

**Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова  
МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Линейная алгебра»**

**Направление 080100 Экономика  
для подготовки студентов — бакалавров очного отделения**

**Автор — составитель программы:  
к.ф.-м.н., доцент Попеленский Ф. Ю.**

Рабочая программа утверждена  
решением Ученого совета МШЭ МГУ  
Протокол № от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

**Москва  
2011**

## Требования к знаниям и умениям по дисциплине

**1. Необходимые предварительные знания и умения.** Для усвоения курса необходимы знания и умения по алгебре и геометрии в рамках школьной программы.

**2. Курс «Линейная алгебра» считается усвоенным, если** прослушавший его студент:

(а) имеет представление о сущности и назначении дисциплины, знает теоретические обоснования и границы применимости методов линейной алгебры.

(б) умеет грамотно применять теоретические знания и практические навыки при решении задач методами линейной алгебры, умеет выделять, формулировать и формализовать частные задачи линейной алгебры в процессе построения математических моделей.

**Общий объем** аудиторных занятий по данному курсу – 128 часов, в том числе 64 часа – лекции, 64 часа – семинары.

Итоговый контроль – в форме экзаменов по окончании I и II семестров.

## Учебно-тематический план

п/п	Наименование темы	Всего часов	Лекции	Практические занятия
	<b>Раздел 1. Введение в аналитическую геометрию</b>			
	Тема 1. Введение.		2	0
	Входная контрольная работа.		0	2
	Тема 2. Прямые на плоскости.		2	2
	Тема 3. Векторы на плоскости.		2	2
	Тема 4. Скалярное произведение на плоскости.		2	2
	<i>Итого по разделу 1</i>		8	8
	<b>Раздел 2. Системы линейных уравнений.</b>			
	Тема 1. Системы линейных уравнений.		2	2
	Тема 2. Однородные и неоднородные		2	2

системы.			
	<i>Итого по разделу 2</i>		4 4
<b>Раздел 3. Матрицы, операции над ними.</b>			
Тема 1. Операции над матрицами.		2	2
Тема 2. Определитель, след.		2	2
Тема 3. Обратная матрица.		2	2
	<i>Итого по разделу 3</i>		6 6
<b>Раздел 4. Векторные пространства</b>			
Тема 1. Векторные пространства.		2	2
Тема 2. Наборы векторов.		2	2
Тема 3. Подпространства.		2	2
	<i>Итого по разделу 4</i>		6 6
<b>Раздел 5. Замена координат.</b>			
Тема 1. Замена базиса.		2	2
Тема 2. Кривые второго порядка.		2	2
	<i>Итого по разделу 5</i>		4 4
Анализ и разбор экзаменационных вопросов.		4	4
	<b><i>Итого за I семестр:</i></b>	<b>64</b>	<b>32 32</b>
<b>Раздел 6. Линейные операторы</b>			
Тема 1. Линейные операторы.		2	2
Тема 2. Замена базиса.		2	2
Тема 3. Обратимые линейные операторы.		2	2
	<i>Итого по разделу 6</i>		6 6

	<b>Раздел 7. Собственные векторы и собственные значения.</b>			
	Тема 1. Евклидовы пространства.		2	2
	Тема 2. Собственные векторы и собственные значения симметрического оператора.		2	2
	Тема 3. Диагонализуемость.		2	2
	<i>Итого по разделу 7.</i>		6	6
	<b>Раздел 8. Квадратичные формы.</b>			
	Тема 1. Квадратичные формы		2	2
	Тема 2. Знакоопределенность		2	2
	Тема 3. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.		2	2
	<i>Итого по разделу 8.</i>		6	6
	<b>Раздел 9. Приложения.</b>			
	Тема 1. Оптимизационные задачи.		6	6
	Тема 2. Матричные вычисления.		4	4
	<i>Итого по разделу 9.</i>		10	10
	Анализ и разбор экзаменационных вопросов.		4	4
	<b><i>Итого за II семестр:</i></b>	<b>64</b>	<b>32</b>	<b>32</b>
	<b>Всего по курсу:</b>	<b>128</b>	<b>64</b>	<b>64</b>

# ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## Раздел 1. Введение в аналитическую геометрию

Представление о задачах линейной алгебры, возникающих в простейшей экономической модели двухотраслевой экономики. Аналитическая геометрия плоскости. Задание фигур равенствами и неравенствами: прямая, полуплоскость, окружность, круг, угол, отрезок. Окружность. Уравнение окружности. Прямые, уравнение прямой  $y=kx+b$ ,  $ax+by+c=0$ . Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Перпендикулярные прямые. Взаимное расположение двух прямых, соответствующая система линейных уравнений. Взаимное расположение прямой и окружности, касание.

Векторы на плоскости, операции над векторами, коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Понятие о линейной зависимости, линейной комбинации. Системы двух уравнений с двумя неизвестными. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление длин и углов. Проекция вектора на ось (другой вектор). Перпендикуляр. Площадь параллелограмма и треугольника, определитель второго порядка. Нормальный и направляющий векторы прямой. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Середина отрезка, деление отрезка в данном отношении.

## Раздел 2. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений. Равносильные системы. Матрицы. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Базисные и свободные переменные. Теорема Кронекера-Капелли. Нетривиальная совместность однородной системы уравнений. Общее решение неоднородной системы. Параметризация пространства решений. Фундаментальное решение. Сравнение с маломерным случаем.

## Раздел 3. Матрицы, операции над ними.

Матрицы. Действия над ними: транспонирование, сложение, умножение на число, произведение. Нулевая и единичная матрицы. Диагональные, симметрические матрицы. Свойства операций. Определители и их свойства. Методы вычисления определителей. След матрицы, его свойства. Связь определителя с рангом. Поведение определителя, следа и ранга при умножении матриц. Матрицы вида  $X'X$  и  $XX'$ . Миноры. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы через алгебраические дополнения и с помощью присоединенной матрицы.

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.  
Двухотраслевая модель Леонтьева.

#### **Раздел 4. Векторные пространства**

Векторные пространства. Арифметическое  $\mathbb{R}^n$ . Операции с векторами, их свойства. Линейно зависимые/независимые системы векторов. Базис и размерность пространства. Подпространства векторного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Ранг системы векторов, вычисление ранга методом элементарных преобразований и с помощью миноров. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, базис в пространстве решений однородной системы, методы построения. Подпространство, размерность, пересечение и сумма подпространств.

#### **Раздел 5. Замена координат и преобразование уравнений.**

Новый и старый базисы. Матрица перехода. Новые и старые координаты. Преобразование уравнений. Понятие о классификации. Эллипс, гипербола, парабола. Некоторые сведения о кривых второго порядка.

### **Семестр 2.**

#### **Раздел 6. Линейные операторы.**

Понятие о линейном операторе. Примеры (оператор проектирования и т.п.). Матрица линейного оператора. Композиция операторов и произведение матриц. Образ, ядро, ранг оператора. Преобразование матрицы оператора при замене базисов. Операторы из  $n$ -мерного пространства в себя. Обратимость. Связь с соответствующей системой линейных уравнений, с определителем и рангом. Матрица обратного оператора.

#### **Раздел 7. Собственные векторы и собственные значения.**

Скалярное произведение в  $n$ -мерном пространстве. Неравенство Коши—Буняковского. Ортонормированный базис. Ортогональный базис. Ортогонализация. Понятие о скалярном произведении в  $\mathbb{R}^n$ . Ортогональные матрицы и ортогональные преобразования. Сохранение ортогональным преобразованием следа матрицы вида  $XX'$ , где  $X$  – вектор-столбец. Собственные числа, собственные векторы. Характеристический многочлен. Методы решения характеристических уравнений. Вещественность собственных значений. Ортогональность собственных векторов. Собственные подпространства. Идемпотентные самосопряженные операторы и идемпотентные матрицы.

Диагонализуемость симметрического оператора в базисе из собственных векторов. Возведение диагонализуемой матрицы в степень и извлечение из нее квадратного корня. Разложение Холецкого.

### **Раздел 8. Квадратичные формы.**

Квадратичная форма, матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (произвольным невырожденным преобразованием, ортогональным преобразованием). Положительно (отрицательно) определенные формы. Критерий Сильвестра. Ортогональные операторы, примеры. Нахождение главных осей эллипса и эллипсоида. Приведение уравнения кривой или поверхности в каноническому виду. Классификация. Невырожденные случаи. Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство. Связь с теоремами о двух и трех перпендикулярах.

### **Раздел 9. Приложения методов линейной алгебры.**

Метод наименьших квадратов. Метод главных компонент. Сравнение его с МНК. Общий случай, отличия от случая симметрических операторов. Запись линейной и квадратичной функции в матричном виде. Матричный вид их производных. Блочные матрицы. Операции с блочными матрицами. Вычисление определителя, обратная матрица. Кронекерово произведение матриц, его свойства.

# Учебно-тематический план занятий

## Семестр 1

### **Лекция 1. Введение.**

Представление о задачах линейной алгебры, возникающих в простейшей экономической модели двухотраслевой экономики. Аналитическая геометрия плоскости. Координатные оси, координаты точек, расстояние между точками. Задание фигур уравнениями и неравенствами, прямая, полуплоскость, окружность, круг, угол, отрезок. Окружность. Уравнение окружности.

### **Лекция 2. Прямые на плоскости.**

Прямые, уравнение прямой  $y=kx+b$ ,  $ax+by+c=0$ . Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Перпендикулярные прямые. Взаимное расположение двух прямых, соответствующая система линейных уравнений. Взаимное расположение прямой и окружности, касание.

### **Лекция 3. Векторы на плоскости.**

Векторы на плоскости, операции над векторами, коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Понятие о линейной зависимости, линейной комбинации. Системы двух уравнений с двумя неизвестными.

### **Лекция 4. Скалярное произведение на плоскости.**

Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление длин и углов. Проекция вектора на ось (другой вектор). Перпендикуляр. Площадь параллелограмма и треугольника, определитель второго порядка. Нормальный и направляющий векторы прямой. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Середина отрезка, деление отрезка в данном отношении.

### **Лекция 5. Системы линейных уравнений.**

Системы линейных уравнений. Равносильные системы. Матрицы. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Базисные и свободные переменные. Теорема Кронекера-Капелли. Нетривиальная совместность однородной системы уравнений.



### **Лекция 6. Неоднородные системы линейных уравнений**

Общее решение неоднородной системы. Параметризация пространства решений. Фундаментальное решение. Сравнение с маломерным случаем.

### **Лекция 7. Операции над матрицами.**

Матрицы. Действия над ними: транспонирование, сложение, умножение на число, произведение. Нулевая и единичная матрицы. Диагональные, симметрические матрицы. Свойства операций.

### **Лекция 8. Определитель и след, свойства, связь с рангом.**

Определители и их свойства. Методы вычисления определителей. След матрицы, его свойства. Связь определителя с рангом. Поведение определителя, следа и ранга при умножении матриц. Матрицы вида  $X'X$  и  $XX'$ . Миноры.

### **Лекция 9. Обратная матрица.**

Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы через алгебраические дополнения и с помощью присоединенной матрицы. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Двухотраслевая модель Леонтьева.

### **Лекция 10. Векторные пространства**

Векторные пространства. Арифметическое  $\mathbb{R}^n$ . Операции с векторами, их свойства. Линейно зависимые/независимые системы векторов. Базис и размерность пространства. Подпространства векторного пространства. Линейная оболочка системы векторов.

### **Лекция 11. Наборы векторов, их свойства.**

Ранг системы векторов, вычисление ранга методом элементарных преобразований и с помощью миноров. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, базис в пространстве решений однородной системы, методы построения.

### **Лекция 12. Подпространства.**

Подпространство, размерность, пересечение и сумма подпространств.

### **Лекция 13. Замена координат.**

Новый и старый базисы. Матрица перехода. Новые и старые координаты. Преобразование уравнений. Понятие о классификации.

### **Лекция 14. Кривые второго порядка.**

Эллипс, гипербола, парабола. Некоторые сведения о кривых второго порядка.

### **Лекции 15-16. Резерв.**

Анализ и повторение сложных тем по результатам контрольных работ.

## **Семестр 2.**

### **Лекция 1. Линейные операторы.**

Понятие о линейном операторе. Примеры (оператор проектирования и т.п.). Матрица линейного оператора. Композиция операторов и произведение матриц. Образ, ядро, ранг оператора.

### **Лекция 2. Линейные операторы и замена базисов.**

Преобразование матрицы оператора при замене базисов.

### **Лекция 3. Обратимые линейные операторы.**

Операторы из  $n$ -мерного пространства в себя. Обратимость. Связь с соответствующей системой линейных уравнений, с определителем и рангом. Матрица обратного оператора.

### **Лекция 4. Евклидовы пространства.**

Скалярное произведение в  $n$ -мерном пространстве. Неравенство Коши—Буняковского, Ортонормированный базис. Ортогональный базис. Ортогонализация. Понятие о скалярном произведении в  $\mathbb{R}^n$ . Ортогональные матрицы. Сохранение ортогональным преобразованием следа матрицы вида  $XX'$ , где  $X$  – вектор-столбец.

### **Лекция 5. Собственные векторы и собственные значения симметрического оператора.**

Собственные числа, собственные векторы. Характеристический многочлен. Методы решения характеристических уравнений. Вещественность собственных значений. Ортогональность собственных векторов. Собственные подпространства. Идемпотентные самосопряженные операторы.

### **Лекция 6. Диагонализуемость.**

Диагонализуемость симметрического оператора в базисе из собственных векторов. Возведение диагонализуемой матрицы в степень и извлечение из нее квадратного корня. Разложение Холецкого.

### **Лекция 7. Квадратичные формы.**

Квадратичная форма, матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (произвольным невырожденным преобразованием, ортогональным преобразованием).

### **Лекция 8. Знакоопределенные формы.**

Положительно (отрицательно) определенные формы. Критерий Сильвестра. Ортогональные операторы, примеры. Нахождение главных осей эллипса и эллипсоида.

### **Лекция 9. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.**

Приведение уравнения кривой или поверхности в каноническому виду. Классификация. Невырожденные случаи.

### **Лекция 10. Ортогональная проекция.**

Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство. Связь с теоремами о двух и трех перпендикулярах.

### **Лекция 11. Методы НК и главных компонент.**

Метод наименьших квадратов. Метод главных компонент. Сравнение его с МНК.

### **Лекция 12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.**

Общий случай, отличия от случая симметрических операторов.

### **Лекция 13. Матричное дифференцирование.**

Запись линейной и квадратичной функции в матричном виде. Матричный вид их производных.

### **Лекция 14. Блочные матрицы.**

Блочные матрицы. Операции с блочными матрицами. Вычисление определителя, обратная матрица. Кронекерово произведение матриц, его свойства.

### **Лекция 15-16. Подготовка к экзамену.**

Повторение сложного материала по результатам контрольных работ.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Практикум по высшей математике для экономистов* под ред. Кремера Н.Ш.
2. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.*
3. Гельфанд. И.М. *Лекции по линейной алгебре.*
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*
5. **Айвазян С.А.** *Основы эконометрики (том 2, приложение)*
6. Малугин В.А. *Математика для экономистов. Линейная алгебра. Курс лекций*
7. Малугин В.А. *Математика для экономистов. Линейная алгебра. Задачи и упражнения*