответствии с образовательным стандартом): 38.04.01 «Экономика»:
— наименование учебного плана: ММ_Экономики_МШЭ;
— профиль подготовки: магистерская программа.

Б. Информация о месте дисциплины в образовательном стандарте и учебном плане:

— вариативная часть.
— обязательный курс
— первый курс
— первый семестр;

В. Перечень дисциплин, которые должны быть освоены для начала освоения данной дисциплины:

Математический анализ, Линейная алгебра, Макроэкономика I, II, Микроэкономика I, II.

Для освоения данной дисциплины студент должны владеть следующими знаниями и компетенциями: понимать структуру математического доказательства, вычислять производные и интегралы, знать их геометрическую интерпретацию, знать свойства матриц, уметь вычислять определители и решать системы линейных уравнений, владеть базовыми понятиями макро- и микроэкономики.

Г. Общая трудоемкость -- 108 ак. часов;

Д. Форма промежуточной аттестации –письменный экзамен с последующим разбором;

V. Формы проведения:

А. Для дисциплин:

— форма занятий с указанием суммарной трудоемкости по каждой форме:

Лекции -- 32 ак. часов;

семинары -- 32 ак. часов;

самостоятельная работа -- 76 ак. часов;

— формы текущего контроля -- контрольные работы – 2 контр. работы по 2 ак. часа;

VI. Распределение трудоемкости по разделам и темам, а также формам проведения занятий с указанием форм текущего контроля и промежуточной аттестации:

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины / Наименование разделов (этапов) практики	Трудоемкость (в ак. часах) по формам занятий				Формы контроля
		Аудиторная работа			*Самостоятельная работа*	
		Лекции	-	*Контрольная работа/коллоквиум*		
1	Введение: История и роль математики в экономической теории	2			6	
2	Элементы выпуклого анализа	2	4		4	
3	Элементы выпуклого программирования	4	4	2	8	
4	Дифференциальные уравнения и теория устойчивости	6	6	2	12	
5	Принцип максимума и динамическое программирование в непрерывном времени	6	6		18	
6	Принцип максимума и динамическое программирование в дискретномном времени	6	6		12	
7	Стохастическое управление.	2	2		4	
8	Теоремы о неподвижной точке	2	2		6	
9	Парето-оптимальность	2	2		6	
	Итого	**32**	**32**	**4**	**76**	

VII. Содержание дисциплины по разделам и темам (этапам) – аудиторная и самостоятельная работа:

Тема 1. Введение

Математика в экономической теории: история и роль.

Литература по теме: [1].

Раздел I. Выпуклое программирование

Тема 2. Элементы выпуклого анализа.

Выпуклые множества. Выпуклые многогранники. Выпуклость потребительских и технологических множеств.

Свойства выпуклых множеств. Пересечение, геометрическая сумма и прямое произведение выпуклых множеств. Размерность выпуклых множеств. Крайние точки. Теоремы отделимости.

Выпуклые (вогнутые) функции. Квазивыпуклые (квазивогнутые) функции. Условия выпуклости (вогнутости) в дифференциальной форме. Функции полезности и производственные функции, смысл предположений о вогнутости и квазивогнутости.

Свойства выпуклых и квазивыпуклых функций. Непрерывность и дифференцируемость выпуклых функций

Литература по теме: [1], [4], [9], [10], [18], [13]-[15]

Задания для самостоятельной работы

Задачи на выпуклость множеств

1. Найти расстояние между точками $x = (3, -5, 1)$ и $y = (5, -4, 3)$
2. Являются ли ортогональными вектора $x = (3, -5, 1)$ и $y = (1, -1, -8)$
3. Является ли подпространством множество $2x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$?
4. Доказать, что гиперплоскость (т.е. множество $(a, x) = const$) выпуклое множество.
5. Доказать, что множество $(a, x) \geq 0$ выпуклое.
6. Доказать, что выпуклое множество содержит выпуклые комбинации любого числа своих точек.
7. Доказать, что пересечение выпуклых множеств выпукло.
8. Доказать, что если X и Y выпуклы, то их алгебраическая сумма (сумма Минковского) выпукла.
9. Найти алгебраическую сумму круга единичного радиуса с центром в нуле и отрезка, соединяющего точки $(-1, 1)$ и $(1, 1)$.

10. На плоскости нарисовать множество F, которое является алгебраической суммой четырехугольника с вершинами в точках $A = (2,0)$, $B = (0,3)$, $C = (-2,0)$, $D = (0,-3)$, и отрезка, соединяющего точки $E = (2,-1)$ и $G = (4,0)$. Найти множество точек максимума линейной функции $f(x,y) = x - 2y$ на множестве F и указать его значение.

11. Множество A это пересечение круга радиуса 6 с центром в нуле и множества $y^2 - x^2 \geq 9$. Построить выпуклую оболочку.

12. Множество A определяется неравенствами: $ye^x \geq 1$, $1000x + y \leq 1000$. Является ли оно выпуклым? Ограниченным? Какова его размерность?

13. Является ли множество на плоскости: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = 1$ выпуклым? Является ли оно ограниченным? Какова его размерность? Каковы его граничные точки, внутренние точки, крайние точки?

14. Является ли множество на плоскости: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ выпуклым? Является ли оно ограниченным? Какова его размерность? Каковы его граничные точки, внутренние точки, крайние точки?

15. Является ли множество на плоскости: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $xy \geq 1$ выпуклым? Является ли оно ограниченным? Какова его размерность? Каковы его граничные точки, внутренние точки, крайние точки?

16. Является ли множество : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + 2y + 3z = 1$ выпуклым? Является ли оно ограниченным? Какова его размерность? Каковы его граничные точки, внутренние точки, крайние точки?

Задачи на выпуклость функций

1. Доказать, что сумма выпуклых функций выпукла.

2. Привести пример квадратичной формы, которая ни положительно ни отрицательно определена.

3. При каких значениях параметра a функция $f(x) = (1 - x^2)^2 + 2ax^2y$ будет строго выпуклой?

4. При каких значениях параметра a функция $f(x) = e^{-x} + ax^3$ будет строго выпуклой?

5. Выпукла ли функция $f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$?

6. При каких значениях параметра a функция $f(x,y) = 3x^2 - axy + ay^2 + 5a^2x - 5ay$ будет строго выпуклой?

7. При каких значениях параметра a функция $f(x,y) = 2axy + y^2 + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ будет выпуклой?

8. При каких значениях параметра a функция $f(x,y) = 2axy + y^2 + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ будет выпуклой?

9. При каких значениях параметра a функция $f(x,y) = 2axy + y^4 + x^2$ будет выпуклой?

10. При каких значениях параметров a и b функция $f(x,y) = -x + 4y + ax^2 + y^2 + 2bxy$ будет выпуклой?

Тема 3. Элементы выпуклого программирования.

Экстремальные задачи. Локальный и глобальный оптимум.

Максимизация без ограничений; необходимые и достаточные условия оптимальности.

Задача выпуклого программирования. Функция Лагранжа, её седловые точки. Теорема Куна—Таккера для задач выпуклого программирования. Интерпретация множителей Лагранжа. Условие Слейтера. Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи выпуклого программирования в дифференциальной форме.

Теорема о маргинальных значениях для задач выпуклого программирования, её экономический смысл.

Экономические приложения: функции спроса и предложения, модель Рамсея в дискретном времени.

Литература по теме: [3], [4], [9], [10], [12], [18]

Задания для самостоятельной работы

Задача на функции спроса

1. Функция полезности двух товаров $U(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2) + 2\sqrt{x_1 x_2})$. Доход потребителя равен z. Найти функцию спроса на каждый товар.
2. Функция полезности двух товаров $U(x_1, x_2) = ax_1 + 2\sqrt{x_2}$ $(a > 0)$. Доход потребителя равен z. Найти функцию спроса на каждый товар.
3. Функция полезности двух товаров $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_2(2x_1 + \varepsilon x_2)}$. Доход потребителя равен z. Найти функцию спроса на каждый товар.

Раздел 2. Принцип максимума и динамическое программирование

Тема 4. Дифференциальные уравнения и теория устойчивости

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Существование и единственность решений. Линейные дифференциальные равнения с постоянными коэффициентами. Дифференцируемость решений дифференциальных уравнений по параметру.

Проблема устойчивости. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Первый метод Ляпунова. Второй метод Ляпунова. Устойчивость регулирования цен.

Литература по теме: [16], [17]

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие уравнения с разделяющимися переменными

1) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$,

2) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$,

3) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2; \; y(x) \to -1$ при $x \to 0$,

4) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; \; y(2) = 0$,

5) $xy' + y = y^2; \; y(1) = 0,5$,

6) $2x^2yy' + y^2 = 2$,

7) $y' - xy^2 = 2xy$,

8) $e^{-s}\left(1 + \dfrac{ds}{dt}\right) = 1$,

9) $z' = 10^{x+z}$,

10) $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$,

11) $y' = \cos(y-1)$,

12) $y' - y = 2x - 3$,

13) $(x+2y)y' = 1; \; y(0) = -1$,

14) $y' = \sqrt{4x+2y-1}$. .

Решить линейные дифференциальные уравнения

1) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$,

2) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$,

3) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos 2t$,

4) $\ddot{x} + x = e^t + t$,

5) $\ddot{x} + x = \cos t$

6) $\ddot{x} - x = e^t$,

7) $\dot{x} + x = 1$,

8) $\dot{x} + x = \sin t$,

9) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 2te^{-2t}, \quad x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 1$,

10) $\ddot{x} + x = 2, \quad x(0) = 0, \; x(\pi) = 1$,

11) $\ddot{x} + x = f(t)$. Указание: рассмотрите систему $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 + x_1 = f(x)$, проверьте, что фундаментальная матрица однородного уравнения имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix}, \qquad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & -\sin t \\ \sin t, & \cos t \end{pmatrix}$$

и воспользуйтесь методом вариации постоянных.

Задачи на устойчивость

1. При каких значениях параметра a система линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = ax - y, \; \dot{y} = x + ay$ асимптотически устойчива?

2. **(15)** Устойчива ли система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -x + z, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = \frac{1}{2}x + y - z \;\; ?$$

3. При каких значениях параметров a и b система линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = -x + ay, \; \dot{y} = ax - y + bz, \; \dot{z} = by - z$ асимптотически устойчива?

4. На плоскости в области $x < y^2$ дана система нелинейных дифференциальных уравнений: $\dot{x} = \ln(-x+y^2), \; \dot{y} = x - y - 1$. Найти все ее положения равновесия и выяснить их устойчивость в линейном приближении.

5. На плоскости в области $x > 0$ дана система нелинейных дифференциальных уравнений: $\dot{x} = e^{-2y} - x, \; \dot{y} = -y + \ln x$. Найти все ее положения равновесия и выяснить их устойчивость в линейном приближении.

6. На плоскости в области $x > -1$ дана система нелинейных дифференциальных уравнений: $\dot{x} = -y + \ln(1+x), \; \dot{y} = -2x^2 + e^y$. Найти все ее положения равновесия и выяснить их устойчивость в линейном приближении.

Тема 5. Принцип максимума

Задачи оптимального управления в непрерывном времени. Модели оптимального экономического роста, модель Рамсея на конечном и бесконечном временных интервалах.

Принцип максимума как необходимое условие оптимальности. Интерпретация двойственных переменных. Достаточность принципа максимума для выпуклых задач.

Классическая задача вариационного исчисления в непрерывном времени. Уравнение Эйлера и принцип максимума.

Связь между принципом максимума и теоремой Куна-Таккера

Литература по теме: [3], [5], [6], [8], [19]-[21].

Задания для самостоятельной работы

Задачи на вариационное исчисление

1 $J = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + tx)dt \longrightarrow \text{extr}; \qquad x(0) = x(1) = 0;$

2 $J = \int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)dt \longrightarrow \text{extr}; \qquad x(1) = x(e) = 0;$

3 $J = \int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + \dot{x}x)dt \longrightarrow \text{extr}; \qquad x(1) = 0,\ x(e) = 1;$

4 $J = \int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2)dt \longrightarrow \text{extr}; \qquad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi;$

5 $J = \int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t)dt \longrightarrow \text{extr}; \qquad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi;$

Модель Рамсея в непрерывном времени

1 Найти решение в модели Рамсея с непрерывным временем

$$J = \int\limits_0^T e^{-rt} u^{1/3}\, dt \to \max, \quad \dot{x} = -u, \quad x(0) = 1, \quad u \geq 0.$$

Каково значение капитала $x(T)$ в конце периода?

2 Найти решение в модели Рамсея с непрерывным временем

$$J = \int\limits_0^T e^{-rt}\sqrt{u}\, dt \ \left[+\frac{x(T)}{12}\right] \to \max, \quad \dot{x} = kx - u, \quad [\dot{x} = x - u,]$$

$x(0) = 1, \quad x(T) \geq 0, \quad u \geq 0 \quad (k \neq 2r).$

3 Найти решение в модели Рамсея с непрерывным временем

$$J = \int\limits_0^T e^{-rt}\frac{u-1}{u}\, dt \to \max, \quad \dot{x} = ax - u, \quad x(0) = 1, \quad x(T) \geq 0, \quad u \geq 0, \quad a > 0.$$

Модель Рамсея в дискретном времени

1) Найти решение трехпериодной дискретной модели Рамсея

$$\sum_{t=0}^{2} \beta^t \ln u_t + x_3 \to \max, \quad x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad t = 0, 1, 2, \quad x_0 = 1 \quad (0 < \beta < 1)$$

(x_t — капитал, u_t — потребление) методом динамического программирования или непосредственно используя правило множителей Лагранжа.

2) Найти решение трехпериодной дискретной модели Рамсея

$$\sum_{t=0}^{2} \beta^t \sqrt{u_t} + \frac{3}{2} x_3 \to \max, \quad x_{t+1} = 2x_t - u_t, , \quad x_{t+1} = x_t - u_t], \quad t = 0, 1, 2, \quad x_0 = 1 \quad (0 < \beta < 1)$$

(x_t — капитал, u_t — потребление).

2) Найти решение трехпериодной дискретной модели Рамсея

$$\sum_{t=0}^{2} \beta^t \ln u_t + 3x_3 \to \max, \quad x_{t+1} = 3x_t - u_t, \quad t = 0, 1, 2, \quad x_0 = 1, \ (0 < \beta < 1)$$

(x_t — капитал, u_t — потребление). Каково значение капитала в последний момент времени?

Тема 6. Динамическое программирование

Метод динамического программирования для задачи оптимального управления в дискретном и непрерывном времени. Принцип оптимальности.

Уравнение Беллмана. Синтез оптимального управления.

Связь между динамическим программированием и принципом максимума.

Литература по теме: [6], [7], [18], [13], [19]-[21].

Тема 7. Стохастическое управление.

Понятие стохастическоих дифференциальных уравнений. Постановка задачи управления для стохастических уравнений. Эвристический вывод уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Задачи оптимальной остановки.

Литература по теме: [6], [7], [18], [13], [19]-[21].

Раздел 3. Равновесие и Парето-оптимальность

Тема 8. Теоремы о неподвижной точке

Принцип сжимающих отображений и его приложения.

Теоремы Брауэра и Какутани. Приложения: существование равновесия по Нэшу; существование конкурентного равновесия.

Литература по теме: [9] – [13], [16], [18]

Тема 9. Парето-оптимальность

Парето-оптимальность в сильном и слабом смысле. Теорема о свёртке критериев. Необходимые и достаточные условия Парето-оптимальности. Парето-оптимальные и равновесные состояния.

Литература по теме: [9] – [13], [15], [18]

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие задачи

1. В задаче векторной оптимизации $f_1(x,y) = y + 2x \to \max$, $f_2(x,y) = y - 2x \to \max$ на допустимом множестве $y \le \sqrt{|x|}$ найти все точки, оптимальные по Парето.
2. В задаче векторной оптимизации $f_1(x,y) = y + x \to \max$, $f_2(x,y) = y - x \to \max$ на допустимом множестве $y \le 1 - x^2$ найти все точки, оптимальные по Парето.
3. Найти уравнение кривой Парето для двух потребителей с функциями полезности $U = 2x_1 + \ln x_2$, $V = y_2\sqrt{y_1}$ и общими запасами двух товаров $x_1 + y_1 = 10$, $x_2 + y_2 = 20$.
4. Найти уравнение кривой Парето для двух потребителей с функциями полезности $U = 2x_1 + \ln x_2$, $V = \sqrt{y_1 y_2}$ и общими запасами двух товаров $x_1 + y_1 = 10$, $x_2 + y_2 = 20$.

Практические занятия

1-2. Решение задач по теме: выпуклые функции и выпуклые множества.

3-4. Вычисление функций спроса и предложения, их исследование. Заменимость и дополнительность товаров. Отыскание равновесия для простейших вариантов модели Эрроу – Дебре. Сравнительная статика.

5-7. Решение задач по темам: дифференциальные уравнения, устойчивость решений дифференциальных уравнений.

8-10. Принцип максимума в непрерывном времени, уравнение Эйлера. Приложение к модели Рамсея. Вывод уравнения Эйлера из принципа максимума. Условие трансверсальности. Стационарные режимы.

11-12. Динамическое программирование в дискретном и непрерывном времени.

13. Задачи стохастического управления.

14-15. Парето-оптимальность и равновесие. Исследование теоремы о свёртке для отыскания всех Парето-оптимальных состояний. Первая и вторая теоремы всеобщего благосостояния. Эффективность траекторий экономического роста.

16. Исследование олигополии. Модели монополии, отыскание решения. Олигополии по Курно и по Бертрану.

VIII. Перечень компетенций, формируемых в результате освоения дисциплины – по видам компетенций:

- ОНК – общенаучные компетенции: понимание роли математических методов в экономических исследованиях;
- ИК- инструментальные компетенции: владение техникой теории выпуклого анализа и экстремальных задач, включая принцип максимума, динамическое программирование, многокритериальную оптимизацию и теоремы о неподвижных точках;
- СК- системные компетенции: умение понимать связи между свойствами математических конструкций и особенностями экономических объектов;
- ПК – профессиональные компетенции: умение применять математику для анализа экономических явлений;
- СПК – специализированные компетенции: навыки решения конкретных задач, в частности умение использовать теорию экстремальных задач для исследования моделей планирования и макроэкономических моделей типа Рамсея; умение применять понятие Парето - оптимальности для анализа моделей общего равновесия, теорему Брауэра – для доказательства существования равновесия в модели Курно.

IX. Используемые образовательные, научно-исследовательские и научно-производственные технологии:

- А. Образовательные технологии;
- Б. Научно-исследовательские технологии;
- В. Научно-производственные технологии;

X. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов, оценочные средства контроля успеваемости и промежуточной аттестации:

- А. Учебно-методические рекомендации для обеспечения самостоятельной работы студентов;
- Б. Фонд оценочных средств

Критерии оценки знаний и навыков

Итоговая оценка выставляется по результату письменного экзамена с последующим устным опросом с учётом посещаемости аудиторных занятий, выполнения домашних заданий и активности работы на семинаре. Как правило, для отличной оценки нужно подучить 80% от суммы баллов, для хорошей оценки нужно подучить 60%, а для удовлетворительной - 40%. При

этом за домашнюю работу, посещаемость и активность на семинарах добавляется от нуля до 10%, за каждую из двух контрольных работ – до 10% баллов.

- В. Примерный список заданий для проведения текущей и промежуточной аттестации. В первой контрольной работе будут задачи на алгебраическую сумму множеств, выпуклость функций, решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными линейных дифференциальных уравнений. Во второй контрольной работе будут задачи на устойчивость линейных дифференциальных уравнений, нелинейных дифференциальных уравнений, нахождение функций спроса и вариационное исчисление.

- Г. Примерный список вопросов для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Примерное содержание экзаменационной работы

1. **(10)** На плоскости дан квадрат $A = \{(x, y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$. Множество B есть пересечение этого квадрата с прямой $x = y$. Нарисовать множество $A + B$ и найти множество точек максимума линейной функции $f(x, y) = x - y$ на этом множестве.

2. **(10)** В задаче векторной оптимизации $f_1(x, y) = y + x \to \max, \quad f_2(x, y) = y - 2x \to \max$ на допустимом множестве $y \le 1 - x^2$ найти все точки, оптимальные по Парето.

3. **(10)** Является ли выпуклым множество на плоскости: $ye^x \ge 1, \ \ 1000x + y \le 1000$? Является ли оно ограниченным? Какова его размерность?

4. **(10)** При каких значениях параметра a функция $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + ay^2 + 5a^2x - 6(a+1)y + 8$ будет выпуклой?

5. **(15)** Будет ли отображение $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$ сжимающим на отрезке $[0, 5]$? На отрезке $[1, 10]$?

6. **(10)** Функция полезности двух товаров $U(x_1, x_2) = ax_1 + 2\sqrt{x_2}$ $(a > 0)$. Доход потребителя равен z. Найти функцию спроса на каждый товар.

7. **(15)** Найти уравнение кривой Парето для двух потребителей с функциями полезности $U = 2x_1 + \ln x_2, \ V = y_2\sqrt{y_1}$ и общими запасами двух товаров $x_1 + y_1 = 10, \ x_2 + y_2 = 20$.

8. **(15)** Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.

9. **(15)** При каких значениях параметра a система линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = ax - y, \ \dot{y} = x + ay$ ассимптотически устойчива?

10. **(15)** На плоскости в области $x > 0$ дана система нелинейных дифференциальных уравнений: $\dot{x} = e^{-2y} - x, \ \dot{y} = -y + \ln x$. Найти все ее положения равновесия и выяснить их устойчивость в линейном приближении.

11. **(15)** Решить дифференциальное уравнение $\ddot{x} + \dot{x} - x = 2, \ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$. Будет ли его решение выпуклой функцией? Будет ли оно всюду положительным?

12. **(20)** Решить задачу вариационного исчисления:

$$J = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 + 2x \sin t)dt \to \min, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 1$$

Будет ли ее решение выпуклой или вогнутой функцией?

13. **(20)** Найти решение трехпериодной дискретной модели Рамсея

$$\sum_{t=0}^{2} \beta^t \ln u_t + x_3\beta^3 \to \max, \quad x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad t = 0, 1, 2, \quad x_0 = 1 \quad (0 < \beta < 1)$$

(x_t — капитал, u_t — потребление) методом динамического программирования или непосредственно используя правило множителей Лагранжа.

14. **(30)** Найти решение в модели Рамсея с непрерывным временем

$$J = \int_0^T e^{-rt}\sqrt{u}\,dt \to \max, \quad \dot{x} = kx - u, \quad x(0) = 1, \quad x(T) \ge 0, \quad u \ge 0 \quad (k \ne 2r).$$

XI. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Список литературы

[1] K.J.Arrow, M.D.Intriligator. Historical introduction. In: Handbook of Mathematical Economics. V. 1. Eds: K.J.Arrow, M.D.Intriligator. North-Holland, 1981, p. 1-14.

[2] Carl P.Simon, Lawrence Blume. Mathematics for Economics. W.W. Norton & Company, Inc., New York, 1994.

[3] Б.Т.Поляк. Введение в оптимизацию. Москва, Наука, 1983.

[4] М.Д.Интриллигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Москва, Прогресс, 1975.

[5] Daniel Leonard, Ngo Van Long. Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. Cambridge University Press, 1992.

[6] В.Г.Болтянский. Оптимальное управление дискретными системами. Москва, Наука, 1973.

[7] Р.Беллман. Динамическое программирование. Москва, Мир, 1960.

[8] А. Сотсков, Г.Колесник. Оптимальное управление и динамическое программирование в примерах и задачах. Москва, РЭШ, 2003.

[9] Х. Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. Москва, Мир, 1972.

[10] И.Экланд. Элементы математической экономики. Москва, Мир, 1983.

[11] В.М.Полтерович. Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. Москва, Наука, 1990.

[12] С.А.Ашманов. Введение в математическую экономику. Москва, Наука, 1984.

[13] A.Mascollel, M.Whinston, and J.Green. Microeconomics Theory. Oxford University Press, 1995.

[14] O.J.Blanchard, S.Fisher, Lectures on Macroeconomics. Cambridg, Mass., The MIT Press, 1992.

[15] С.Л.Печерский, А.А.Беляева. Теория игр для экономистов.

[16] Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[17] Б.П.Демидович. Лекции по математической теории устойчивости.

[18] С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Москва,. Мир, 1964

[19] В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин, Оптимальное управление. М: Наука, 1979.

[20] Suresh P.Sethi, Optimal Control Theory. Applications to management Science and Economics, Second Edition, Springer Nature Switzerland AG, 2019.

[21] Э.М.Галеев. Оптимизация: Теория, примеры, задачи. Изд. 3, Москва, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

XII. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

- А. Помещения;
- Б. Оборудование;
- В. Иные материалы

Подписи авторов _____

В.М.Полтерович

Э.Л.Пресман