

**Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**

**МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Математические методы оценивания  
производных финансовых инструментов»**

**Для направления 080100 « Экономика»  
подготовки бакалавров очного отделения**

**Шифр дисциплины** \_\_\_\_\_

**Авторы – составители программы:**

Курбацкий Алексей Николаевич, кандидат физ.-мат. наук  
Словеснов Александр Викторович, кандидат физ.-мат. наук

Одобрена на заседании кафедры « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2013г.  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ (ФИО, ученая степень,  
ученое звание)

Утверждена Ученым советом МШЭ « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2013г.  
Ученый секретарь \_\_\_\_\_ (ФИО, ученая степень,  
ученое звание)

**Москва**

**2013**

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Математические методы оценивания производных финансовых инструментов» предназначено для формирования и усвоение знаний, умений, навыков в теоретической и практической финансовой математике, которые необходимы для работы в государственных и частных структурах, а также развития профессиональных качеств и компетенций.

### Основные задачи преподавания дисциплины:

- ознакомление студентов с основами классической финансовой математики;
- привитие практических навыков оценки производных финансовых инструментов;
- формирование математического мышления.

### Требования к знаниям и умениям по дисциплине:

- **знать** теоретические обоснования и границы применимости методов финансовой математики;
- **уметь** грамотно формулировать и формализовать частные задачи в процессе построения математических моделей;
- **владеть** основными методами оценивания производных финансовых инструментов.

Практическая реализация учебной программы предусматривает проведение аудиторных занятий в виде лекций, практикумов, семинаров, консультаций и организации самостоятельной работы студентов.

Дисциплина изучается в течение двух семестров при общем объеме учебной нагрузки 64 часа. Итоговый контроль – в форме экзамена по окончании I и II семестров.

# Программа учебной дисциплины

## Раздел 1. Функционирование финансовых рынков.

Основы функционирования финансовых рынков. Производные финансовые инструменты (форвардные контракты, фьючерсы, опционы). Виды трейдеров (спекулянты, арбитражеры, хеджеры). Участники рынка. Спецификация фьючерсных контрактов. Прибыли и убытки от фьючерсных контрактов, зависимость от цены немедленной поставки. Дневные взаиморасчеты. Валютные фьючерсные контракты. Прямая и обратная котировка валют. Цена продавца и цена покупателя. Расчет кросс-курса. Открытие и закрытие позиции: типы приказов. Основные принципы хеджирования. Типы хеджирования. Использование фьючерсных контрактов при хеджировании. Базисный риск. Кросс-хеджирование. Коэффициент хеджирования. Линейная зависимость данных. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии. Вычисление коэффициента хеджирования. Типы процентных ставок: годовые, полугодовые, квартальные, дневные. Процентная ставка с непрерывным начислением. Понятие безрисковой ставки. Кривая безрисковых ставок.

## Раздел 2. Финансовые инструменты.

Типы облигаций. Денежные потоки. Текущая стоимость денежного потока. Расчет цены и доходности облигации. Коэффициенты чувствительности облигаций: дюрация, выпуклость. Построение кривой безрисковых ставок по данным о ценах облигаций. Механизм короткой продажи. Расчет форвардной цены для некоторых активов: с нулевым доходом, с известным наличным доходом, с известной доходностью. Сравнение форвардных и фьючерсных цен. Фьючерсные контракты на облигации. Исчисление количества дней. Коэффициент пересчета облигации. Облигация с наименьшей ценой поставки. Валютные фьючерсы. Свопы по процентным ставкам. Участие и роль посредника в свопа. Расчет цены свопа. Типы опционов, длинная и короткая позиция. Спецификация опционного контракта, американские и европейские опционы. Зависимость выплат по опциону от цены основного актива. Условия заключения опционного контракта на бирже: ограничения на объем, брокерская комиссия, обеспечение короткой позиции. Деление акций. Индексы рынка акций. Европейские опционы на акции. Верхние и нижние границы для премий опционов на акции. Паритет цен европейских опционов на продажу и на покупку. Экс-дивидендная дата. Американские опционы на акции. Верхние и

нижние границы для премий опционов на акции. Аналог паритета цен для американских опционов. Влияние дивидендов на премии опционов. Торговые стратегии, использующие опционы. Стратегии, использующие один опцион и базовый актив. Опционные спрэды: типы спрэдов, выплаты по опционным спрэдам. Комбинационные опционные стратегии.

### **Раздел 3. Кредитный риск и кредитные финансовые инструменты.**

Показатель VAR. Историческое моделирование. Построение моделей. Метод Монте-Карло. Сравнение подходов. Использование линейных и квадратичных моделей для вычисления VAR. Анализ главных компонентов, его применение к оценке VAR. Понятие волатильности. Построение оценок для волатильности. Стандартная оценка и взвешенные схемы. Использование модели скользящего среднего. Модель GARCH(1,1). Использование метода максимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH. Применение модели GARCH для прогнозирования волатильности. ценам акций и облигаций. Уменьшение кредитного риска: взаимозачет, обеспечение, понижающие триггеры. Факторные модели описания корреляционной структуры. Коэффициент биномиальной корреляции. Кредитная стоимость под риском. Кредитные деривативы. Свопы кредитных дефолтов и кредитные индексы. Оценка свопов кредитных дефолтов (переоценка свопов, оценка вероятностей дефолта). Бинарные свопы. Свop на совокупную доходность. Пакетные свопы и обеспеченные долговые обязательства. Оценка пакетных свопов с использованием гауссовых пакетов.

### **Раздел 4. Математические методы оценивания финансовых инструментов.**

Бинарные деревья. Использование одноуровневых бинарных деревьев для оценки европейских опционов. Вероятностная интерпретация оценивания с помощью одноуровневых деревьев. Использование бинарных деревьев для оценки американских опционов. Использование данных о волатильности при оценивании премий опционов. Оценка производных финансовых инструментов по методу Монте-Карло. Деривативы, зависящие от нескольких рыночных параметров. Генерирование случайных величин. Оценка количества испытаний. Приложения. Конечно-разностные методы оценки деривативов. Явные и неявный конечно-разностный метод. Замена переменной. Связь с триномиальным деревом.

## **Раздел 5. Модель Блэка-Шоулза-Мертон.**

Марковское свойство. Стохастические процессы с непрерывным временем. Винеровские процессы. Обобщенные винеровские процессы. Процесс, описывающий изменение цены на акцию. Свойство логнормальности. Процесс Ито. Лемма Ито. Историческая справка. Модель Блэка-Шоулза-Мертон. Концепции, лежащие в основе модели. Дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза-Мертон. Применение модели Блэка-Шоулза для оценки форвардных контрактов. Формулы Блэка-Шоулза для оценки европейских опционов на бездивидендные акции. Свойства формул Блэка-Шоулза. Подразумеваемая волатильность. «Улыбки» волатильности. Причины возникновения «улыбки» волатильности на примере валютных опционов и опционов на акции. Временная структура волатильности. Поверхности волатильности.

## Учебно-тематический план

№	Название раздела, темы	Лекции	Практические занятия	самостоятельная работа
	<b>Раздел I. Функционирование финансовых рынков.</b>			
	Тема 1. Основы функционирования финансовых рынков. Производные финансовые инструменты. Виды трейдеров.	2	0	2
	Тема 2. Участники рынка. Спецификация фьючерсных контрактов. Прибыли и убытки от фьючерсных контрактов, зависимость от цены немедленной поставки. Дневные взаиморасчеты.	2	0	2
	Тема 3. Валютные фьючерсные контракты. Прямая и обратная котировка валют. Цена продавца и цена покупателя. Расчет кросс-курса. Открытие и закрытие позиции: типы приказов.	2	0	2
	Тема 4. Основные принципы хеджирования. Типы хеджирования. Использование фьючерсных контрактов при хеджировании. Базисный риск. Кросс-хеджирование.	2	0	2
	Тема 5. Коэффициент хеджирования. Линейная зависимость данных. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии. Вычисление коэффициента хеджирования.	0	2	2
	Тема 6. Типы процентных ставок: годовые, полугодовые, квартальные, дневные. Процентная ставка с непрерывным начислением. Понятие безрисковой ставки. Кривая безрисковых ставок.	0	2	2
	<i>Итого по разделу I</i>	8	4	12

	<b>Раздел II. Финансовые инструменты.</b>			
	Тема 1. Типы облигаций. Денежные потоки. Текущая стоимость денежного потока. Расчет цены и доходности облигации.	2	0	2
	Тема 2. Коэффициенты чувствительности облигаций: дюрация, выпуклость. Построение кривой безрисковых ставок по данным о ценах облигаций.	1	1	2
	Тема 3. Механизм короткой продажи. Расчет форвардной цены для некоторых активов: с нулевым доходом, с известным наличным доходом, с известной доходностью. Сравнение форвардных и фьючерсных цен.	2	0	2
	Тема 4. Фьючерсные контракты на облигации. Исчисление количества дней. Коэффициент пересчета облигации. Облигация с наименьшей ценой поставки. Валютные фьючерсы.	2	0	2
	Тема 5. Свопы по процентным ставкам. Участие и роль посредника в свопах. Денежные потоки. Расчет цены свопа.	1	1	2
	Тема 6. Типы опционов, длинная и короткая позиция. Спецификация опционного контракта, американские и европейские опционы. Зависимость выплат по опциону от цены основного актива. Условия заключения опционного контракта на бирже: ограничения на объем, брокерская комиссия, обеспечение короткой позиции.	2	0	2
	Тема 7. Деление акций. Индексы рынка акций. Европейские опционы на акции. Верхние и нижние границы для премий опционов на акции. Паритет цен европейских опционов на продажу и на покупку.	2	0	2

Тема 8. Экс-дивидендная дата. Американские опционы на акции. Верхние и нижние границы для премий опционов на акции. Аналог паритета цен для американских опционов. Влияние дивидендов на премии опционов.	0	2	2
Тема 9. Торговые стратегии, использующие опционы. Стратегии, использующие один опцион и базовый актив. Опционные спрэды: типы спрэдов, выплаты по опционным спрэдам. Комбинационные опционные стратегии.	0	2	2
<i>Итого по разделу II.</i>	<i>12</i>	<i>6</i>	<i>18</i>
<i>Итого за I семестр:</i>	<i>20</i>	<i>10</i>	<i>30</i>
<b>Раздел III. Кредитный риск и кредитные финансовые инструменты.</b>			
Тема 1. Показатель VAR. Историческое моделирование. Построение моделей. Метод Монте-Карло. Сравнение подходов.	1	1	2
Тема 2. Использование линейных и квадратичных моделей для вычисления VAR. Анализ главных компонент, его применение к оценке VAR.	0	2	2
Тема 3. Построение оценок для волатильности. Стандартная оценка и взвешенные схемы. Использование модели скользящего среднего.	0	2	2
Тема 4. Модель GARCH(1,1). Использование метода максимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH. Применение модели GARCH для прогнозирования волатильности.	1	1	2
Тема 5. Вероятности и интенсивности дефолтов, степени возмещения. Оценка вероятностей дефолтов по ценам акций и облигаций. Уменьшение кредитного риска:	2	0	2



	взаимозачет, обеспечение, понижающие триггеры.			
	Тема 6. Факторные модели описания корреляционной структуры. Коэффициент биномиальной корреляции. Кредитная стоимость под риском.	2	0	2
	Тема 7. Кредитные деривативы. Свопы кредитных дефолтов и кредитные индексы. Оценка свопов кредитных дефолтов (переоценка свопов, оценка вероятностей дефолта). Бинарные свопы.	1	1	2
	Тема 8. Свop на совокупную доходность. Пакетные свопы и обеспеченные долговые обязательства. Оценка пакетных свопов с использованием гауссовых пакетов.	1	1	2
	<i>Итого по разделу III.</i>	8	8	16
	<b>Раздел IV. Математические методы оценивания финансовых инструментов.</b>			
	Тема 1. Бинарные деревья. Использование одноуровневых бинарных деревьев для оценки европейских опционов. Вероятностная интерпретация оценивания с помощью одноуровневых деревьев.	2	0	2
	Тема 2. Использование бинарных деревьев для оценки американских опционов. Понятие волатильности. Использование данных о волатильности при оценивании премий опционов.	0	2	2
	Тема 3. Оценка производных финансовых инструментов по методу Монте-Карло. Деривативы, зависящие от нескольких рыночных параметров. Генерирование случайных величин. Оценка количества испытаний. Приложения.	2	0	2
	Тема 4. Конечно-разностные методы оценки деривативов. Явные и неявный конечно-	1	1	2

	разностный метод. Замена переменной. Связь с триномиальным деревом.			
	<i>Итого по разделу IV.</i>	5	3	8
	<b>Раздел V. Модель Блэка-Шоулза-Мертон.</b>			
	Тема 1. Марковское свойство. Стохастические процессы с непрерывным временем. Винеровские процессы. Обобщенные винеровские процессы.	2	0	2
	Тема 2. Процесс, описывающий изменение цены на акцию. Свойство логнормальности. Процесс Ито. Лемма Ито. Историческая справка.	2	0	2
	Тема 3. Модель Блэка-Шоулза-Мертон. Концепции, лежащие в основе модели. Дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза-Мертон. Применение модели Блэка-Шоулза для оценки форвардных контрактов.	1	1	2
	Тема 4. Формулы Блэка-Шоулза для оценки европейских опционов на бездивидендные акции. Свойства формул Блэка-Шоулза. Подразумеваемая волатильность.	0	2	2
	Тема 5. «Улыбки» волатильности. Причины возникновения «улыбки» волатильности на примере валютных опционов и опционов на акции. Временная структура волатильности. Поверхности волатильности.	1	1	2
	<i>Итого по разделу V.</i>	6	4	10
	<b>Итого за II семестр:</b>	<b>19</b>	<b>15</b>	<b>34</b>
	<b>Всего по курсу:</b>	<b>39</b>	<b>25</b>	<b>64</b>

## Учебно-тематический план занятий

### **Лекция 1. Введение.**

Основы функционирования финансовых рынков. Производные финансовые инструменты (форвардные контракты, фьючерсы, опционы). Виды трейдеров (спекулянты, арбитражеры, хеджеры).

### **Лекция 2. Фьючерсные рынки.**

Участники рынка. Спецификация фьючерсных контрактов. Прибыли и убытки от фьючерсных контрактов, зависимость от цены немедленной поставки. Дневные взаиморасчеты.

### **Лекция 3. Валютные фьючерсы.**

Валютные фьючерсные контракты. Прямая и обратная котировка валют. Цена продавца и цена покупателя. Расчет кросс-курса. Открытие и закрытие позиции: типы приказов.

### **Лекция 4. Стратегии хеджирования.**

Основные принципы хеджирования. Типы хеджирования. Использование фьючерсных контрактов при хеджировании. Базисный риск. Кросс-хеджирование.

### **Лекция 5. Вычисление коэффициента хеджирования.**

Коэффициент хеджирования. Линейная зависимость данных. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии. Вычисление коэффициента хеджирования.

### **Лекция 6. Процентные ставки.**

Типы процентных ставок: годовые, полугодовые, квартальные, дневные. Процентная ставка с непрерывным начислением. Понятие безрисковой ставки. Кривая безрисковых ставок.

### **Лекция 7. Рынок облигаций.**

Типы облигаций. Денежные потоки. Текущая стоимость денежного потока. Расчет цены и доходности облигации.

### **Лекция 8. Характеристики облигаций.**

Коэффициенты чувствительности облигаций: дюрация, выпуклость. Построение кривой безрисковых ставок по данным о ценах облигаций.

### **Лекция 9. Форвардные и фьючерсные цены.**

Механизм короткой продажи. Расчет форвардной цены для некоторых активов: с нулевым доходом, с известным наличным доходом, с известной доходностью. Сравнение форвардных и фьючерсных цен.

### **Лекция 10. Фьючерсы на облигации.**

Фьючерсные контракты на облигации. Исчисление количества дней. Коэффициент пересчета облигации. Облигация с наименьшей ценой поставки. Валютные фьючерсы.

### **Лекция 11. Свопы.**

Свопы по процентным ставкам. Участие и роль посредника в свопах. Денежные потоки. Расчет цены свопа.

### **Лекция 12. Опционные рынки.**

Типы опционов, длинная и короткая позиция. Спецификация опционного контракта, американские и европейские опционы. Зависимость выплат по опциону от цены основного актива. Условия заключения опционного контракта на бирже: ограничения на объем, брокерская комиссия, обеспечение короткой позиции.

### **Лекция 13. Рынок акций.**

Деление акций. Индексы рынка акций. Европейские опционы на акции. Верхние и нижние границы для премий опционов на акции. Паритет цен европейских опционов на продажу и на покупку.

### **Лекция 14. Дивиденды по акциям.**

Экс-дивидендная дата. Американские опционы на акции. Верхние и нижние границы для премий опционов на акции. Аналог паритета цен для американских опционов. Влияние дивидендов на премии опционов.

### **Лекция 15. Стратегии торговли акциями.**

Торговые стратегии, использующие опционы. Стратегии, использующие один опцион и базовый актив. Опционные спрэды: типы спрэдов, выплаты по опционным спрэдам. Комбинационные опционные стратегии.

### **Лекция 16. Стоимость под риском.**

Показатель VAR. Историческое моделирование. Построение моделей. Метод Монте-Карло. Сравнение подходов.

### **Лекция 17. Оценивание стоимости под риском.**

Использование линейных и квадратичных моделей для вычисления VAR. Анализ главных компонентов, его применение к оценке VAR.

### **Лекция 18. Оценивание волатильности.**

Построение оценок для волатильности. Стандартная оценка и взвешенные схемы. Использование модели скользящего среднего.

### **Лекция 19. Модель GARCH.**

Модель GARCH(1,1). Использование метода максимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH. Применение модели GARCH для прогнозирования волатильности.

### **Лекция 20. Кредитный риск.**

Вероятности и интенсивности дефолтов, степени возмещения. Оценка вероятностей дефолтов по ценам акций и облигаций. Уменьшение кредитного риска: взаимозачет, обеспечение, понижающие триггеры.

### **Лекция 21. Корреляция между дефолтами.**

Факторные модели описания корреляционной структуры. Коэффициент биномиальной корреляции. Кредитная стоимость под риском.

### **Лекция 22. Свопы кредитных дефолтов.**

Кредитные деривативы. Свопы кредитных дефолтов и кредитные индексы. Оценка свопов кредитных дефолтов (переоценка свопов, оценка вероятностей дефолта). Бинарные свопы.

### **Лекция 23. Пакетные свопы.**

Своп на совокупную доходность. Пакетные свопы и обеспеченные долговые обязательства. Оценка пакетных свопов с использованием гауссовых пакетов.

### **Лекция 24. Бинарные деревья.**

Бинарные деревья. Использование одноуровневых бинарных деревьев для оценки европейских опционов. Вероятностная интерпретация оценивания с помощью одноуровневых деревьев.

### **Лекция 25. Двухуровневые деревья.**

Использование бинарных деревьев для оценки американских опционов. Понятие волатильности. Использование данных о волатильности при оценивании премий опционов.

### **Лекция 26. Метод Монте-Карло.**

Оценка производных финансовых инструментов по методу Монте-Карло. Деривативы, зависящие от нескольких рыночных параметров.

Генерирование случайных величин. Оценка количества испытаний. Приложения.

### **Лекция 27. Конечно-разностные методы.**

Конечно-разностные методы оценки деривативов. Явные и неявный конечно-разностный метод. Замена переменной. Связь с триномиальным деревом.

### **Лекция 28. Винеровские процессы.**

Марковское свойство. Стохастические процессы с непрерывным временем. Винеровские процессы. Обобщенные винеровские процессы.

### **Лекция 29. Лемма Ито.**

Процесс, описывающий изменение цены на акцию. Свойство логнормальности. Процесс Ито. Лемма Ито. Историческая справка.

### **Лекция 30. Модель Блэка-Шоулза.**

Модель Блэка-Шоулза-Мертон. Концепции, лежащие в основе модели. Дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза-Мертон. Применение модели Блэка-Шоулза для оценки форвардных контрактов.

### **Лекция 31. Оценка европейских опционов в модели Блэка-Шоулза.**

Формулы Блэка-Шоулза для оценки европейских опционов на бездивидендные акции. Свойства формул Блэка-Шоулза. Подразумеваемая волатильность.

### **Лекция 32. Практическое использование модели Блэка-Шоулза**

«Улыбки» волатильности. Причины возникновения «улыбки» волатильности на примере валютных опционов и опционов на акции. Временная структура волатильности. Поверхности волатильности.

## **Рекомендуемая литература**

1. Джон Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2008.
2. Fabozzi F.J., Rachev S.T., Focardi S.M. Financial Econometrics: From Basics to Advanced Modeling Techniques. Wiley, 2007.
3. Terence C. Mills, Raphael N. Markellos. The econometric modelling of financial time series, Cambridge University Press, 2008.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1,2. - М.:Фазис, 2004.

5. Ширяев А.Н. Вероятность Т. 1,2 - 3-е издание. - М.:МЦНМО, 2004.

---

<sup>i</sup> Рекомендательно.