

**Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова  
МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Математический анализ»**

**Направление 080100 Экономика  
для подготовки студентов — бакалавров очного отделения**

**Автор — составитель программы:**

**Ивин Евгений Александрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент**

Рабочая программа утверждена  
решением Ученого совета МШЭ МГУ  
Протокол № от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

**Москва  
2011**

Учебная программа по курсу «Математический анализ» разработана в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования Министерства образования и науки Российской Федерации.

Рабочая программа соответствует учебному плану подготовки бакалавров по направлению 080100 «Экономика».

Изучение курса «Математический анализ» предназначено для формирования и усвоение знаний, умений, навыков в области экономической теории и практики, которые необходимы для работы в государственных и частных структурах, а также развития профессиональных качеств, компетенций, необходимых для выполнения функциональных обязанностей в сфере экономики.

**Основные задачи** преподавания дисциплины:

- ознакомление студентов с основами математического анализа;
- раскрытие роли математики в области экономического знания;
- изучение фундаментальных понятий классического анализа;
- привитие практических навыков исследования функциональных зависимостей;
- формирование математического мышления.

В результате изучения курса студенты должны:

## Требования к знаниям и умениям по дисциплине

### ***Знать:***

- теоретические обоснования и границы применимости методов математического анализа.

### ***Уметь:***

- грамотно формулировать и формализовать частные задачи в процессе построения математических моделей;

- применять теоретические знания и практические навыки для их решения.

### ***Владеть:***

- основными методами исследования функций;

- базовыми методами.

### ***Иметь представление:***

- представление о методах, этапах и способах математического описания и анализа функциональной зависимости переменных.

Практическая реализация учебной программы предусматривает проведение аудиторных занятий в виде лекций, практикумов, семинаров, консультаций и организации самостоятельной работы студентов.

Дисциплина изучается в течение двух семестров при общем объеме учебной нагрузки 146 часов. Итоговый контроль – в форме экзамена по окончании I и II семестров.

## Учебно-тематический план

№	Название раздела, темы	Лекции	Практические занятия	самостоятельная работа <sup>i</sup>
	<b>Раздел I. Введение. Основы теории множеств.</b>			
	Тема 1. Введение.	2	0	
	Входная контрольная работа.	0	2	
	Тема 2. Множества. Числовые множества.	2	2	2

	<i>Итого по разделу I</i>	4	4	2
<b>Раздел II. Пределы функций.</b>				
	Тема 1. Числовые последовательности.	2	2	2
	Тема 2. Вычисления пределов.	2	2	2
	Тема 3. Функции действительной переменной.	2	2	2
	Тема 4. Вычисления пределов функции.	2	2	2
	Тема 5. O – символика.	2	2	2
	Тема 6. Непрерывность функции.	2	2	2
	Коллоквиум по разделу II.	2	0	
	Контрольная работа по разделу II.	0	2	
	<i>Итого по разделу II</i>	14	14	12
<b>Раздел III. Производная и дифференциал.</b>				
	Тема 1. Понятие производной.	2	1	2
	Тема 2. Понятие дифференциала.	2	1	2
	Тема 3. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.	2	2	2
	Тема 4. Выпуклость функции.	2	2	2
	Тема 5. Аппроксимация функций.	2	2	2
	Коллоквиум по разделу III.	2	0	
	Контрольная работа по разделу III.	0	2	
	<i>Итого по разделу III.</i>	12	10	10
<b>Раздел IV. Построение графиков функций.</b>				
	Тема 1. Построение графиков простейших функций.	2	2	4
	Тема 2. Анализ функций и построение графиков.	4	2	4

Контрольная работа по разделу IV.	0	2	
Анализ и разбор экзаменационных вопросов.	2	0	
<i>Итого по разделу IV.</i>	8	6	8
<b><i>Итого за I семестр:</i></b>	<b>38</b>	<b>34</b>	<b>32</b>
<b>Раздел V. Интегрирование.</b>			
Тема 1. Неопределенный интеграл.	2	2	2
Тема 2. Основные методы интегрирования.	4	4	4
Тема 3. Определенный интеграл.	2	2	2
Тема 4. Основные методы вычисления определенного интеграла.	2	2	4
Тема 5. Несобственный интеграл.	2	2	2
Коллоквиум по разделу V.	2	0	
Контрольная работа по разделу V.	0	2	
<i>Итого по разделу V.</i>	<i>14</i>	<i>14</i>	<i>14</i>
<b>Раздел VI. Функции нескольких переменных.</b>			
Тема 1. Понятие функции нескольких переменных.	2	2	2
Тема 2. Оптимизационные задачи.	2	2	4
Тема 3. Кратный интеграл.	2	2	2
Контрольная работа по разделу VI.	0	2	
<i>Итого по разделу VI.</i>	<i>6</i>	<i>8</i>	<i>8</i>
<b>Раздел VII. Числовые и функциональные ряды.</b>			
Тема 1. Числовые ряды.	4	2	2
Тема 2. Функциональные ряды.	2	2	4
Коллоквиум по разделам VI, VII.	2	0	

	<i>Итого по разделу VII.</i>	8	4	6
	<b>Раздел VIII. Дифференциальные уравнения.</b>			
	Тема 1. ОДУ. Задача Коши.	6	4	4
	Тема 2. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.	2	2	4
	Контрольная работа по разделу VIII.	0	2	
	<i>Итого по разделу VIII.</i>	8	8	8
	Анализ и разбор экзаменационных вопросов.	4	0	
	<b><i>Итого за II семестр:</i></b>	<b>40</b>	<b>34</b>	<b>36</b>
	<b>Всего по курсу:</b>	<b>78</b>	<b>68</b>	<b>68</b>

**Самостоятельная работа** предусматривает изучение основной и дополнительной учебной литературы, подготовку сообщений по истории математики на семинарских занятиях.

## ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### **Раздел 1. Общая теория множеств.**

Понятие множества и подмножества, элемента множества. Открытые и замкнутые множества. Пустое множество. Счетные и несчетные множества. Операции над множествами, декартово произведение множеств. Понятие отображения, функциональное и взаимно-однозначное отображение. Сложная и обратная функции. Область определения и область значений отображения. Числовое множество. Целые, действительные и комплексные числа. Понятие окрестности точки, проколотой окрестности, односторонней окрестности, окрестности бесконечности. Числовые функции, монотонность функции. Графики основных элементарных функций.

### **Раздел 2. Пределы последовательности и функции.**

Понятие последовательности, бесконечно большие и бесконечно малые последовательности, ограниченные последовательности. Их свойства. Предел последовательности. Единственность предела. Свойства предела последовательности. Первый замечательный предел. Основные методы вычисления пределов и раскрытия неопределенностей. Бесконечно большие и бесконечно малые функции, ограниченные функции. Их свойства. Понятие предела функции в точке, предел функции на бесконечности. Свойства предела, единственность предела. Теорема о предельном переходе в сложной функции. Второй замечательный предел. Основные методы вычисления пределов. Символы  $O$ -большое,  $o$ -малое. Эквивалентность функций. Использование  $o$ -символики для вычисления пределов.

### **Раздел 3. Непрерывность функции.**

Два определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Непрерывность на промежутке. Типы разрывов. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Локальные свойства функций, непрерывных в точке. Первая и вторая теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции. Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.

### **Раздел 4. Понятия производной и дифференциала.**

Понятие производной. Геометрический, физический и экономический смысл производной. Производная элементарных функций. Производная суммы, произведения и частного функций. Производная сложной функции. Примеры. Понятие дифференциала и его физическая

интерпретация. Единственность дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функций. Основные свойства дифференциала. Теоремы о дифференцируемости обратной функции, инвариантность формы первого дифференциала. Экстремум функции. Необходимое условие внутреннего локального экстремума. Теорема Ролля, ее геометрический смысл. Теорема Лагранжа о конечном приращении, ее геометрический смысл. Теорема Коши. Выпуклость функции (строгая и нестрогая). Геометрическое определение с помощью хорд и его перевод на язык неравенств. Определение выпуклости с помощью касательной. Необходимые и достаточные условия выпуклости. Точки перегиба.

### **Раздел 5. Аппроксимация многочленами.**

Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши. Запись формулы Тейлора через дифференциалы. Использование формулы Тейлора для приближенных вычислений. Связь с  $o$ -символикой.

### **Раздел 6. Анализ функции и построение графиков.**

Сжатие и сдвиги графиков вдоль осей. Построение параболы, гиперболы, дробной функции методом сдвига. Полное исследование функции и построение графика. Нули функции, экстремумы. Нахождение вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот.

### **Раздел 7. Неопределенный интеграл.**

Понятие первообразной функции. Понятие неопределенного интеграла, его свойства. Таблица интегралов. Простейшие дроби. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональной дроби, интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование по частям. Методы интегрирования простейших иррациональных функций.

### **Раздел 8. Определенный интеграл.**

Понятие интегральной суммы. Понятие определенного интеграла Римана. Формулировка критерия интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной на отрезке функции, имеющей конечное число точек разрыва. Основные свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Определенный интеграл как функция верхнего (нижнего) предела. Несобственные интегралы I и II рода.

### **Раздел 9. Функция нескольких переменных.**



Понятие функции нескольких переменных. Область определения и область значений. Поверхность уровня. Непрерывность. Частные производные. Градиент. Экстремумы функции нескольких переменных. Оптимизационные задачи. Понятие кратного интеграла. Двойной интеграл на прямоугольной области. Основные свойства и методы вычисления кратных интегралов.

#### **Раздел 10. Числовой и функциональные ряды.**

Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость. Необходимое условие сходимости числового ряда. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда. Интегральный признак. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Понятие области сходимости и суммы функционального ряда. Понятие равномерной сходимости. Критерий Коши сходимости функционального ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда.

#### **Раздел 11. Обыкновенное дифференциальное уравнение.**

Понятие дифференциального уравнения первого порядка, начального условия. Задача Коши. Построение вида решения методом изоклин. Единственность решения. Методы решения уравнений с разделяющимися переменными. Уравнение Бернулли. Понятие дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Общее и частное решение.

# Учебно-тематический план занятий

## Семестр 1

### **Лекция 1. Введение.**

Понятие множества и подмножества, элемента множества. Открытые и замкнутые множества. Пустое множество. Счетные и несчетные множества. Операции над множествами, декартово произведение множеств. Понятие отображения, функциональное и взаимно-однозначное отображение. Сложная и обратная функции. Область определения и область значений отображения. (Архипов Г. И. и др., стр. 7-19, Ахтямов А.М., глава 1.)

### **Лекция 2. Числовые множества.**

Числовое множество. Целые, действительные и комплексные числа. Понятие окрестности точки, проколотой окрестности, односторонней окрестности, окрестности бесконечности. Числовые функции, монотонность функции. Графики основных элементарных функций. (Архипов Г. И. и др., стр. 19-29, Ахтямов А.М., глава 2.)

### **Лекция 3. Числовые последовательности.**

Понятие последовательности, бесконечно большие и бесконечно малые последовательности, ограниченные последовательности. Их свойства. Предел последовательности. Единственность предела. Свойства предела последовательности. (Архипов Г. И. и др., стр. 29-55, Ахтямов А.М., глава 3, стр.43-51.)

### **Лекция 4. Вычисления пределов.**

Первый замечательный предел. Основные методы вычисления пределов и раскрытия неопределенностей. (Ахтямов А.М., глава 5, стр. 76-86.)

### **Лекция 5. Функции действительной переменной.**

Бесконечно большие и бесконечно малые функции, ограниченные функции. Их свойства. Понятие предела функции в точке, предел функции на бесконечности. Свойства предела, единственность предела. (Архипов Г. И. и др., стр. 55-74, Ахтямов А.М., глава 4, стр. 56-69.)

### **Лекция 6. Вычисления пределов функции.**

Теорема о предельном переходе в сложной функции. Второй замечательный предел. Основные методы вычисления пределов. (Архипов Г. И. и др., стр. 45-55, Ахтямов А.М., глава 5, стр.76-92.)

### **Лекция 7. О-символика.**

Символы  $O$ -большое,  $o$ -малое. Эквивалентность функций. Использование  $o$ -символики для вычисления пределов. (Ахтямов А.М., глава 4, стр. 59-69.)

### **Лекция 8. Непрерывность функции.**

Два определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Непрерывность на промежутке. Типы разрывов. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Локальные свойства функций, непрерывных в точке. (Архипов Г. И. и др., стр. 74-79, Ахтямов А.М., глава 4, стр. 69-76.)

### **Лекция 9. Свойства непрерывных функций.**

Первая и вторая теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции. Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. (Архипов Г. И. и др., стр. 79-93)

Контрольная работа по разделу I.

### **Лекция 10. Понятие производной.**

Понятие производной. Геометрический, физический и экономический смысл производной. Производная элементарных функций. Производная суммы, произведения и частного функций. Производная сложной функции. Примеры. (Архипов Г. И. и др., стр. 98-115, Ахтямов А.М., глава 7 и глава 8, стр. 103-128.)

### **Лекция 11. Понятие дифференциала.**

Понятие дифференциала и его физическая интерпретация. Единственность дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функций. Основные свойства дифференциала. Теоремы о дифференцируемости обратной функции, инвариантность формы первого дифференциала. (Архипов Г. И. и др., стр. 98-115.)

### **Лекция 12. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.**

Экстремум функции. Необходимое условие внутреннего локального экстремума. Теорема Ролля, ее геометрический смысл. Теорема Лагранжа о конечном приращении, ее геометрический смысл. Теорема Коши. (Архипов Г. И. и др., стр. 115-126, Ахтямов А.М., глава 8, стр. 128-139, глава 9, стр. 140-151.)

### **Лекция 13. Выпуклость функции.**

Выпуклость функции (строгая и нестрогая). Геометрическое определение с помощью хорд и его перевод на язык неравенств. Определение выпуклости с помощью касательной. Необходимые и достаточные условия выпуклости. Точки перегиба. (Архипов Г. И. и др., стр. 144-157, Ахтямов А.М., глава 9, стр. 151-179.)

#### **Лекция 14. Аппроксимация функций.**

Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши. Запись формулы Тейлора через дифференциалы. Использование формулы Тейлора для приближенных вычислений. Связь с о-символикой. (Архипов Г. И., стр. 132-160.)

#### **Лекция 15. Построение простейших функций.**

Сжатие и сдвиги графиков вдоль осей. Построение параболы, гиперболы, дробной функции методом сдвига. (Ахтямов А.М., глава 2.)

#### **Лекция 16. Анализ функции и построение графиков.**

Полное исследование функции и построение графика. Нули функции, экстремумы. Нахождение вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот. (Ахтямов А.М., глава 9, стр. 164-181.)

#### **Лекция 17. Резерв.**

Анализ и повторение сложных тем по результатам контрольных работ.

### **Семестр 2.**

#### **Лекция 1. Неопределенный интеграл.**

Понятие первообразной функции. Понятие неопределенного интеграла, его свойства. Таблица интегралов. Простейшие дроби. (Архипов Г. И. и др., стр. 166-174, Ахтямов А.М., глава 11, стр. 201-210.)

#### **Лекция 2. Основные методы интегрирования.**

Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональной дроби, интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная тригонометрическая подстановка. (Ахтямов А.М., глава 11, стр. 210-213.)

#### **Лекция 3. Интегрирование по частям.**

Интегрирование по частям. Методы интегрирования простейших иррациональных функций. (Ахтямов А.М., глава 11, стр. 213-220.)

#### **Лекция 4. Определенный интеграл.**

Понятие интегральной суммы. Понятие определенного интеграла Римана. Формулировка критерия интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной на отрезке функции, имеющей конечное число точек разрыва. (Архипов Г. И., стр. 183-195. и Ахтямов А.М., глава 12, стр. 220-231.)

#### **Лекция 5. Методы вычислений определенного интеграла.**

Основные свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. (Архипов Г. И. и др., стр. 212-233, Ахтямов А.М., глава 12, стр. 231-260.)

#### **Лекция 6. Несобственный интеграл.**

Определенный интеграл как функция верхнего (нижнего) предела. Несобственные интегралы I и II рода. (Архипов Г. И. и др., стр. 246-249 и 253-257, Ахтямов А.М., глава 12, стр. 260-269.)

#### **Лекция 7. Функция нескольких переменных.**

Понятие функции нескольких переменных. Область определения и область значений. Поверхность уровня. Непрерывность. Частные производные. Градиент. (Архипов Г. И. и др., стр. 314-337, Ахтямов А.М., глава 14, стр. 278-305.)

#### **Лекция 8. Оптимизационные задачи.**

Экстремумы функции нескольких переменных. Оптимизационные задачи. (Архипов Г. И. и др., стр. 347-347, Ахтямов А.М., глава 15, стр. 305-336.)

#### **Лекция 9. Кратный интеграл.**

Понятие кратного интеграла. Двойной интеграл на прямоугольной области. Основные свойства и методы вычисления кратных интегралов. (Архипов Г. И., стр. 544-556, 562-566.)

#### **Лекция 10. Числовой ряд.**

Понятие числового ряда. Абсолютная и условная сходимость. Необходимое условие сходимости числового ряда. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда. Интегральный признак. (Архипов Г. И., стр. 347-381.)

#### **Лекция 11. Функциональный ряд.**

Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Понятие области сходимости и суммы функционального ряда. Понятие равномерной сходимости. Критерий Коши сходимости функционального ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функционального ряда. (Архипов Г. И., стр. 388-407.)

### **Лекция 12. Обыкновенное дифференциальное уравнение.**

Понятие дифференциального уравнения первого порядка, начального условия. Задача Коши. Построение вида решения методом изоклин. Единственность решения. (Ахтямов А.М., глава 17, стр. 357-361.)

### **Лекция 13. Основные методы решений ОДУ.**

Методы решения уравнений с разделяющимися переменными. Уравнение Бернулли. (Ахтямов А.М., глава 17, стр. 361-368.)

### **Лекция 14. Уравнение с постоянными коэффициентами.**

Понятие дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Общее и частное решение. (Ахтямов А.М., глава 18.)

### **Лекция 15-16. Подготовка к экзамену.**

Повтор сложного материала по результатам контрольных работ.

### **Тестовые задания**

1. Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Мироненков А. А., Попеленский Ф. Ю., Словеснов А. В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Первый семестр. Москва, 2008.
2. Ивин Е. А., Курбацкий А. Н., Мироненков А. А., Попеленский Ф. Ю., Словеснов А. В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Второй семестр. Москва, 2009.

### **Рекомендуемая литература**

#### ***Основная литература:***

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

2. Архипов Г. И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.
3. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов.

*Дополнительная литература:*

1. Зорич В.А. Математический анализ. Том 1.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.

---

<sup>i</sup> Рекомендательно.